МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С H_σ-СУБНОРМАЛЬНО ВЛОЖЕННЫМИ ПОДГРУППАМИ

Д.А. Синица[1], А.Н. Скиба[1], В. Го[2], Чи Чжан[2]

[1]*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины*
[2]*Университет науки и технологии Китая, Хэфэй*

FINITE GROUPS WITH H_σ-SUBNORMALLY EMBEDDED SUBGROUPS

D.A. Sinitsa[1], A.N. Skiba[1], W. Guo[2], Chi Zhang[2]

[1]*F. Scorina Gomel State University*
[2]*University of Science and Technology of China, Hefei*

Пусть *G* – конечная группа. Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – разбиение множества всех простых $\mathbb{P}$ и *n* целое. Обозначим $\sigma(n) = \{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(n) \neq \varnothing\}$, $\sigma(G) = \sigma(|G|)$. Множество $1 \in \mathcal{H}$ подгрупп группы *G* называется *полным холловым* σ*-множеством* группы *G*, если каждый член $\neq 1$ в $\mathcal{H}$ является холловой σ_i-подгруппой группы *G* для некоторого σ_i и $\mathcal{H}$ содержит точно одну холлову σ_i-подгруппу *G* для каждого $\sigma_i \in \sigma(G)$. Подгруппа *H* группы *G* называется σ*-холловой подгруппой G*, если $\sigma(|H|) \cap \sigma(|G:H|) = \varnothing$. Подгруппа *A* группы *G* называется H_σ*-субнормально вложенной* в *G*, если *A* является σ-холловой подгруппой некоторой σ-субнормальной подгруппы группы *G*.

Ключевые слова: *конечная группа*, σ*-субнормальная подгруппа*, σ*-перестановочная подгруппа*, σ*-холлова подгруппа*, H_σ*-субнормально вложенная подгруппа.*

Let *G* be a finite group. Let $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ be a partition of the set of all primes $\mathbb{P}$ and *n* an integer. We write $\sigma(n) = \{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(n) \neq \varnothing\}$, $\sigma(G) = \sigma(|G|)$. A set $\mathcal{H}$ of subgroups of *G* is said to be a *complete Hall* σ*-set* of *G* if every member of $\mathcal{H} \setminus \{1\}$ is a Hall σ_i-subgroup of *G* for some σ_i and $\mathcal{H}$ contains exact one Hall σ_i-subgroup of *G* for every $\sigma_i \in \sigma(G)$. A subgroup *A* of *G* is called a σ*-Hall subgroup* of *G* if $\sigma(|A|) \cap \sigma(|G:A|) = \varnothing$. We say that a subgroup *A* of *G* is H_σ*-subnormally embedded* in *G* if *A* is a σ-Hall subgroup of some σ-subnormal subgroup of *G*.

Keywords: *finite group*, σ*-subnormal subgroup*, σ*-permutable subgroup*, σ*-Hall subgroup*, H_σ*-subnormally embedded subgroup.*

Введение

На протяжении всей работы все группы конечны и *G* всегда обозначает конечную группу. Более того, $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, $\pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. Если *n* – целое число, символ $\pi(n)$ обозначает множество всех простых чисел, делящих $|n|$; как обычно, $\pi(G) = \pi(|G|)$ – множество всех простых чисел, делящих порядок *G*.

В дальнейшем, $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – некоторое разбиение $\mathbb{P}$, такое что, $\mathbb{P} = \cup_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$.

Пусть $\sigma(n) = \{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(n) \neq \varnothing\}$ и $\sigma(G) = \sigma(|G|)$. Тогда *G* является σ*-примарной* [1], [2], если *G* – σ_i-группа для некоторого $\sigma_i \in \sigma$.

Множество $1 \in \mathcal{H}$ подгрупп группы *G* называется полным холловым σ-множеством *G* [3], если каждый член $\neq 1$ в $\mathcal{H}$ является холловой σ_i-подгруппой группы *G* для некоторого σ_i и $\mathcal{H}$ содержит точно одну холлову σ_i-подгруппу *G* для каждого $\sigma_i \in \sigma(G)$. Если группа *G* обладает полным холловым σ-множеством, то *G* является σ-полной. На протяжении всей работы *G* всегда должна быть σ-полной группой.

Подгруппа A группы *G* называется [1], [2]:

(i) σ-холловой подгруппой *G*, если

$$\sigma(|A|) \cap \sigma(|G:A|) = \varnothing;$$

(ii) σ-субнормальной в *G*, если существует цепь подгрупп $A = A_0 \leq A_1 \leq \ldots \leq A_t = G$ такая, что либо A_{i-1} является нормальной в A_i или $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ является σ-примарной для всех $i = 1, \ldots, t$.

Определение. Подгруппа *A* группы *G* называется H_σ*-субнормально вложенной* (соответственно H_σ*-перестановочно вложенной*) в *G*, если A является σ-холловой подгруппой некоторой

σ-субнормальной подгруппы (соответственно σ-перестановочной подгруппы) группы G.

Напомним, что G σ*-нильпотентна* [4], если $G = H_1 \times \cdots \times H_t$, для некоторых σ-примарных групп $H_1, \ldots, H_t$. Символ $G^{\mathfrak{N}_\sigma}$ обозначает σ*-нильпотентный* корадикал группы G, т. е. пересечение всех нормальных подгрупп N группы G с σ-нильпотентным фактором G/N.

Группа G называется σ*-разрешимой* [1], [2], если каждый главный фактор G σ-примарен.

Пусть $\mathfrak{F}$ – класс групп. Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$-проектором G [5, VI, определение 7.8], если $H \in \mathfrak{F}$ и для каждой подгруппы E группы G такой, что $H \le E$ и $E/N \in \mathfrak{F}$ следует, что $E = NH$. Подгруппа H группы G называется σ*-картеровой подгруппой* G, если H является $\mathfrak{N}_\sigma$-проектором группы G, где $\mathfrak{N}_\sigma$ – класс всех σ-нильпотентных групп.

Говорят, что группа G имеет *силовскую башню*, если G имеет нормальный ряд $1 = G_0 < G_1 < \cdots < G_{t-1} < G_t = G$, где $|G_i / G_{i-1}|$ – порядок некоторой силовской подгруппы группы G для каждого $i \in \{1, \ldots, t\}$. Главный фактор группы G называется σ*-центральным* (в G) [1], если полупрямое произведение $(H/K) \rtimes (G/C_G(H/K))$ является σ-примарным. В противном случае, H/K называется σ*-эксцентральным* (в G).

Группа G называется $H\sigma E$*-группой*, если G является группой вида $G = D \rtimes M$, где $D = G^{\mathfrak{N}_\sigma}$ – σ-холловскская подгруппа группа G с $|\sigma(D)| = |\pi(D)|$ таким, что D имеет силовскую башню и каждый главный фактор группы G ниже D является σ-эксцентральным, M является σ-картеровой подгруппой группы G и M действует непреводимо на каждой M-инвариантной силовской подгруппе группы D.

Нами получены следующие результаты:

***Теорема* 0.1.** *Любые два из следующих условий эквиваленты*:

(i) *Каждая подгруппа группы G является* H_σ*-субнормально вложенной в G.*

(ii) *Каждая* σ*-субнормальная подгруппа H группы G является группой вида* $H = D \rtimes M$, *где* $D = H^{\mathfrak{N}_\sigma}$ *и M–* σ*-картерова подгруппаи группы H.*

(iii) *Каждая* σ*-субнормальная подгруппа группы G является* $H\sigma E$*-группой.*

***Теорема* 0.2.** *Пусть* $\mathcal{H} = \{H_1, \ldots H_t\}$ *– полное холлово* σ*-множество группы G и* $D = G^{\mathfrak{N}_\sigma}$. *Тогда любые два из следующих условий эквивалентны*:

(i) *G имеет* H_σ*-перестановочно вложенную подгруппу порядка* $|A|$ *для каждой подгруппы A группы G.*

(ii) *D – циклическая группа порядка свободного от квадратов и* $|\sigma_i \cap \pi(G)| = 1$ *для каждого* $\sigma_i \in \sigma(D)$.

(iii) *Для каждого множества* $\{A_1, \ldots, A_t\}$, *где* A_i *– подгруппа* (*соответственно нормальная подгруппа*) *группы* H_i *для всех* $i = 1, \ldots, t$, *G имеет* H_σ*-перестановочно вложенную* (*соответственно* H_σ*-нормально вложенную*) *подгруппу порядка* $|A_1| \cdots |A_t|$.

Отметим, что поскольку нильпотентна группа G обладает нормальной подгруппой порядка n для каждого целого n делителя порядка $|G|$, в случае когда $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \ldots\}$, теорема 0.2 покрывает теорему 11 в [6], теорему 2.7 в [7], теоремы 3.1 и 3.2 в [8] и теорему в [9]. Также, из теорем 0.1 и 0.2, в случае когда $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \ldots\}$, следует теорема 3.4 в [7].

***Теорема* 0.3.** *Любые два из следующих условий эквиваленты*:

(i) *Каждая подгруппа группы G является* H_σ*-перестановочно вложенной в G.*

(ii) $G = G^{\mathfrak{N}_\sigma} \rtimes M$ *–* $H\sigma E$*-группа, где* $G^{\mathfrak{N}_\sigma}$ *– циклическая группа порядка свободного от квадратов.*

(iii) $G = D \rtimes M$, *где D –* σ*-холлова циклическая подгруппа группы G порядка свободного от квадратов с* $|\sigma(D)| = |\pi(D)|$ *и M* σ*-нильпотентна.*

В случае когда $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \ldots\}$ теорема 1 в [10] является следствием теоремы 0.3.

1 Доказательство теоремы 0.1

Мы даем набросок доказательства теоремы.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Предположим, что это не так, и пусть G – контрпример минимального порядка. Тогда некоторая σ-субнормальная подгруппа V группы G не является $H\sigma E$-группой. Более того, $D = G^{\mathfrak{N}_\sigma} \ne 1$, так что $|\sigma(G)| > 1$.

(1) *Если* $K \trianglelefteq H \le G$ *и либо* $K \ne 1$, *либо* $H \ne G$, *тогда утверждение* (ii) *верно для* H/K. *Следовательно*, $V = G$ (это прямо следует из леммы 2.7 (1) (2) в [11] и выбора G).

(2) *Если* $|G:H|$ *–* σ_i*-число и* H *не является* σ*-холловой подгруппой группы G, то H* σ*-субнормальна в G и* σ_i*-дополнение* E *группы* H *нормально в G.*

Действительно, поскольку H является H_σ-субнормально вложенной в G по условию, это следует из лемм 2.7 (4) и 2.8 в [11].

(3) *G* σ*-разрешима и* D *разрешима.*

Сначала покажем, что G σ-разрешима. Ввиду утверждения (1) и [11, Лемма 2.5], достаточно показать, что G не проста. Предположим, что это не так. Тогда для силовской p-подгруппы

P группы G, где p – наименьший простой делитель $|G|$, мы имеем $|P|> p$ по [5, IV, 2.8]. Пусть V – максимальная подгруппа группы P. Тогда V не является σ-холловой подгруппой группы G. С другой стороны, V H_σ-субнормально вложена в G и, следовательно, G имеет такую σ-субнормальную подгруппу A, что V – σ-холлова подгруппа группы A. Тогда существует такая цепь подгрупп $A = A_0 \le A_1 \le \cdots \le A_t = G$, что либо $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$, либо $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ является σ-примарной для всех $i = 1,\ldots,t$. Пусть $M = A_{t-1}$. Поскольку V не является σ-холловой подгруппой группы G, $1 < A < G$. Следовательно, мы можем предположить, не теряя общности, что $M < G$. Но G проста, таким образом, $G/M_G = G/1 \simeq G$ σ-примарна и, следовательно, G является σ-разрешимой. Это противоречие показывает, что G σ-разрешима.

Аналогично доказывается, что D разрешима. Следовательно (3) верно.

Проверка показывает, что справедливо следующее утверждение:

(4) *D – холлова подгруппа группы G. Следовательно, D имеет дополнение M в G.*

(5) *Если $M \le E < G$, то E не является σ-субнормальной в G и, следовательно, E – σ-холлова подгруппа группы G.*

Предположим, что E является σ-субнормальной в G. Тогда существует такая цепь подгрупп $E = E_0 \le E_1 \le \cdots \le E_r = G$, где либо $E_{i-1} \trianglelefteq E_i$, либо $E_i / (E_{i-1})_{E_i}$ является σ-примарной для всех $i = 1,\ldots,r$. Пусть $V = E_{r-1}$. Мы можем предположить, не теряя общности, что $V \ne G$ поскольку $E < G$.

Предположим, что V является нормальной подгруппой группы G. Поскольку G σ-разрешима по утверждению (3), G имеет такую нормальную подгруппу K, что $E \le V \le K$ и G/K σ-примарна. Но тогда $D \le K$ и, следовательно, $G = MD = ED \le K < G$, противоречие. Таким образом, V не является нормальной в G, значит G/V_G является σ-примарной и, следовательно, $D \le V_G$. Но тогда $G = MD = ED \le V < G$, противоречие.

Следовательно, E не является σ-субнормальной в G. По условию, G имеет такую σ-субнормальную подгруппу W, что E является σ-холловой подгруппой группы W. Но тогда $W = G$, как и выше, следует, что E является σ-холловой подгруппой группы G. В частности, M является σ-холловой подгруппой группы G и, значит, D является σ-холловой подгруппой группы G.

(6) *$|\sigma(D)| = |\pi(D)|$ и M действует непреводимо на каждой M-инвариантной силовской подгруппе группы D.*

Пусть $p \in \sigma_i \in \sigma(D)$. Тогда из [11, Лемма 2.6] и утверждений (3) и (4) следует, что для некоторой силовской p-подгруппы P группы G мы имеем $PM = MP$. Более того, MP – σ-холлова подгруппа группы G по утверждению (5). Следовательно, $|\sigma_i \cap \pi(G)| = 1$, для всех таких i, что $\sigma_i \cap \pi(D) \ne \varnothing$ и, значит, $|\sigma(D)| = |\pi(D)|$. Таким образом, поскольку D разрешима по утверждению (3), M действует непреводимо на каждой M-инвариантной силовской подгруппе группы D по утверждению (5).

Также проверка показывает, что справедливо

(7) *M – σ-картерова подгруппа группы G и D обладает силовской башней.*

(8) *Каждый главный фактор группы G ниже D является σ-эксцентральным.*

Пусть H/K – главный фактор группы G ниже D. Тогда H/K – p-группа для некоторого простого p по утверждению (6). По аргументу Фратинни, существует такая силовская p-подгруппа P и такое p-дополнение E группы D, что $M \le N_G(P)$ и $M \le N_G(E)$. Тогда

$$M \le N_G(P \cap K) \text{ и } M \le N_G(P \cap H).$$

Следовательно, $P \cap K = 1$ и $P \cap H = P$ по утверждению (6), поэтому $H = K \rtimes P$. Пусть $V = EM$. Тогда $K \le V$ и $HV = G$, значит V – максимальная подгруппа группы G. Следовательно, $G/V_G \simeq (H/K) \rtimes (G/C_G(H/K))$ по [11, Лемма 2.9]. Следовательно, если H/K σ-центральна, тогда $D \le V_G$, что невозможно, поскольку, очевидно, p не делит $|V|$. Таким образом мы имеем (8).

Из утверждений (4)–(8) следует, что G является $H\sigma E$-группой, вопреки нашему предположению, что $G = V$. Следовательно, (i) $\Rightarrow$ (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Эта имплекация очевидна.

(iii) $\Rightarrow$ (i) По условию, $G = D \rtimes M$, где $D = G^{\mathfrak{N}_\sigma}$ – σ-холлова подгруппа группы G, $|\sigma(D)| = |\pi(D)|$ и M действует непреводимо на каждой M-инвариантной силовской подгруппе группы D.

Несложно показать, что следующее утверждение верно:

(*) *Каждая подгруппа A группы G содержащая M является σ-холловой подгруппой группы G.*

Теперь, пусть A – подгруппа группы G. Сначала, предположим, что $DA < G$. По лемме 2.1 (6) в [11], DA σ-субнормальна в G. Таким образом, каждая σ-субнормальная подгруппа группы DA также является σ-субнормальной в G. Следовательно, условие (iii) верно для DA, так что A H_σ-субнормально вложенна в DA по индукции. Но тогда A H_σ-субнормально вложенна в G по лемме 2.1 (2) в [11].

Наконец, предположим что $DA = G$. Тогда, поскольку G является σ-разрешимой, для некоторого x мы имеем $M \leq A^x$ по [11, Лемма 2.6]. Следовательно, A^x – σ-холлова подгруппа группы G по утверждению (*), значит A^x – H_σ-субнормально вложенная подгруппа группы G. Но тогда A – H_σ-субнормально вложенная подгруппа группы G. Следовательно, импликация (iii) ⇒ (i) верна. □

2 Доказательство теоремы 0.2

Дадим набросок доказательства теоремы. Не теряя общности, мы можем предположить, что H_i – σ_i-группа для всех $i = 1,...,t$.

(i), (iii) $\Rightarrow$ (ii) Предположим, что это неверно. Тогда $D \neq 1$ и поэтому $t > 1$.

Несложной проверкой можно показать, что справедливо следующее утверждение:

(*) *Если $p \in \sigma_i \cap \pi(G)$, то G имеет σ-перестановочную подгруппу E с $|E| = |G|_{\sigma_i}\, p$.*

Теперь пусть $p \in \sigma_i \cap \pi(D)$ и пусть P – силовская p-подгруппа группы D. Тогда, по утверждению (*), G обладает σ-перестановочной подгруппой E такой, что $|E| = |G|_{\sigma_i}\, p$. Из леммы 2.2 (4) в [11] следует, что E является σ-субнормальной в G. Пусть $i \neq j$. Тогда $H_j^x \cap E$ является холловой σ_j-подгруппой группы E по лемме 2.1 (4) в [11], поэтому $|E : H_j^x \cap E|$ является σ_j-числом. Но $|H_j^x|$ делит $|E|$ и, следовательно, $|H_j^x|$ делит $|H_j^x \cap E|$. Следовательно, $H_j^x \leq E$. Таким образом, $H_j^G \leq E$ и, следовательно, G / E_G – σ_i-группа. Поэтому $|E / E_G| = p$, поскольку $|E| = |G|_{\sigma_i}\, p$. С другой стороны, очевидно, $D \leq E_G \leq E$ и поэтому $|P| = p$. Таким образом, все силовские подгруппы из D являются группами простого порядка, а значит – циклическими и поэтому каждый главный фактор группы G ниже D является циклическим. Следовательно, D нильпотентна по [11, Лемма 2.4], поэтому D является циклической группой порядка свободного от квадратов.

Наконец, предположим, что $|\sigma_i \cap \pi(G)| > 1$ и пусть $q \in \sigma_i \cap \pi(G) \setminus \{p\}$. Тогда, по утверждению (*), G обладает σ-перестановочной подгруппой F такой, что $|F| = |G|_{\sigma_i}\, q$. Тогда $D \leq F_G \leq F$. Таким образом, $D \leq E \cap F$ и поэтому p не делит $|D|$. Это противоречие завершает доказательство импликаций (i) $\Rightarrow$ (ii) и (iii) ⇒ (ii).

(ii) ⇒ (iii) Сначала мы покажем, что для каждого i и для каждой подгруппы (соответственно каждой нормальной подгруппы) A_i группы H_i, существует H_σ-перестановочно вложенная (соответственно H_σ-нормально вложенная) подгруппа E_i группы G такая, что $|E_i| = |A_i||G|_{\sigma_i}$. Поскольку G, очевидно, является σ-разрешимой, то она имеет σ_i-дополнение E по [11, Лемма 2.6]. Таким образом, достаточно рассмотрим случай, когда $A_i \neq 1$, так как всякая σ-холлова подгруппа группы G является H_σ-нормально вложенной в G, а, значит, H_σ-перестановочно вложенной в G.

Предположим сначала, что $D \leq E$. Тогда E / D нормальна в G, так как G / D является σ-нильпотентной. Таким образом,

$$(E / D) \times (A_i D / D) = EA_i / D$$

является σ-перестановочной (соответственно нормальной) в $G / D = (E / D) \times (H_i D / D)$. Следовательно, $E_i = EA_i$ является σ-перестановочной (соответственно нормальной) в G по лемме 2.2 (3) в [11] и $|E_i| = |A_i||G|_{\sigma_i}$.

Предположим теперь, что $D \nleq E$. Тогда $D \cap H_i \neq 1$, поэтому H_i является p-группой для некоторого простого p, так как для каждого $\sigma_i \in \sigma(D)$ имеем $|\sigma_i \cap \pi(G)| = 1$ по условию. Следовательно, H_i имеет нормальную подгруппу A такую, что $D_p \leq A$ и $|A| = |A_i|$, где D_p – силовская p-подгруппа группа D. Тогда $D \leq AE$. Более того, $AE / D = (DA / D) \times (ED / D)$, так как ED / D является холловой σ_i-подгруппой группы G / D. Таким образом, $E_i = AE$ является σ-перестановочной (соответственно нормальной) в G по лемме 2.2 (3) в [11] и $|E_i| = |A_i||G|_{\sigma_i}$.

Пусть $E = E_1 \cap \cdots \cap E_t$. Тогда $|E| = |A_1|...|A_t|$, поскольку $(|G : E_i|, |G : E_j|) = 1$ для всех $i \neq j$. Отметим, что E_i либо σ-холлова подгруппа группы G, либо σ-перестановочна (соответственно нормальна) в G. Действительно, пусть V – σ-перестановочная (соответственно нормальная) подгруппа группы G такая, что E_i является σ-холловой подгруппой группы V. Предположим, что E_i не σ-перестановочна (соответственно не нормальна) в G. Тогда $E_i < V$. Поскольку $|G : E_i|$ является σ_i-числом, $|V : E_i|$ является σ_i-числом. Но E_i является σ-холловой подгруппой группы V. Следовательно, $E_i = V$ является σ-холловой подгруппой группы G.

Предположим, что $E_1, ..., E_r$ являются σ-перестановочными (соответственно нормальными) в G и E_i является σ-холловой подгруппой группы G для всех $i > r$. Тогда $E^0 = E_1 \cap \cdots \cap E_r$ является σ-перестановочной (соответственно нормальной) в G по лемме 2.2 (5) в [11] и $E^* = E_{r+1} \cap \cdots \cap E_t$ является σ-холловой подгруппой группы G, так как

$$|G : E^*| = |H_{r+1}| \cdots |H_t|.$$

Теперь, $E = E^0 \cap E^*$ – σ-холлова подгруппа группы E^0 по леммам 2.1 (4) и 2.2 (4) в [11], так что E является H_σ-перестановочно (соответственно H_σ-нормально) вложенной в G. Следовательно (ii) $\Rightarrow$ (iii).

(ii) $\Rightarrow$ (i) Поскольку G является σ-разрешимой, H σ-разрешима. Следовательно, H имеет σ-базис $\{L_1, ..., L_r\}$ такой, что $L_i \le H_i$ для всех $i = 1, ..., r$ по [11, Лемма 2.6]. Таким образом, из импликации (ii) $\Rightarrow$ (iii) мы получаем, что G имеет H_σ-перестановочно вложенную подгруппу порядка $|L_1| \cdots |L_r| = |H|$. □

3 Доказательство теоремы 0.3

(i) $\Rightarrow$ (ii) Эта импликация следует из леммы 2.2 (4) в [11] и теорем A и B.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Данная импликация очевидна.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Пусть A – произвольная подгруппа группы G. Тогда DA – σ-перестановочная подгруппа группы G по лемме 2.2 (3) в [11], поскольку G σ-разрешима. С другой стороны, поскольку $|\sigma(D)| = |\pi(D)|$ и D – циклическая σ-холлова подгруппа группы G порядка свободного от квадратов, то A – σ-холлова подгруппа группы DA. Следовательно, A является H_σ-перестановочно вложенной в G. Таким образом, импликация (iii) $\Rightarrow$ (i) верна. □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Skiba*, *A.N.* On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16.

2. *Skiba*, *A.N.* On some results in the theory of finite partially soluble groups / A.N. Skiba // Commun. Math. Stat. – 2016. – Vol. 4, № 3. – P. 281–309.

3. *Skiba*, *A.N.* A generalization of a Hall theorem / A.N. Skiba // J. Algebra and its Appl. – 2015. – Vol. 15, № 4. – P. 21–36.

4. *Guo*, *W.* Finite groups with permutable complete Wielandt sets of subgroups / W. Guo, A.N. Skiba // J. Group Theory. – 2015. – Vol. 18. – P. 191–200.

5. *Huppert*, *B.* Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1967.

6. *Li*, *S.* On Hall normally embedded subgroups of finite groups / S. Li, J. He, G. Nong, L. Zhou // Comm. Algebra. – 2009. – Vol. 37. – P. 3360–3367.

7. *Li*, *S.* On Hall subnormally embedded and generalized nilpotent groups / S.Li, J. Liu // J. Algebra. – 2013. – Vol. 388. – P. 1–9.

8. *Li*, *S.* CLT-groups with Hall *S*-quasinormally embedded subgroups / S. Li, J. Lio // Ukrain. Math. Journal. – 2014. – Vol. 66. – P. 1281–1287.

9. *Ballester-Bolinches*, *A.* On a problem posed by S. Li and J. Liu / A. Ballester-Bolinches, Shou Homg Qiao // Arch. Math. – 2014. – Vol. 102. – P. 109–111.

10. *Sinitsa*, *D.A.* A note on Hall *S*-permutably embedded subgroups of finite groups / D.A. Sinitsa // Algebra and discrete mathematics. – 2017. – Vol. 23, № 2. – P. 305–311.

11. *Go*, *W.* On H_σ-permutably embedded and H_σ-subnormaly embedded subgroups of finite groups / W. Guo, C. Zhang, A.N. Skiba, D.A. Sinitsa. – 2017. – P. 15. – (Preprint / arXiv:1701.05134).

Поступила в редакцию 08.10.17.