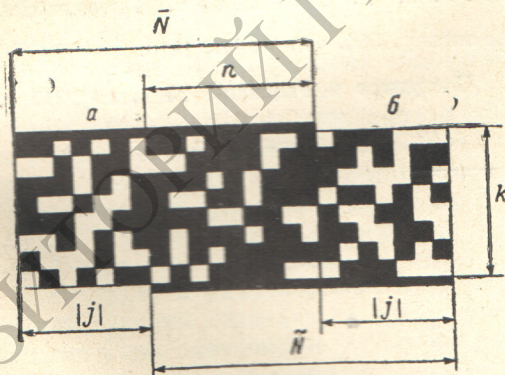


ОТНОШЕНИЕ СИГНАЛ—ШУМ В СПЕКТРОМЕТРАХ С ХАОТИЧЕСКИМИ РАСТРАМИ

Ю. С. Бухонин и В. Б. Шлишевский

Исследуется аппаратная функция (АФ) монохроматора с одинаковыми построчно-хаотическими входным и выходным растрами, каждая из k строк которых содержит m прозрачных и $(N-m)$ непрозрачных одинаковых по размеру прямоугольных элементов. При этом структура растров характеризуется гипергеометрическим распределением случайного числа прозрачных элементов в каком-либо отрезке произвольной строки. Показывается, что АФ монохроматора содержит побочные максимумы, среднеквадратичный уровень которых, отнесенный к величине центрального максимума, для любого m не превышает значения $(2kN)^{1/2}$. Дается оценка отношения сигнал—шум на выходе спектрометра с таким монохроматором, из которой следует, что наличие побочных максимумов приводит к уменьшению, а в некоторых случаях к отсутствию преимуществ спектрометров с построчно-хаотическими растрами перед целевыми спектрометрами.

В последнее время в технике спектрального анализа получают распространение светосильные спектрометры, монохроматоры которых вместо входных и выходных щелей содержат растры с хаотическим распределением световых отверстий [1-7]. Аппаратная функция (АФ) таких монохроматоров,



кроме центрального максимума, имеет побочные максимумы [8]. Среднеквадратичный уровень побочных максимумов по сравнению с величиной центрального максимума невелик. Поэтому в первом приближении ими можно пренебречь, что и делается в [3, 4], где рассматривается

Рис. 1. Двумерные построчно-хаотические растры монохроматора: a — входной; b — выходной.

теория работы спектрометров с построчно-хаотическими растрами. В настоящей статье вычислен среднеквадратичный уровень побочных максимумов АФ, что позволяет точнее, чем в [3, 4], оценить выигрыш в отношении сигнал—шум на выходе спектрометров, получаемый в результате замены входных и выходных щелей их монохроматоров построчно-хаотическими растрами.

1. Пусть функция $\tau(x, y)$, где x и y — пространственные переменные, описывает пропускание прямоугольного растра (рис. 1), который имеет площадь $S=XY$ и состоит из одинаковых по размеру прозрачных и непрозрачных прямоугольных элементов шириной δx и высотой δy . При этом все элементы размещаются по определенному случайному закону в k горизонтальных строках таким образом, что в каждой строке растра содержится N элементов, причем точно m из них прозрачные. Известно,

что без учета дифракционных, абберационных и других искажений АФ растрового монохроматора описывается одномерной корреляционной функцией входного и выходного растров. Поэтому если входной растр с функцией пропускания $\tau(x, y)$ является точной копией выходного, то величину j -го максимума АФ монохроматора, где $j=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N$, можно описать следующим выражением:

$$R_j = \frac{N}{S} \iint_{-\infty}^{\infty} \tau(x, y) \tau(x - \Delta\lambda_j, y) dx dy = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k R_{ij}, \quad (1)$$

где $\Delta\lambda = \delta x (\lambda' - \lambda) / \delta\lambda$, λ — длина волны излучения, λ' — измеряемая в длинах волн координата спектра на выходе монохроматора с пределом разрешения $\delta\lambda$, i — номер строки растров. Нормирующий множитель N/S выбран здесь таким образом, что величина центрального максимума АФ $R_0 = R_{i0} = m$ равна отношению световых площадей входного растра и входной щели высотой Y соответственно растрового и целевого монохроматора с одинаковыми пределами разрешения $\delta\lambda$.

Режим селективной модуляции [3-5] в спектрометрах с построчно-хаотическими растрами достигается, например, за счет возвратно-поступательного перемещения входного или выходного растров монохроматоров на величину δy в направлении, перпендикулярном дисперсии приборов с последующим использованием только переменной составляющей на выходе приемников излучения. Этот режим является одной из разновидностей дифференциального метода приема сигналов [6]. Поэтому в режиме селективной модуляции величину j -го максимума АФ монохроматора с одинаковыми входным и выходным растрами можно описать следующим выражением:

$$F_j = R_j - \frac{N}{S} \iint_{-\infty}^{\infty} \tau(x, y) \tau(x - \Delta\lambda_j, y) dx dy = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (R_{ij} - \bar{F}_{ij}), \quad (2)$$

где $\tau(x, y)$ — функция пропускания смещенного на величину δy выходного растра. При этом известно два способа такой селективной модуляции [3]. В первом случае функция $\tau(x, y)$ описывает пропускание построчно-хаотического растра произвольной структуры, а во втором случае $\tau(x, y)$ описывает пропускание построчно-хаотического растра с позитивно-негативной структурой, т. е. растра, у которого каждая четная строка является негативной копией предшествующей нечетной строки. В последнем случае выражение (2) удобно представить в следующем виде:

$$I_j = 2R_j - \frac{N}{S} \iint_{-\infty}^{\infty} \Pi(x, y) \tau(x - \Delta\lambda_j, y) dx dy = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (2R_{ij} - I_{ij}), \quad (3)$$

где $\Pi(x, y) = 1$ при $x \in \{X\}$, $y \in \{Y\}$ и $\Pi(x, y) = 0$ вне указанных интервалов изменения x и y . Поэтому в дальнейшем символами F_j и I_j будем обозначать величины j -х максимумов АФ монохроматоров, работающих в режиме селективной модуляции соответственно по первому и второму способам. Следует также отметить, что в результате относительного смещения входного и выходного растров в режиме селективной модуляции эффективное число строк в одном из растров не единицу меньше, чем в режиме без модуляции. В дальнейшем для режима селективной модуляции под величинами k и S будем понимать соответственно эффективное число строк и эффективную площадь входного и выходного растров монохроматора.

Будем рассматривать $\tau(x, y)$ и $\bar{\tau}(x, y)$ как два независимых дискретных случайных процесса, каждый из которых характеризуется одним и тем же параметром $\Theta = m/N$, представляющим собой вероятность того, что в результате их реализации произвольный элемент растров окажется прозрач-

ным. Поскольку число m прозрачных элементов в каждой строке растров фиксировано, то случайное число r прозрачных элементов в каком-либо отрезке строки распределено по гипергеометрическому закону. Растры, рассматриваемые в [3], также характеризуются параметром $\Theta = m/\bar{N}$, но при этом под m понимается математическое ожидание случайного числа прозрачных элементов в одной строке растров. В этом случае число r прозрачных элементов в каком-либо отрезке строки распределено по биномиальному закону. Известно [10], что математические ожидания случайных величин, распределенных по гипергеометрическому и биномиальному законам, равны. Однако отмеченное различие в законах построения растров проявляется уже при вычислении дисперсий этих случайных величин. Поскольку дисперсия случайной величины, распределенной по биномиальному закону, всегда больше дисперсии случайной величины, распределенной по гипергеометрическому закону [10], то среднеквадратичный уровень побочных максимумов АФ оказывается ниже при фиксированном параметре m , т. е. в рассматриваемом здесь случае.

Вычислим математические ожидания и дисперсии случайных величин R_j , F_j и I_j , т. е. вычислим числовые характеристики в общем случае случайных величин центрального ($j=0$) и побочных ($j \neq 0$) максимумов АФ монохроматора в обычном режиме и в режиме селективной модуляции. Для этого напомним, что математическое ожидание и дисперсия случайной величины z , распределенной по гипергеометрическому закону с параметрами α , β и γ , определяются следующими выражениями [10]:

$$M(z) = \alpha\beta, \quad D(z) = \alpha(1-\alpha)\beta \frac{\gamma-\beta}{\gamma-1}, \quad (4)$$

где $0 \leq \beta \leq \alpha\gamma$, $0 \leq \alpha \leq 1$. Обозначим (рис. 1) через $n = \bar{N} - |j|$ число прозрачных и непрозрачных элементов в каждой строке выходного растра в зоне пересечения подынтегральных функций выражений (1)–(3). Пусть точно $r = \tilde{I}_{i,j}$ из этих n элементов прозрачные. При этом условии число $R_{i,j}$ ($j \neq 0$) совпавших прозрачных элементов в i -х строках входного и выходного растров является случайной величиной, распределенной по гипергеометрическому закону с параметрами $\alpha = \Theta = (m-1)/(\bar{N}-1)$, $\beta = r$ и $\gamma = (\bar{N}-1)$, т. е. условные математическое ожидание $M(R_{i,j}|r)$ и дисперсию $D(R_{i,j}|r)$ этой случайной величины можно вычислить с помощью выражения (4). Аналогично определяются условные числовые характеристики $M(\tilde{F}_{i,j}|r)$ и $D(\tilde{F}_{i,j}|r)$ входящего в выражение (2) случайного числа $\tilde{F}_{i,j}$ совпавших прозрачных элементов в i -х строках входного и смещенного на величину δu выходного растров. В отличие от величины $R_{i,j}$ случайная величина $\tilde{F}_{i,j}$ имеет гипергеометрическое условное распределение с параметрами $\alpha = \Theta = m/\bar{N}$, $\beta = r$ и $\gamma = \bar{N}$. Также аналогично для обеих случайных величин определяются их безусловные числовые характеристики. Известно [11], например, что безусловные математическое ожидание и дисперсия случайной величины $\tilde{F}_{i,j}$ могут быть найдены по формулам

$$M(\tilde{F}_{i,j}) = \sum_{r=1}^n P(r) M(\tilde{F}_{i,j}|r), \quad D(\tilde{F}_{i,j}) = \sum_{r=1}^n P(r) D(\tilde{F}_{i,j}|r), \quad (5)$$

где в соответствии с принятым выше законом построения растров случайная величина $r = \tilde{I}_{i,j}$ распределена по гипергеометрическому закону $P(r)$ с параметрами $\alpha = \Theta = m/\bar{N}$, $\beta = n = \bar{N} - |j|$ и $\gamma = \bar{N}$.

Тогда с помощью выражений (4) для $\tilde{F}_{i,j}$ и r и выражений (5), полагая, что строки растров формируются по одному случайному закону, но независимо друг от друга, получаем [12]

$$M(\tilde{F}_j) = (\bar{N} - |j|) \Theta^2, \quad D(\tilde{F}_j) = \frac{\bar{N} - |j|}{k(\bar{N} - 1)} \Theta^2 (1 - \Theta)^2 \left[\bar{N} + |j| \left(\frac{\Theta}{1 - \Theta} + \frac{1}{\bar{N} - 1} \right) \right]. \quad (6)$$

Для нас представляет интерес случай, когда число прозрачных элементов в каждой строке растров $m \gg 1$, т. е. $\bar{\Theta} \simeq \Theta$. Тогда в соответствии с (1) и (2) для безусловных числовых характеристик случайных величин R_j и F_j при $j \neq 0$ имеем

$$M(R_j) \simeq M(\tilde{F}_j), \quad D(R_j) \simeq D(\tilde{F}_j); \quad M(F_j) \simeq 0, \quad D(F_j) \simeq 2D(\tilde{F}_j). \quad (7)$$

Режим селективной модуляции при использовании растров с позитивно-негативной структурой обычно характеризуется тем, что число прозрачных элементов в каждой строке растров $m = (\tilde{N} + 1)/2 \simeq \tilde{N}/2$. Как следует из выражений (3) и (4), для $R_{i,j}$ только при этом условии математические ожидания величин побочных максимумов I_j равны нулю. Тогда, полагая опять $m \gg 1$ и $j \neq 0$, имеем

$$M(I_j)|_{\Theta=0.5} = 0, \quad D(I_j) \simeq 4D(\tilde{F}_j), \quad (8)$$

Наконец, математические ожидания центральных максимумов ($j=0$) равны

$$M(R_0) = M(F_0) = m - M(\tilde{F}_0) = m(1 - \Theta), \quad M(I_0) = I_0 = m. \quad (9)$$

Как следует из выражений (6), наибольшую дисперсию имеют первые ($j = \pm 1$) побочные максимумы АФ. Поэтому, используя (6)–(9), для средне-

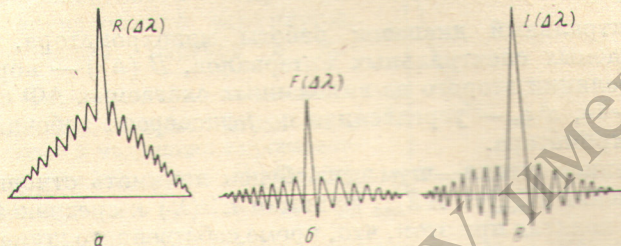


Рис. 2. Аппаратные функции монохроматора с построчно-хаотическими растрами.

а — при отсутствии модуляции; б — в режиме селективной модуляции с произвольными растрами; в — в режиме селективной модуляции с позитивно-негативными растрами.

квадратичных уровней побочных максимумов, отнесенных к средним величинам центральных максимумов, при $m \gg 1$ имеем

$$\frac{\sqrt{D(R_j)}}{M(R_0)} \leq \frac{1}{\sqrt{k\tilde{N}}}, \quad \frac{\sqrt{D(F_j)}}{M(F_0)} \leq \sqrt{\frac{2}{k\tilde{N}}}, \quad \frac{\sqrt{D(I_j)}}{I_0}|_{\Theta=0.5} \leq \frac{1}{\sqrt{k\tilde{N}}}. \quad (10)$$

Таким образом, наибольший относительный среднеквадратичный уровень побочных максимумов во всех рассмотренных режимах зависит только от суммарного числа \tilde{N} прозрачных и непрозрачных элементов в каждой строке растров и числа k строк. Заметим, что монохроматору с растрами в виде хаотически распределенных щелей [7] соответствует параметр $k=1$. При достаточно больших значениях \tilde{N} и k относительный среднеквадратичный уровень побочных максимумов мал. Например, при $k=\tilde{N}=100$ он не превышает ~ 0.01 величины центральных максимумов. Как следует из (9), математическое ожидание величин центральных максимумов R_0 и F_0 имеет максимальное значение при $\Theta=0.5$. Поэтому построчно-хаотические растры с произвольной, а не только с позитивно-негативной структурой, обычно характеризуются этим значением параметра Θ . Однако в более общем случае этот параметр может иметь и другие значения, например при наличии ограничений на максимальный или средний уровень светового потока на входе приемника излучения. На рис. 2 схематично изображены АФ монохроматора с построчно-хаотическими растрами в режиме без модуляции и (без учета высокочастотной составляющей) в режиме селективной модуляции при значении параметра $\Theta=0.5$.

2. Оценим выигрыш в отношении сигнал—шум, получаемый в результате использования спектрометров с построчно-хаотическими растрами в режиме селективной модуляции вместо щелевых спектрометров. Для этого удобно [12] АФ растрового монохроматора (рис. 2) представить в виде суммы двух слагаемых, первое из которых представляет ее узкий центральный максимум, а второе слагаемое — совокупность ее побочных максимумов. Известно, что если источник излучения характеризуется создаваемой им в плоскости входной апертуры спектрометра освещенностью $E(\lambda)$, то на выходе монохроматора спектр представляет собой сверку АФ с функцией $E(\lambda)$. Результатом сверки $E(\lambda)$ с первым слагаемым является функция $E'(\lambda') \simeq AE(\lambda)$, где A — определяемая выражением (9) амплитуда центрального максимума АФ. При этом $E'(\lambda')$ отличается от спектра на выходе щелевого монохроматора с таким же пределом разрешения только постоянным множителем A . Результатом сверки $E(\lambda)$ со вторым слагаемым АФ является случайная функция $h(\lambda')$, которую в первом приближении можно рассматривать как собственный аддитивный белый шум монохроматора с дисперсией [12, 13]

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \frac{N^2}{\Delta^2} \int_{-\infty}^{\infty} E(\lambda) d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} E(\lambda') B(\Delta\lambda) d\lambda' \simeq \varepsilon_0 \frac{N}{\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} E^2(\lambda) d\lambda, \quad (11)$$

где Δ — спектральный диапазон работы монохроматора, $N = \Delta/\delta\lambda$ — число разрешаемых спектральных интервалов, $B(\Delta\lambda)$ — нормированная функция корреляции второго из выделенных слагаемых АФ с интервалом корреляции $\sim \delta\lambda$, а ε_0 — усредненная по j дисперсия побочных максимумов АФ монохроматора.

Под отношением сигнал—шум здесь будем понимать отношение максимального значения $E'_{\max} \simeq AE_{\max}$ функции $E'(\lambda')$ к среднеквадратичному уровню шума, полагая при этом, что, кроме собственного шума монохроматора, в спектрометре действует аддитивный не зависящий от уровня сигналов белый шум приемника излучения с дисперсией ε . Тогда выигрыш в отношении сигнал—шум, получаемый при использовании спектрометров с построчно-хаотическими растрами, равен

$$\mu = A(2\rho + \varepsilon_0^2/E_{\max}^2)^{-1/2} = A(2\rho + \varepsilon_0^2\Phi)^{-1/2}, \quad (12)$$

где $A = M(F_0)$ или $A = I_0$ и $\varepsilon_0 = D(F_j) = 2\bar{D}(\bar{F}_j)$ или $\varepsilon_0 = \bar{D}(I_j) = 4\bar{D}(\bar{F}_j)$ соответственно при использовании построчно-хаотических растров с произвольной или позитивно-негативной структурой, $\Phi = (\Delta E_{\max}^2)^{-1} N \int_{-\infty}^{\infty} E^2(\lambda) d\lambda$,

$\mu_0 = E_{\max} \varepsilon^{-1/2}$ — отношение сигнал—шум на выходе щелевого спектрометра с пределом разрешения $\delta\lambda$. Коэффициент $\rho = 3$ [14] учитывает проигрыш в отношении сигнал—шум из-за применения в рассматриваемом режиме треугольной по форме модуляции лучистого потока. Заметим, что при спектральном анализе по дифференциальной схеме без селективной модуляции, но с двумя приемниками излучения [9], отношение сигнал—шум также определяется выражением (12) с параметром $\rho = 1$. Из выражения (12) следует, что получаемый выигрыш в отношении сигнал—шум через параметр $1 \leq \Phi \leq N$ зависит от структуры анализируемых спектров. Верхнее предельное значение параметра Φ при этом соответствует сплошному спектру, а нижнее предельное значение — одиночной линии. Теперь остается определить среднюю по $j = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \max[N, \bar{N}]$ дисперсию $\bar{D}(\bar{F}_j)$ случайной величины \bar{F}_j . Для этого предположим, что переменные λ и λ' являются непрерывными случайными величинами, распределенными по закону равномерной плотности. Тогда непрерывная случайная величина $\Delta\lambda$ в интервале $[(1-N)\delta\lambda, (N-1)\delta\lambda]$ распределена по закону Симпсона [10]. При этом условии законы рас-

пределения дискретных случайных величин j и $|j|$ имеют вид (13)

$$P(j) = (N - |j|)/N^2, \quad P(|j|) = 2(N - |j|)/N^2. \quad (13)$$

Производя усреднение выражения (6), при $m \gg 1$ получаем окончательно

$$\bar{D}(\bar{F}_j) = \sum_{i=1}^{\max\{N, \bar{N}\}} P(|j|) D(\bar{F}_j) \approx \frac{\theta^2 \bar{N} \varphi (1 - \theta)}{6k} [2(3 - \varphi) - \theta(4 - \varphi)], \quad (14)$$

где $\varphi = \bar{N}/N$ при $\bar{N} < N$ и $\varphi = 1$ при $\bar{N} \geq N$.

Следует отметить, что АФ каждого конкретного спектрометра с построчно-хаотическими растрами известна или может быть измерена. Это открывает возможность для апостериорной коррекции получаемых спектров. Очевидно, что полученная здесь оценка не учитывает этой возможности, представляющей известную самостоятельную задачу оптотехники.

На рис. 3 представлены графики зависимости выигрыша в отношении сигнал—шум от параметров μ_0 и Φ для режима селективной модуляции с растрами произвольной структуры. При использовании растров с по-

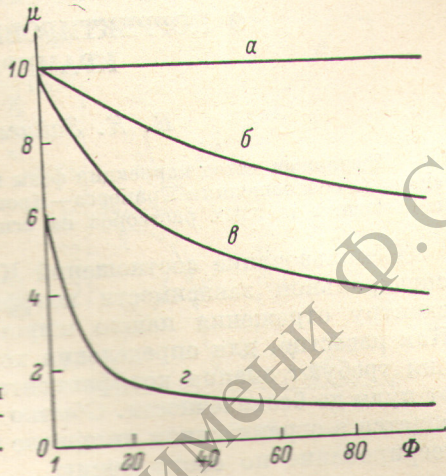


Рис. 3. Выигрыш в отношении сигнал—шум в режиме селективной модуляции с произвольными растрами ($\theta=0.5$; $\varphi=1$; $\bar{N}=k=100$).
 $a - \mu_0=0.1$, $б - \mu_0=1$, $в - \mu_0=2$, $г - \mu_0=10$.

зитивно-негативной структурой приводимые на рис. 3 значения выигрыша в 1.4÷2 раза занижены. Из графиков рис. 3 следует, что наличие побочных максимумов приводит к уменьшению, а при низком уровне шума приемников излучения и насыщенных спектрах — к отсутствию преимуществ спектрометров с построчно-хаотическими растрами перед щелевыми спектрометрами. Это тем более справедливо, поскольку здесь не учитывался рост абберационных и других искажений, которым сопровождается увеличение площади входной апертуры монохроматора. Кроме того, растровые спектрометры, как правило, требуют применения приемников с большей площадью чувствительной поверхности, чем щелевые спектрометры. Это также приводит к уменьшению выигрыша в отношении сигнал—шум.

Литература

- [1] J. Moret-Bailly, J. Cadot. *Compt. Rend.*, 263, B681, 1966.
- [2] J. Cadot, R. Vregier, P. Lepage. *Compt. Rend.*, 263, B732, 1966.
- [3] К. Н. Чиков, В. С. Ильин, В. В. Гуд, В. Н. Попов. *Приборостроение*, № 7, 102, 1972.
- [4] К. Н. Чиков, В. С. Ильин, В. В. Гуд, В. Н. Попов. *Приборостроение*, № 4, 111, 1974.
- [5] К. И. Тарасов. *Спектральные приборы*. «Машиностроение», Л., 1968.
- [6] Ю. А. Толмачев. *Новые спектральные приборы*. Л., 1976.
- [7] С. М. Горский, В. А. Зверев, Г. К. Иванова. В сб.: *Новая техника в астрономии*. «Наука», Л., 1970.
- [8] Д. А. Новик. *Опт. и спектр.*, 34, 554, 1973.
- [9] А. Жирар. В сб.: *Инфракрасная спектроскопия высокого разрешения*. «Мир», М., 1972.
- [10] Г. Г. Абезгауз, А. П. Тронь, Ю. Н. Копенкин, И. Н. Корovina. *Справочник по вероятностным расчетам*. Изд. МО СССР, М., 1970.
- [11] В. В. Гнеденко. *Курс теории вероятностей*. Физматгиз, М., 1961.
- [12] Ю. С. Бухонин. *Тез. докл. IV Всесоюз. конф. ФОПИЛИ*, Киев, 1976.
- [13] А. А. Харкевич. *Борьба с помехами*. «Наука», М., 1965.
- [14] Н. С. Шестов. *Выделение оптических сигналов на фоне случайных помех*. «Сов. радио», М., 1967.

Поступило в Редакцию 5 октября 1977 г.