УДК 535.41

МАТРИЦА ИНТЕРФЕРЕНЦИИ 4×4 ГИРОТРОПНОГО СЛОЯ

И. М. Минков

Выводится явное выражение для матрицы интерференции слоя, обладающего линейным магнито-оптическим эффектом (эффект Фарадея) или естественной оптической активностью.

В последнее время усилился интерес к теоретическим вопросам прохождения света через слоистые гиротропные среды [1–7]. Это вызвано широким использованием таких сред в различных оптических устройствах, прецизионный характер которых не позволяет пренебрегать в расчетах интерференционными эффектами, обусловленными многократными отражениями света на границах слоев (пластинок).

В [1–4] прохождение света через гиротропные слоистые среды рассматривалось в предположении, что толщина каждого слоя значительно больше длины световой волны и поэтому интерференционные явления отсутствуют (складываются только интенсивности света, многократно отраженного от границ слоя). Строгое рассмотрение прохождения света через пластинку, вырезанную из оптически активного кристалла, относящегося к аксиальным классам средних сингоний, было проделано в работах [5–7], но только для нормального падения света. В [8] была сделана попытка решения задачи, указанной в заглавии, однако явного выражения для 4×4 матрицы интерференции слоя в [8] приведено не было, а только намечен способ ее получения, что, разумеется, затрудняет использование полученных результатов.

В настоящей работе выводится явное выражение 4×4 матрицы интерференции для слоя, обладающего линейным магнито-оптическим эффектом (эффект Фарадея) или естественной оптической активностью. Сам слой предполагается или изотропным, или кристаллом кубической симметрии. Как показано в [9], знание элементов матрицы интерференции позволяет без труда определять оптические характеристики (отражение, пропускание) слоистой системы, состоящей из подобных слоев. Вместе с результатами, полученными в [9, 10], это дает возможность легко вычислять также оптические характеристики для сложных слоистых систем, в которых часть слоев обладает анизотропией одноосного оптически неактивного кристалла, а другая часть гиротропна.

Постановка задачи и обозначения

Пусть гиротропный слой ограничен плоскостями $x=0$ и $x=d$, а плоская световая волна распространяется под любым острым углом к положительному направлению оси ox, которая нормальна границам слоя. Ось oy ориентирована таким образом, чтобы плоскость xoy совпадала с плоскостью падения. В гиротропной среде индукция $\mathbf{D}$ и напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ связаны соотношением [11] [1]

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + i\,[\mathbf{E},\ \mathbf{g}]. \tag{1}$$

[1] Использование другой формы уравнений связи между векторами поля [12, 13] применительно к рассматриваемому случаю приводит практически к тем же результатам [6].

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Здесь ε — диэлектрическая проницаемость, $\mathbf{g}$ — вектор гирации. В случае магнитоактивной среды

$$\mathbf{g} = f\mathbf{H}_0, \tag{2}$$

где $\mathbf{H}_0$ — напряженность внешнего магнитного поля, f — коэффициент, пропорциональный постоянной Верде.

При естественной оптической активности

$$\mathbf{g} = F\mathbf{m}, \tag{3}$$

где F — коэффициент пропорциональности, а $\mathbf{m}$ — вектор рефракции, который по направлению совпадает с вектором волновой нормали, а по модулю равен показателю преломления n.

Между векторами поля в плоской волне (при $\mu = 1$) имеют место соотношения [11]

$$\mathbf{H} = [\mathbf{m},\ \mathbf{E}], \quad \mathbf{D} = -[\mathbf{m},\ \mathbf{H}]. \tag{4}$$

Подставляя первую из формул (4) во вторую и используя (1), получаем

$$\varepsilon\mathbf{E} + i\,[\mathbf{E},\ \mathbf{g}] = n^2\mathbf{E} - \mathbf{m}\,(\mathbf{m}\mathbf{E}). \tag{4'}$$

Условие существования нетривиального решения (4') приводит к уравнению волновых нормалей

$$(n^2 - \varepsilon)^2 + (n^2 - \varepsilon)\frac{(\mathbf{g},\ \mathbf{g})}{\varepsilon} - \frac{(\mathbf{m},\ \mathbf{g})^2}{\varepsilon} = 0. \tag{5}$$

Так как обычно $|\mathbf{g}|$ на несколько порядков меньше $\sqrt{\varepsilon}$, то в (5) можно положить в членах, содержащих $\mathbf{g}$,

$$n = \sqrt{\varepsilon}, \quad \mathbf{m} = \mathbf{m}_\varepsilon.$$

Тогда уравнение (5) перепишется в виде

$$(n^2 - \varepsilon)^2 = (\mathbf{m}_\varepsilon^{\pm},\ \mathbf{g})^2/\varepsilon. \tag{5'}$$

Здесь $\mathbf{m}_\varepsilon = \pm u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$ — вектор рефракции прямой и обратной волн при отсутствии оптической активности, $v = n_0 \sin\theta_0$, где n_0 — показатель преломления, а θ_0 — угол падения в среде, из которой свет падает на слоистую систему, $u = \sqrt{\varepsilon - v^2}$.

Как в прямом, так и в обратном направлении в гиротропном слое будут распространяться две циркулярно-поляризованные плоские волны с противоположными направлениями вращения светового вектора. Их векторы рефракции запишутся в виде

$$\mathbf{m}_{1,\,2}^{+} = u_{1,\,2}^{+}\mathbf{i} + v\mathbf{j}, \quad \mathbf{m}_{1,\,2}^{-} = u_{1,\,2}^{-}\mathbf{i} + v\mathbf{j}, \tag{6}$$

где $u_{1,\,2}^{\pm}$ и $n_{1,\,2}^{\pm}$ в соответствии с (5') определяются равенствами

$$u_{1,\,2}^{+} = \sqrt{\varepsilon - v^2 \pm \left(\frac{ug_x + vg_y}{\sqrt{\varepsilon}}\right)}, \quad u_{1,\,2}^{-} = -\sqrt{\varepsilon - v^2 \pm \left(\frac{-ug_x + vg_y}{\sqrt{\varepsilon}}\right)},$$

$$n_{1,\,2}^{\pm} = \sqrt{(u_{1,\,2}^{\pm})^2 + v^2}. \tag{7}$$

Знак перед круглой скобкой в выражениях для $u_{1,\,2}^{\pm}$ следует выбирать так, чтобы при положительном f бóльшему значению $u_{1,\,2}^{+}$ и $|u_{1,\,2}^{-}|$ соответствовала циркулярно-поляризованная волна, в которой направление вращения светового вектора связано правилом буравчика с проекцией магнитного поля $\mathbf{H}_0$ на направление распространения. В случае естественной оптической активности больший показатель преломления соответствует волне, в которой направление вращения светового вектора совпадает с вращением плоскости поляризации линейно поляризованной волны.

При изучении эффекта Фарадея ограничимся рассмотрением наиболее интересных с практической точки зрения случаев, когда свет падает нормально на слоистую систему ($v=0$) или когда магнитное поле перпенди-

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

кулярно границе слоя ($g_y = 0$). Тогда в соответствии с (7) имеют место равенства

$$u_1^- = -u_2^+, \quad u_2^- = -u_1^+. \tag{7'}$$

Принимая во внимание (3) и (7), легко видеть, что при естественной оптической активности для любых углов падения света имеют место соотношения

$$u_1^- = -u_1^+, \quad u_2^- = -u_2^+. \tag{7''}$$

Матрица интерференции гиротропного слоя

Комплексный вектор диэлектрической индукции право- и лево- поляризованных волн запишется соответственно в виде [2]

$$\mathbf{D}_1^{\pm} = D_1^{\pm}(\mathbf{d}_1^{\pm} + i\mathbf{b}_1^{\pm}), \quad \mathbf{D}_2^{\pm} = D_2^{\pm}(\mathbf{d}_2^{\pm} - i\mathbf{b}_2^{\pm}). \tag{8}$$

Здесь **d** и **b** — вещественная и мнимая составляющие унитарного по модулю комплексного вектора ([14], стр. 74) ($|\mathbf{d}| = |\mathbf{b}| = \sqrt{2}/2$), причем **m**, **d**, **b** взаимно ортогональны и образуют правовинтовую связку. $\mathbf{d}_1^{\pm}$ и $\mathbf{b}_2^{\pm}$ направлены вдоль положительного направления оси oz, $D_{1,2}^{\pm}$ — комплексная длина вектора диэлектрической индукции.[3] Выражение для векторов напряженности магнитного поля находится с помощью второго из уравнений (4)

$$\mathbf{H}_1^{\pm} = \frac{\mathbf{D}_1^{\pm}}{n_1^{\pm}}(\mathbf{b}_1^{\pm} - i\mathbf{d}_1^{\pm}), \quad \mathbf{H}_2^{\pm} = \frac{\mathbf{D}_2^{\pm}}{n_2^{\pm}}(\mathbf{b}_2^{\pm} + i\mathbf{d}_2^{\pm}). \tag{9}$$

Касательные составляющие **H** и **D**, полученные из (8) и (9), сведены в таблицу (в таблице множитель $\sqrt{2}/2$ включен в $D_{1,2}^{\pm}$). С точностью до членов порядка $|\mathbf{g}|/\sqrt{\varepsilon}$ ($|\mathbf{g}|/\sqrt{\varepsilon} \leqslant 10^{-3}$) можно в выражениях для касательных составляющих векторов поля положить

$$|u_1^{\pm}| \approx |u_2^{\pm}| \approx u, \quad n_1^{\pm} \approx n_2^{\pm} \approx \sqrt{\varepsilon}. \tag{10}$$

Допуская ту же погрешность, будем при определении касательных составляющих E считать

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}. \tag{11}$$

Возможность подобных упрощений обусловлена тем, что гирационный эффект существенно проявляется лишь в сдвиге фаз между двумя ортогональными циркулярно-поляризованными волнами. Поэтому в соответствующих выражениях для набега фазы (15) (16) будут использованы точные значения $u_{1,2}^{\pm}$ из (7).

Заметим, что упрощающие допущения (10) (11), вообще говоря, не являются обязательными, но они позволяют получить более простой по форме результат, с достаточной для практических целей точностью.

Так же как и в [9], введем в рассмотрение одностолбцовые матрицы (векторы) Q_1 и Q_2, элементами которых служат суммы проекций векторов поля **E** и **H** прямой и обратной волн на первую и вторую по ходу света границы слоя. По определению

$$Q_1 = \begin{pmatrix} \tilde{E}_{z1} \\ -\tilde{H}_{y1} \\ \tilde{E}_{y1} \\ \tilde{H}_{z1} \end{pmatrix}, \qquad Q_2 = \begin{pmatrix} \tilde{E}_{z2} \\ -\tilde{E}_{y2} \\ \tilde{E}_{y2} \\ \tilde{H}_{z2} \end{pmatrix}, \tag{12}$$

[2] В правоциркулярно-поляризованной волне конец светового вектора вращается по часовой стрелке, если наблюдатель смотрит навстречу лучу.

[3] Комплексной длиной вектора называется комплексное число, стоящее перед унитарным комплексным вектором (в данном случае $\mathbf{d}_1^{\pm} + i\mathbf{b}_1^{\pm}$ и $\mathbf{d}_2^{\pm} - i\mathbf{b}_2^{\pm}$ ([15], стр. 236).

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

где волна над буквой означает, что берутся суммы проекций. Используя выражения для проекций через числа $D_1^\pm$ и $D_2^\pm$, приведенные в таблице, получаем

	y	z		y	z
$\mathbf{H}_1^\pm$	$-D_1^\pm \frac{u_1^\pm}{(n_1^\pm)^2}$	$-iD_1^\pm \frac{1}{n_1^\pm}$	$\mathbf{D}_1^\pm$	$-iD_1^\pm \frac{u_1^\pm}{n_1^\pm}$	$D_1^\pm$
$\mathbf{H}_2^\pm$	$D_2^\pm \frac{u_2^\pm}{(n_2^\pm)^2}$	$D_2^\pm \frac{1}{n_2^\pm}$	$\mathbf{D}_2^\pm$	$D_2^\pm \frac{u_2^\pm}{n_2^\pm}$	$-iD_2^\pm$

$$Q_2 = P * C, \quad Q_1 = P * U * C, \tag{13}$$

где

$$C = \begin{pmatrix} D_1^+ \\ D_1^- \\ D_2^+ \\ D_2^- \end{pmatrix}.$$

Матрица P с учетом данных таблицы и (7′), (7″), (10), (11) запишется в виде

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & \frac{1}{\varepsilon} & -i\frac{1}{\varepsilon} & -i\frac{1}{\varepsilon} \\ \frac{u}{\varepsilon} & -\frac{u}{\varepsilon} & -i\frac{u}{\varepsilon} & i\frac{u}{\varepsilon} \\ -i\frac{u}{\sqrt{\varepsilon^3}} & i\frac{u}{\sqrt{\varepsilon^3}} & \frac{u}{\sqrt{\varepsilon^3}} & -\frac{u}{\sqrt{\varepsilon^3}} \\ -i\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} & -i\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} & \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} & \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \end{pmatrix}, \tag{14}$$

а U — диагональная матрица набега фазы будет зависеть от вида гиротропии в слое. В случае естественной оптической активности элементы матрицы набега фазы U в соответствии с (7″) запишутся в виде

$$U_{11} = e^{i\Omega_1}, \quad U_{22} = e^{-i\Omega_1}, \quad U_{33} = e^{i\Omega_2}, \quad U_{44} = e^{-i\Omega_2}. \tag{15}$$

При эффекте Фарадея ($v = 0$ или $g_y = 0$)[4] с учетом (7′)

$$U_{11} = e^{i\Omega_1}, \quad U_{22} = e^{-i\Omega_2}, \quad U_{33} = e^{i\Omega_2}, \quad U_{44} = e^{-i\Omega_1}. \tag{16}$$

В (15) и (16) $\Omega_1 = 2\pi u_1^+ d/\lambda$, $\Omega_2 = 2\pi u_2^+ d/\lambda$, а λ — длина волны падающего света.

Умножая первое из равенств (13) на матрицу P^{-1}, обратную P, имеем

$$C = P^{-1} * Q_2. \tag{17}$$

Подставив это соотношение во второе из равенств (13) получим выражение, связывающее касательные составляющие векторов поля на обеих границах слоя

$$Q_1 = P * U * P^{-1} * Q_2, \tag{18}$$

[4] Если условия $v=0$ или $g_y=0$ не выполняются, то элементами матрицы набега фазы U_{22} и U_{44} будут величины $e^{i\frac{2\pi}{\lambda}u_1^- d}$ и $e^{i\frac{2\pi}{\lambda}u_2^- d}$. Соответственно усложнится и выражение для матрицы интерференции.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ имени Ф. Скорины

где $M = P * U * P^{-1}$ — искомая матрица интерференции гиротропного слоя. Нетрудно убедиться, что явное выражение для P^{-1} запишется в виде

$$P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \varepsilon & \frac{\varepsilon}{u} & i\frac{\sqrt{\varepsilon^3}}{u} & i\sqrt{\varepsilon} \\ \varepsilon & -\frac{\varepsilon}{u} & -i\frac{\sqrt{\varepsilon^3}}{u} & i\sqrt{\varepsilon} \\ i\varepsilon & i\frac{\varepsilon}{u} & \frac{\sqrt{\varepsilon^3}}{u} & \sqrt{\varepsilon} \\ i\varepsilon & -i\frac{\varepsilon}{u} & -\frac{\sqrt{\varepsilon^3}}{u} & \sqrt{\varepsilon} \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Оно используется при построении матрицы преломления, когда подложка гиротропна (подобно тому, как это было сделано в [9] в случае анизотропной подложки).

Явное выражение для M в соответствии с (14), (15), (16), (19) запишется для слоя с естественной оптической активностью в виде

$$M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos\Omega_1 + \cos\Omega_2 & \frac{i}{u}(\sin\Omega_1 + \sin\Omega_2) & -\frac{\sqrt{\varepsilon}}{u}(\sin\Omega_1 - \sin\Omega_2) & \frac{i}{\sqrt{\varepsilon}}(\cos\Omega_1 - \cos\Omega_2) \\ iu(\sin\Omega_1 + \sin\Omega_2) & \cos\Omega_1 + \cos\Omega_2 & i\sqrt{\varepsilon}(\cos\Omega_1 - \cos\Omega_2) & -\frac{u}{\sqrt{\varepsilon}}(\sin\Omega_1 - \sin\Omega_2) \\ \frac{u}{\sqrt{\varepsilon}}(\sin\Omega_1 - \sin\Omega_2) & -\frac{i}{\sqrt{\varepsilon}}(\cos\Omega_1 - \cos\Omega_2) & \cos\Omega_1 + \cos\Omega_2 & i\frac{u}{\varepsilon}(\sin\Omega_1 + \sin\Omega_2) \\ -i\sqrt{\varepsilon}(\cos\Omega_1 - \cos\Omega_2) & \frac{\sqrt{\varepsilon}}{u}(\sin\Omega_1 - \sin\Omega_2) & i\frac{\varepsilon}{u}(\sin\Omega_1 + \sin\Omega_2) & \cos\Omega_1 + \cos\Omega_2 \end{pmatrix}, \tag{20}$$

а для слоя с линейным магнитооптическим эффектом (эффект Фарадея)

$$M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos\Omega_1 + \cos\Omega_2 & \frac{i}{u}(\sin\Omega_1 + \sin\Omega_2) & i\frac{\sqrt{\varepsilon}}{u}(\cos\Omega_1 - \cos\Omega_2) & -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}(\sin\Omega_1 - \sin\Omega_2) \\ iu(\sin\Omega_1 + \sin\Omega_2) & \cos\Omega_1 + \cos\Omega_2 & -\sqrt{\varepsilon}(\sin\Omega_1 - \sin\Omega_2) & i\frac{u}{\sqrt{\varepsilon}}(\cos\Omega_1 - \cos\Omega_2) \\ -i\frac{u}{\sqrt{\varepsilon}}(\cos\Omega_1 - \cos\Omega_2) & \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}(\sin\Omega_1 - \sin\Omega_2) & \cos\Omega_1 + \cos\Omega_2 & i\frac{u}{\varepsilon}(\sin\Omega_1 + \sin\Omega_2) \\ \sqrt{\varepsilon}(\sin\Omega_1 - \sin\Omega_2) & -i\frac{\sqrt{\varepsilon}}{u}(\cos\Omega_1 - \cos\Omega_2) & i\frac{\varepsilon}{u}(\sin\Omega_1 + \sin\Omega_2) & \cos\Omega_1 + \cos\Omega_2 \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Чтобы получить выражение для M при отсутствии интерференции (M в данном случае уместнее называть матрицей передачи), следует в матрице U положить нулю члены, определяющие набег фазы обратной волны, т. е. U_{22} и U_{44}. Выражение для M, одинаковое для обеих форм гиротропии, запишется в виде

$$M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} e^{i\Omega_1} + e^{i\Omega_2} & \frac{1}{u}(e^{i\Omega_1} + e^{i\Omega_2}) & i\frac{\sqrt{\varepsilon}}{u}(e^{i\Omega_1} - e^{i\Omega_2}) & i\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}(e^{i\Omega_1} - e^{i\Omega_2}) \\ u(e^{i\Omega_1} + e^{i\Omega_2}) & e^{i\Omega_1} + e^{i\Omega_2} & i\sqrt{\varepsilon}(e^{i\Omega_1} - e^{i\Omega_2}) & i\frac{u}{\sqrt{\varepsilon}}(e^{i\Omega_1} - e^{i\Omega_2}) \\ -i\frac{u}{\sqrt{\varepsilon}}(e^{i\Omega_1} - e^{i\Omega_2}) & -i\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}(e^{i\Omega_1} - e^{i\Omega_2}) & e^{i\Omega_1} + e^{i\Omega_2} & \frac{u}{\varepsilon}(e^{i\Omega_1} + e^{i\Omega_2}) \\ -i\sqrt{\varepsilon}(e^{i\Omega_1} - e^{i\Omega_2}) & -i\frac{\sqrt{\varepsilon}}{u}(e^{i\Omega_1} - e^{i\Omega_2}) & \frac{\varepsilon}{u}(e^{i\Omega_1} + e^{i\Omega_2}) & e^{i\Omega_1} + e^{i\Omega_2} \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Последнее выражение для M можно использовать, когда в слое по каким-либо причинам (например, большое поглощение) можно пренебречь интерференционными эффектами.

Литература

[1] В. Д. Тронько. Опт. и спектр., *26*, 484, 1969.
[2] В. Д. Тронько. Опт. и спектр., *29*, 354, 1970.
[3] В. Д. Тронько. Опт. и спектр., *30*, 739, 1971.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

[4] В. Д. Тронько, Г. П. Головач. Опт. и спектр., *37*, 959, 1974.
[5] Ф. И. Федоров, А. Ф. Константинова. Опт. и спектр., *12*, 407, 505, 1962.
[6] Б. В. Бокуть, А. Ф. Константинова, А. Н. Сердюков. Кристаллография, *17*, 4, 1972.
[7] Л. М. Барковский, Ф. И. Федоров. Опт. и спектр., *36*, 1140, 1974.
[8] W. D. Berreman. J. Opt. Soc. Am., *62*, 502, 1972.
[9] И. М. Минков. Опт. и спектр., *37*, 309, 1974.
[10] В. В. Веремей, Т. А. Горбунова, И. М. Минков. Опт. и спектр., *38*, 390, 1975.
[11] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. ГИТТЛ, М., 1957.
[12] Б. В. Бокуть, А. Н. Сердюков, Ф. И. Федоров. Кристаллография, *15*, 1002, 1970.
[13] Б. В. Бокуть, А. Н. Сердюков. ЖЭТФ, *61*, 1808, 1971.
[14] Г. В. Розенберг. Оптика тонкослойных покрытий. М., 1958.
[15] Э. Маделунг. Математический аппарат физики. М., 1960.

Поступило в Редакцию 26 марта 1975 г.
В окончательной редакции 25 декабря 1977 г.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ