Проблемы физики, математики и техники, № 1 (34), 2018
МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

О ВЛИЯНИИ *k*-ПРИМАРНЫХ ХОЛЛОВЫХ ПОДГРУПП НА СТРОЕНИЕ КОНЕЧНЫХ РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП

Т.И. Васильева[1,2], **С.В. Балычев**[1]

[1]*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины*
[2]*Белорусский государственный университет транспорта*, *Гомель*

ON THE INFLUENCE OF *k*-PRIMARY HALL SUBGROUPS ON THE STRUCTURE OF FINITE SOLUBLE GROUPS

T.I. Vasilyeva[1,2], **S.V. Balychev**[1]

[1]*F. Scorina Gomel State University*
[2]*Belarusian State University of Transport*, *Gomel*

Пусть t – натуральное число. В классе конечных разрешимых групп найдены свойства класса всех групп, у которых все k-примарные холловы подгруппы для $k \le t$ принадлежат наследственной насыщенной формации.

Ключевые слова: *разрешимая группа*, *холлова подгруппа*, *наследственная формация*, *насыщенная формация*.

Let t be a natural number. In the class of finite soluble groups the properties of the class of all groups whose any k-primary Hall subgroups for $k \le t$ belong to the saturated formation are found.

Keywords: *soluble group*, *Hall subgroup*, *hereditary formation*, *saturated formation*.

Введение

Все рассматриваемые в данной работе группы конечные. Пусть π – некоторое множество простых чисел, π' – дополнение к π в множестве всех простых чисел $\mathbb{P}$, $|\pi|$ – мощность π, $|G|$ – порядок группы G, $\pi(n)$ – множество всех простых делителей натурального числа n, $\pi(G) = \pi(|G|)$. Подгруппа K группы G называется: π-*подгруппой*, если $\pi(K) \subseteq \pi$; π-*холловой*, если K – π-подгруппа и $\pi(G:K) \subseteq \pi'$.

Если π состоит из одного простого числа p, то π-холлова подгруппа является силовской p-подгруппой. По известной теореме Силова во всякой группе существуют силовские p-подгруппы, они составляют сопряженный класс подгрупп и для каждой p-подгруппы найдется ее содержащая силовская p-подгруппа. Однако группа может не иметь π-холловых подгрупп, если в π входит 2 и более простых чисел. Например, в знакопеременной группе A_5 на 5 символах нет $\{2,5\}$-холловых подгрупп.

В 1928 году Ф. Холл [1] в классе всех разрешимых групп расширил теорему Силова до случая π-холловых подгрупп.

Теорема (Ф. Холл [1]). *Пусть G – разрешимая группа. Для любого множества простых чисел π справедливы следующие утверждения*:

1) *в G существует π-холлова подгруппа*,

2) *любые две π-холловы подгруппы сопряжены в G*,

3) *каждая π-подгруппа содержится в некоторой π-холловой подгруппе из G*.

Пусть $\mathfrak{F}$ – некоторый класс групп. Через $C_\pi\mathfrak{F}$ обозначается класс всех групп, у которых имеется по крайней мере одна π-холлова подгруппа, принадлежащая $\mathfrak{F}$, и любые две π-холловы подгруппы сопряжены. Из теоремы Ф. Холла следует, что этот класс содержит все разрешимые группы, если $\mathfrak{F}$ совпадает с классом всех групп. В 1975 году Блессеноль [2] установил в классе разрешимых групп, что если $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация, то $C_\pi\mathfrak{F}$ является насыщенной формацией. В [3] (см. также [4, гл. IV]) этот результат был распространен на случай π-обособленных групп. В [5] для произвольной насыщенной формации $\mathfrak{F}$ был получен критерий насыщенности $C_\pi\mathfrak{F}$ в предположении, что $C_\pi\mathfrak{F}$ – формация. Там же был приведен пример, показывающий, что формация $C_\pi\mathfrak{N}$ в общем случае не является насыщенной. Тем самым была опровергнута гипотеза [4, проблемы 19]: пусть π – некоторое множество простых чисел, $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация, тогда $C_\pi\mathfrak{F}$ – насыщенная формация. В [6, теорема 1] было доказано, что для любой формации $\mathfrak{F}$ и любого множества простых чисел π класс $C_\pi\mathfrak{F}$ является формацией. В этой же работе были найдены условия, при которых формация $C_\pi\mathfrak{F}$ является p-насыщенной или p-разрешимо насыщенной.

Определение **0.1.** Пусть t – натуральное число и $\mathfrak{F}$ – класс групп. Обозначим через $\mathrm{H}_t\mathfrak{F}$ следующий класс групп: $\mathrm{H}_t\mathfrak{F} = \cap\ C_{\pi_i}\mathfrak{F}$ по всем $\pi_i \subseteq \mathbb{P}$ таким, что $|\pi_i| = t$.

Ясно, что класс $\mathrm{H}_t\mathfrak{F}$ наследует свойства $C_{\pi_i}\mathfrak{F}$. Из [6, теорема 1] следует, что $\mathrm{H}_t\mathfrak{F}$ является формацией, если $\mathfrak{F}$ – формация.

В тоже время $\mathrm{H}_t\mathfrak{F}$ имеет более сильные свойства, чем $C_{\pi_i}\mathfrak{F}$. Например, $\mathrm{H}_2\mathfrak{N} = \mathfrak{N}$ – насыщенная формация, а в [5] показано, что формация $C_{\{3,11\}}\mathfrak{N}$ является композиционной, но не является насыщенной.

Возникает задача: изучить свойства класса групп $\mathrm{H}_t\mathfrak{F}$ в зависимости от свойств $\mathfrak{F}$.

В классе всех разрешимых групп, учитывая теорему Ф. Холла, можно для определения 0.1 получить равносильное

Определение **0.2.** Пусть t – натуральное число и $\mathfrak{F}$ – класс групп. Тогда $\mathrm{H}_t\mathfrak{F}$ – класс разрешимых групп, у которых любая k-примарная холлова подгруппа принадлежит $\mathfrak{F}$ для любого натурального числа $k \le t$.

Под k-примарной подгруппой группы понимается подгруппа H с $|\pi(H)| = k$, где k – некоторое натуральное число.

В настоящей работе в классе всех разрешимых групп найдены свойства $\mathrm{H}_t\mathfrak{F}$, в частности, для наследственной насыщенной формации $\mathfrak{F}$ класс $\mathrm{H}_t\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация, установлено ее локальное задание. Рассмотрены классы групп $\mathrm{H}_t\mathfrak{F}$ для конкретных формаций $\mathfrak{F}$.

1 Предварительные результаты

В работе используются стандартные обозначения и определения. Необходимые сведения из теории групп и теории формаций можно найти в монографиях [4], [7].

Для группы G и простого числа p через $O_p(G)$ обозначается наибольшая нормальная p-подгруппа G, $F_p(G)$ – p-нильпотентный радикал G, т. е. наибольшая нормальная p-нильпотентная подгруппа G, 1 – единичная группа (подгруппа).

Будем использовать следующие обозначения: $\mathfrak{S}$ – класс всех разрешимых групп, $\mathfrak{U}$ – класс всех сверхразрешимых групп, $\mathfrak{N}$ – класс всех нильпотентных групп, $\mathfrak{N}_p$ – класс всех p-групп, $\mathfrak{S}_\pi$ – класс всех разрешимых π-групп, $\mathfrak{A}$ – класс всех абелевых групп, $\mathcal{A}$ – класс всех разрешимых групп с абелевыми силовскими подгруппами.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *наследственным*, если $\mathfrak{F}$ вместе с каждой группой содержит все ее подгруппы; *нормально наследственным*, если $\mathfrak{F}$ вместе с каждой группой содержит все ее нормальные подгруппы; *гомоморфом*, если из $G \in \mathfrak{F}$ и $N \trianglelefteq G$ всегда следует, что $G/N \in \mathfrak{F}$; *формацией*, если $\mathfrak{F}$ – гомоморф и из $N_i \trianglelefteq G$ и $G/N_i \in \mathfrak{F}$ $(i = 1, 2)$ всегда следует, что $G/N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{F}$; *классом Фиттинга*, если $\mathfrak{F}$ нормально наследственный и $\mathfrak{F}$ содержит всякую группу $G = N_1N_2$, у которой $N_i \trianglelefteq G$ и $N_i \in \mathfrak{F}$ $(i = 1, 2)$. Через $\pi(\mathfrak{F})$ обозначается множество всех простых делителей порядков групп, принадлежащих $\mathfrak{F}$.

Формация $\mathfrak{F}$ называется *насыщенной*, если из $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$-*корадикал* группы G, т. е. наименьшая нормальная подгруппа из G, для которой $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$.

Функция $f : \mathbb{P} \to \{\text{формации}\}$ называется *локальным экраном*. Через $LF(f)$ обозначен класс всех групп G, у которых $G/C_G(H/K) \in f(p)$ для любого главного фактора H/K и каждого $p \in \pi(H/K)$. Формация $\mathfrak{F}$ называется *локальной*, если существует локальный экран f такой, что $\mathfrak{F} = LF(f)$.

Локальный экран f называется *внутренним*, если $f(p) \subseteq LF(f)$ для любого простого p. Внутренний локальный экран F формации $LF(f)$ называется *максимальным внутренним локальным*, если для любого ее внутреннего локального экрана f имеет место включение $f(p) \subseteq F(p)$ для любого простого p.

Лемма **1.1** [7, гл. I, лемма 3.2]. *Пусть K – π-холлова подгруппа группы G, M, N – нормальные подгруппы из G. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(a) K^g – *π-холлова подгруппа в G для любого $g \in G$,*

(b) KN/N – *π-холлова подгруппа в G/N,*

(c) $K \cap N$ – *π-холлова подгруппа в N,*

(d) $(K \cap N)(K \cap M) = K \cap NM$ – *π-холлова подгруппа в NM.*

Теорема **1.1** [2]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация, H – холлова подгруппа разрешимой группы G. Если $H/H \cap \Phi(G) \in \mathfrak{F}$, то $H \in \mathfrak{F}$.*

Теорема **1.2** [4, теорема 4.7]. *Пусть F – максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Формация $\mathfrak{F}$ наследственна тогда и только тогда, когда для любого p формация $F(p)$ наследственна.*

***Предложение* 1.1** [7, гл. IV, предложение 3.14]. *Пусть* $\mathfrak{F} = LF(f)$. *Если* $f(p)$ *наследственная формация для любого* p, *то* $\mathfrak{F}$ *наследственная формация.*

***Лемма* 1.2** [4, лемма 4.5]. *Пусть f – локальный экран формации* $\mathfrak{F}$. *Группа G тогда и только тогда принадлежит* $\mathfrak{F}$, *когда* $G / F_p(G) \in f(p)$ *для любого* $p \in \pi(G)$.

***Теорема* 1.3** [4, теорема 3.3]. *Локальная формация* $\mathfrak{F}$ *имеет единственный максимальный внутренний локальный экран F, причем F удовлетворяет следующему условию*: $F(p) = \mathfrak{N}_p F(p)$ *для любого простого p.*

***Теорема* 1.4** [7, гл. IV, теорема 4.6]. *Формация является насыщенной тогда и только тогда, когда она является локальной.*

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация. Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$*-субнормальной* в G, если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь подгрупп $H = H_0 < H_1 < \ldots < H_n = G$ такая, что $H_i^{\mathfrak{F}} \le H_{i-1}$ для $i = 1, \ldots, n$.

Для непустой формации $\mathfrak{F}$ через $\mathrm{w}\mathfrak{F}$ [8] (см. также [9]) обозначается класс всех групп G таких, что $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и в G любая силовская подгруппа $\mathfrak{F}$-субнормальна.

***Лемма* 1.3** [8, следствие D.1]. *Для класса* $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$ *всех групп с нильпотентным коммутантом класс* $\mathrm{w}(\mathfrak{N}\mathfrak{A}) = \mathfrak{N}\mathcal{A}$.

Подгруппа H группы G называется $\mathbb{P}$*-субнормальной* в G [10], если либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп

$$H = H_0 < H_1 < \ldots < H_{n-1} < H_n = G$$

такая, что индекс $|H_i : H_{i-1}|$ – простое число для любого $i = 1, \ldots, n$. Группа, у которой любая силовская подгруппа является $\mathbb{P}$-субнормальной, называется w*-сверхразрешимой*. Класс $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ состоит из всех w-сверхразрешимых групп и образует наследственную насыщенную формацию разрешимых групп [10].

***Теорема* 1.5** (необходимость [10], достаточность [11]). *Группа G является* w*-сверхразрешимой тогда и только тогда, когда G дисперсивна по Оре и любая ее бипримарная подгруппа сверхразрешима.*

2 Свойства класса групп с заданными *k*-примарными холловыми подгруппами

В разделах 2 и 3 рассматриваются только разрешимые группы, в них слово «группа» означает «разрешимая» группа.

***Лемма* 2.1.** *Пусть t – натуральное число. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если* $\mathfrak{F}_1$ *и* $\mathfrak{F}_2$ *– классы групп, причем* $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$, *то* $\mathrm{H}_t\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathrm{H}_t\mathfrak{F}_2$;

2) $\mathrm{H}_t\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{H}_{t-1}\mathfrak{F} \subseteq \cdots \subseteq \mathrm{H}_1\mathfrak{F}$ *для любого класса групп* $\mathfrak{F}$;

3) $\mathrm{H}_t(\mathrm{H}_t\mathfrak{F}) = \mathrm{H}_t\mathfrak{F}$ *для любого класса групп* $\mathfrak{F}$.

Доказательство. Утверждения 1) и 2) следуют из определения 0.2.

3) Пусть $G \in \mathrm{H}_t\mathfrak{F}$ и K – ее k-примарная холлова подгруппа, $k \le t$. Тогда $K \in \mathfrak{F}$. Ясно, что любая k_1-примарная холлова подгруппа S группы K для $k_1 \le t$ является k_1-примарной холловой подгруппой группы G. Поэтому $S \in \mathfrak{F}$ и $K \in \mathrm{H}_t\mathfrak{F}$. Это означает, что $\mathrm{H}_t\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{H}_t(\mathrm{H}_t\mathfrak{F})$. Обратное включение очевидно. □

***Предложение* 2.1.** *Пусть t – натуральное число*, $\mathfrak{F}$ *– класс групп. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если* $\mathfrak{F}$ *– наследственный класс*, *то* $\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{H}_t\mathfrak{F}$ *и* $\mathrm{H}_t\mathfrak{F}$ *– наследственный класс*;

2) *если* $\mathfrak{F}$ *– нормально наследственный класс*, *то* $\mathrm{H}_t\mathfrak{F}$ *– нормально наследственный класс*;

3) *если* $\mathfrak{F}$ *– гомоморф*, *то* $\mathrm{H}_t\mathfrak{F}$ *– гомоморф*;

4) *если* $\mathfrak{F}$ *– формация*, *то* $\mathrm{H}_t\mathfrak{F}$ *– формация*;

5) *если* $\mathfrak{F}$ *– класс Фиттинга*, *то и* $\mathrm{H}_t\mathfrak{F}$ *– класс Фиттинга.*

Доказательство. Докажем 1) и 2). Пусть K – подгруппа (нормальная подгруппа) группы $G \in \mathrm{H}_t\mathfrak{F}$ и R – k-примарная холлова подгруппа из K, $k \le t$. По теореме Ф. Холла для $\pi = \pi(R)$ в G существует π-холлова подгруппа P такая, что $R \le P$. Тогда P – k-примарная холлова подгруппа в $G \in \mathrm{H}_t\mathfrak{F}$. По определению 0.2 $P \in \mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{F}$ – наследственный (нормально наследственный) класс, то $R \in \mathfrak{F}$. Итак, $K \in \mathrm{H}_t\mathfrak{F}$.

3) $G \in \mathrm{H}_t\mathfrak{F}$, $N \trianglelefteq G$ и T / N – k-примарная холлова подгруппа группы G / N, $k \le t$. Обозначим $\pi = \pi(T / N)$. По теореме Ф. Холла в T существует π-холлова подгруппа R. Так как $|G / N : T / N|$ и $|T : R|$ являются π'-числами, R – π-холлова подгруппа в G. Ввиду того, что $\pi(R) = \pi(T / N)$, подгруппа R является k-примарной. Из $G \in \mathrm{H}_t\mathfrak{F}$ следует, что $R \in \mathfrak{F}$. Поскольку T / N есть π-группа и RN / N – π-холлова подгруппа в T / N, по теореме Ф. Холла $T / N = RN / N$. Из того, что $\mathfrak{F}$ – гомоморф, заключаем $T / N \simeq R / R \cap N \in \mathfrak{F}$. Это означает, что $G / N \in \mathrm{H}_t\mathfrak{F}$.

4) Утверждение следует из [6, теорема 1] и того, что $\mathrm{H}_t\mathfrak{F} = \cap\, C_{\pi_i}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}$ по всем $\pi_i \subseteq \mathbb{P}$ таким, что $|\pi_i| = t$.

5) По 2) $\mathrm{H}_t\mathfrak{F}$ – нормально наследственный класс. Пусть $R = R_1R_2$, где $R_i \trianglelefteq R$ и $R_i \in \mathrm{H}_t\mathfrak{F}$,

$i = 1, 2$. Пусть $k \le t$ и K – k-примарная холлова подгруппа группы R. Для $\pi = \pi(K)$ по (d) леммы 1.1 $K = (K \cap R_1)(K \cap R_2)$. Ввиду (c) леммы 1.1 $K \cap R_i$ является π-холловой подгруппой группы R_i, $i = 1, 2$. Из того, что $K \cap R_i$ – k_i-примарная подгруппа группы $R_i \in \mathrm{H}_t\mathfrak{F}$, где $k_i = |\pi(K \cap R_i)| \le k$, заключаем $K \cap R_i \in \mathfrak{F}$, $i = 1, 2$. Так как $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга, $K = (K \cap R_1)(K \cap R_2) \in \mathfrak{F}$. Таким образом, $R \in \mathrm{H}_t\mathfrak{F}$. □

***Теорема* 2.1.** *Пусть t – натуральное число, $t \ge 2$, $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация и F – её максимальный внутренний локальный экран. Тогда $\mathrm{H}_t\mathfrak{F}$ также является наследственной насыщенной формацией и имеет максимальный внутренний локальный экран H такой, что $H(p) = \mathrm{H}_t F(p)$, причем $H(p) \cap \mathfrak{S}_{p'} = \mathrm{H}_{t-1}(F(p) \cap \mathfrak{S}_{p'})$, для любого простого $p \in \pi(\mathfrak{F})$; $H(p) = \varnothing$ для любого $p \in \mathbb{P} \backslash \pi(\mathfrak{F})$.*

Доказательство. Ввиду 1) предложения 2.1 и теоремы 1.1 $\mathrm{H}_t\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация.

Обозначим $\mathfrak{H} = LF(H)$, где $H(p) = \mathrm{H}_t F(p)$, причем $H(p) \cap \mathfrak{S}_{p'} = \mathrm{H}_{t-1}(F(p) \cap \mathfrak{S}_{p'})$ для любого простого $p \in \pi(\mathfrak{F})$; $H(p) = \varnothing$ для любого $p \in \mathbb{P} \setminus \pi(F)$. Покажем, что $\mathrm{H}_t(\mathfrak{F}) = \mathfrak{H}$.

Вначале установим, что $\mathrm{H}_t\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$. Предположим, что множество $\mathrm{H}_t\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$ непусто. Выберем в нем группу G наименьшего порядка. Так как $\mathfrak{H}$ и $\mathrm{H}_t\mathfrak{F}$ – формации, в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа N. Ввиду насыщенности $\mathfrak{H}$ подгруппа $\Phi(G) = 1$. Тогда в G найдется максимальная подгруппа M такая, что $G = NM$, $N \cap M = 1$, $N = G^{\mathfrak{H}} = C_G(N) = F(G)$ – нормальная p-подгруппа из G для некоторого простого p.

Пусть K – k-примарная холлова подгруппа группы M, где $k \le t-1$. Рассмотрим $R = NK$. Тогда R является либо $(k+1)$-примарной, либо k-примарной подгруппой. Обозначим $\pi = \pi(R)$. В G имеется π-холлова подгруппа S такая, что $R \le S$. Так как $G \in \mathrm{H}_t\mathfrak{F}$, подгруппа $S \in \mathfrak{F}$. По лемме 1.2 $S / F_p(S) \in F(p)$. Из $N = C_G(N) \subseteq F_p(S)$ следует, что $O_{p'}(S) = 1$. Следовательно, $F_p(S)$ – p-группа, причем $N \le F_p(S)$. Из $F(p) = \mathfrak{N}_p F(p)$ заключаем, что $S \in F(p)$. Ввиду теоремы 1.2 $F(p)$ – наследственная формация. Поэтому $R \in F(p)$. Таким образом, для $k \le t-1$ любая k-примарная холлова подгруппа группы M принадлежит $F(p)$. Это означает, что $M \in \mathrm{H}_{t-1}F(p)$.

Если M – p'-группа, то

$$M \in \mathrm{H}_{t-1}(F(p) \cap \mathfrak{S}_{p'}) = H(p) \cap \mathfrak{S}_{p'}.$$

Тогда из $G / C_G(N) \simeq M \in H(p)$ и $G / N \in \mathfrak{H}$ следует, что $G \in \mathfrak{H}$, противоречие с выбором G.

Предположим, что $p \in \pi(M)$. Так как $G \notin \mathfrak{H}$, подгруппа $M \notin H(p) = \mathrm{H}_t F(p)$. Тогда в M найдется k-примарная холлова подгруппа группа T такая, что $T \notin F(p)$, $k \le t$.

1. Допустим, что $NT \ne G$. Тогда из наследственности $\mathrm{H}_t\mathfrak{F}$, $G \in \mathrm{H}_t\mathfrak{F}$ и выбора G следует, что $NT \in \mathfrak{H}$. По лемме 1.2 $NT / F_p(NT) \in H(p)$. Из $N \subseteq F_p(NT)$ и $N = C_G(N)$ заключаем, что $O_{p'}(NT) = 1$ и $F_p(NT)$ – p-группа. Тогда

$$NT / F_p(NT) \simeq T / T \cap F_p(NT) \in H(p) = \mathrm{H}_t(F(p)).$$

Так как $|\pi(T / T \cap F_p(NT))| \le |\pi(T)| = k \le t$, $T / T \cap F_p(NT) \in F(p)$. Поэтому $T \in \mathfrak{N}_p F(p) = F(p)$. Получили противоречие с $T \notin F(p)$.

2. Допустим, что $NT = G$. Тогда $M = T$ и $|\pi(M)| = |\pi(G)| = k$. Из $G \in \mathrm{H}_t\mathfrak{F}$ заключаем, что $G \in \mathfrak{F}$. Поэтому $G / F_p(G) \in F(p)$. Поскольку $F(G) = N = C_G(N) \subseteq F_p(G)$ заключаем, что $F_p(G) = N$. Следовательно, $G / N \simeq M = T \in F(p)$. Это противоречит с $T \notin F(p)$. Итак, $\mathrm{H}_t\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Докажем, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathrm{H}_t\mathfrak{F}$. Допустим, что $\mathfrak{H} \setminus \mathrm{H}_t\mathfrak{F}$ непусто, G – группа наименьшего порядка из этого множества. Тогда в G существует k-примарная холлова подгруппа, которая не принадлежит $\mathfrak{F}$, $k \le t$. Ввиду наследственности $\mathfrak{H}$ и выбора G заключаем, что G является k-примарной группой и $G \notin \mathfrak{F}$.

Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G. Так как $\mathfrak{H}$ – гомоморф, $G / N \in \mathrm{H}_t\mathfrak{F}$ по выбору G. Ввиду того, что $\mathrm{H}_t\mathfrak{F}$ – насыщенная формация, заключаем, что N – единственная минимальная нормальная подгруппа в G и $\Phi(G) = 1$. Тогда $G = NM$ для некоторой максимальной в G подгруппы M, $N = C_G(N) = F(G)$ и N – p-группа для некоторого простого p. Из $G \in \mathfrak{H}$ следует, что $M \simeq G / C_G(N) \in H(p)$.

Если $p \notin \pi(M)$, то M – p'-группа. Поэтому $M \in H(p) \cap \mathfrak{S}_{p'} = \mathrm{H}_{t-1}(F(p) \cap \mathfrak{S}_{p'})$. Из $|\pi(M)| = k-1 \le t-1$ следует, что $M \in F(p)$.

Пусть $p \in \pi(M)$. Тогда $|\pi(M)| = |\pi(G)| = k$ и $M \in H(p) = \mathrm{H}_t F(p)$. Из $k \le t$ следует, что $M \in F(p)$. Таким образом,

$$G / C_G(N) \simeq M \in F(p).$$

Заметим, что $G/N \in \mathrm{H}_t\mathfrak{F}$ по выбору G. Так как $|G/N|<|G|$ и $|\pi(G/N)| \le k \le t$, имеем $G/N \in \mathfrak{F}$. Отсюда и из $G/C_G(N) \in F(p)$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Это противоречит выбору G. Итак, $\mathfrak{H} \subseteq \mathrm{H}_t\mathfrak{F}$. Таким образом, $\mathfrak{H} = \mathrm{H}_t\mathfrak{F}$ и H – локальный экран формации $\mathrm{H}_t\mathfrak{F}$.

Из $F(p) \subseteq \mathfrak{F}$ и 1) леммы 2.1 заключаем, что H – внутренний экран формации $\mathrm{H}_t\mathfrak{F}$.

Докажем равенство $\mathfrak{N}_p H(p) = H(p)$. Ясно, что $H(p) \subseteq \mathfrak{N}_p H(p)$. Пусть $G \in \mathfrak{N}_p H(p)$, $p \in \mathbb{P}$. Обозначим $T = O_p(G)$. Так как $G/T \in H(p) \neq \varnothing$, число $p \in \pi(\mathfrak{F})$. Поэтому $G/T \in \mathrm{H}_t F(p)$. Возьмем k-примарную холлову подгруппу S группы G, $k \le t$. Тогда $|\pi(ST/T)| = |\pi(S/S \cap T)| \le k$. Ввиду того, что ST/T является холловой $\pi(S)$-подгруппой группы G/T, имеем $S/S \cap T \simeq$ $\simeq ST/T \in F(p)$. Тогда $S \in \mathfrak{N}_p F(p) = F(p)$, поскольку F – максимальный внутренний экран формации $\mathfrak{F}$. Значит, $G \in \mathrm{H}_t F(p) = H(p)$. Итак, $\mathfrak{N}_p H(p) = H(p)$.

Теперь H является максимальным внутренним локальным экраном $\mathrm{H}_t\mathfrak{F}$ ввиду леммы 3.12 из [4]. □

3 Класс групп $\mathrm{H}_t\mathfrak{F}$ для некоторых заданных формаций $\mathfrak{F}$

***Лемма* 3.1.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация. Тогда*

1) $\mathrm{H}_1\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{F})}$,

2) *если* $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F}$, *то* $\mathrm{H}_1\mathfrak{F} = \mathfrak{S}$.

Доказательство. Утверждение 1) справедливо ввиду того, что для насыщенной формации $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})} \subseteq \mathfrak{F}$. Утверждение 2) следует из 1), так как $\pi(\mathfrak{F}) = \mathbb{P}$. □

Группа G называется *дисперсивной по Оре*, если для

$$\pi_{p_i} = \{p_1, p_2, ..., p_i\} \subseteq \pi(G) = \{p_1, p_2, ..., p_n\},$$

где $p_1 > p_2 > ... > p_n$, G имеет нормальную холлову π_{p_i}-подгруппу, $i = 1, 2, ..., n$.

***Лемма* 3.2.** *Если группа $G \in \mathrm{H}_2\mathfrak{U}$, то G дисперсивна по Оре.*

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по $|G|$. Пусть $\pi(G) = \{p_1, p_2, ..., p_n \mid p_1 > p_2 > \cdots > p_n\}$, $n \ge 1$ и P_1 силовская p_1-подгруппа группы G. Так как $G \in \mathrm{H}_2\mathfrak{U}$, группа G дисперсивна по Оре для $n = 1, 2$. Рассмотрим $n \ge 3$. Пусть $\pi_i = \{p_1, p_i\}$, $i \in \{2, 3, ..., n\}$. По теореме Ф. Холла в G найдутся холловы π_i-подгруппы S_i такие, что $P_1 \le S_i$. Из $G \in \mathrm{H}_2\mathfrak{U}$ следует, что $S_i \in \mathfrak{U}$. Поэтому S_i дисперсивна по Оре и $P_1 \trianglelefteq S_i$. Ввиду того, что $S_i = P_1 R_i$ для некоторой силовской p_i-подгруппы R_i группы G, заключаем $R_i \subseteq N_G(P_1)$. Тогда

$$G = \langle P_1, R_2, ..., R_n \rangle \le N_G(P_1).$$

Значит, $P_1 \trianglelefteq G$. Так как $|\pi(G/P_1)| = n-1$, по индукции G/P_1 дисперсивна по Оре, но тогда и G дисперсивна по Оре. □

***Лемма* 3.3.** *Если группа $G \in \mathrm{H}_2\mathfrak{N}$, то G нильпотентна.*

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по $|G|$. Для $|\pi(G)| \le 2$ группа $G \in \mathfrak{N}$. Пусть $|\pi(G)| > 2$ и p – наибольший простой делитель $|G|$. По лемме 3.2 G имеет нормальную силовскую p-подгруппу P. Так как $G/P \in \mathrm{H}_2\mathfrak{N}$, G/P нильпотентна. Тогда $QP/P \trianglelefteq G/P$ для любой силовской q-подгруппы Q группы G. Отсюда $QP \trianglelefteq G$. Из $QP \neq G$ следует нильпотентность QP. Откуда заключаем, что $Q \trianglelefteq G$. □

***Следствие* 3.1.** *Если группа $G \in \mathrm{H}_2\mathfrak{A}$, то G абелева.*

***Лемма* 3.4.** *Если группа $G \in \mathrm{H}_2(\mathfrak{N}\mathfrak{A})$, то $G \in \mathfrak{N}\mathcal{A}$.*

Доказательство. Ввиду леммы 1.3 $\mathrm{w}(\mathfrak{N}\mathfrak{A}) =$ $= \mathfrak{N}\mathcal{A}$. Теперь доказательство осуществляется проверкой того, что в G любая силовская подгруппа является $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$-субнормальной. □

Из лемм 3.1–3.3 и свойств класса групп $\mathrm{H}_t\mathfrak{F}$ получаются следующие примеры.

$\mathrm{H}_1\mathfrak{A} = \mathcal{A}$, $\mathrm{H}_t\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$ для $t \ge 2$.

$\mathrm{H}_1\mathfrak{N} = \mathfrak{S}$, $\mathrm{H}_t\mathfrak{N} = \mathfrak{N}$ для $t \ge 2$.

Ввиду лемм 3.1, 3.2 и теоремы 1.5. получается

***Пример* 3.1.** Если $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}$, то

1) $\mathrm{H}_1\mathfrak{U} = \mathfrak{S}$,

2) $\mathrm{H}_2\mathfrak{U} = \mathrm{w}\mathfrak{U}$.

Подгруппа M группы G называется *модулярной* в G [12], если она является модулярным элементом в решетке всех подгрупп группы, т. е. если выполняются следующие условия:

1) $\langle X, M \cap Z \rangle = \langle X, M \rangle \cap Z$ для всех $X \le G$, $Z \le G$ таких, что $X \le Z$;

2) $\langle M, Y \cap Z \rangle = \langle M, Y \rangle \cap Z$ для всех $Y \le G$, $Z \le G$ таких, что $M \le Z$. Подгруппа H группы G называется *субмодулярной* в G [13], если существует цепь подгрупп

$$H = H_0 \le H_1 \le ... \le H_{s-1} \le H_s = G$$

такая, что H_{i-1} – модулярная подгруппа в H_i для $i = 1, ..., s$. Сверхразрешимая группа называется *сильно сверхразрешимой* [14], если в ней любая силовская подгруппа субмодулярна.

В [14] через $s\mathfrak{U}$ и $sm\mathfrak{U}$ обозначены следующие классы групп: $s\mathfrak{U}$ – класс всех сильно сверхразрешимых групп, $sm\mathfrak{U}$ – всех групп с субмодулярными силовскими подгруппами, и исследованы их свойства. В частности, эти классы являются наследственными насыщенными формациями, $sm\mathfrak{U}$ – собственный подкласс из $\mathrm{w}\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U} \neq s\mathfrak{U}$ и $s\mathfrak{U} \neq sm\mathfrak{U}$. По [14, теорема D] группа $G \in sm\mathfrak{U}$ тогда и только тогда, когда G дисперсивна по Оре и любая ее бипримарная подгруппа сильно сверхразрешима.

***Пример* 3.2.** Если $\mathfrak{F} = sm\mathfrak{U}$, то

1) $\mathrm{H}_1(s\mathfrak{U}) = \mathfrak{S}$,

2) $\mathrm{H}_2(s\mathfrak{U}) = sm\mathfrak{U}$.

Ввиду лемм 3.1, 3.4 и 1) предложения 2.1 получается

***Пример* 3.3.** Если $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}\mathfrak{A}$, то

1) $\mathrm{H}_1(\mathfrak{N}\mathfrak{A}) = \mathfrak{S}$,

2) $\mathfrak{N}\mathfrak{A} \subset \mathrm{H}_2(\mathfrak{N}\mathfrak{A}) \subset \mathfrak{N}\mathcal{A}$.

Отметим, что $\mathrm{H}_2(\mathfrak{N}\mathfrak{A}) \neq \mathfrak{N}\mathcal{A}$, так как симметрическая группа S_4 на 4 символах принадлежит $\mathfrak{N}\mathcal{A}$, но $S_4 \notin \mathrm{H}_2(\mathfrak{N}\mathfrak{A})$.

Заметим, что $\mathfrak{N}\mathfrak{A} \neq \mathrm{H}_2(\mathfrak{N}\mathfrak{A})$. Это следует из того, что $\mathrm{w}\mathfrak{U} = \mathrm{H}_2\mathfrak{U} \subseteq \mathrm{H}_2(\mathfrak{N}\mathfrak{A})$ и группа из примера 1 [10] принадлежит $\mathrm{w}\mathfrak{U}$, но ее коммутант не является нильпотентным.

Заключение

В работе в классе всех разрешимых групп изучен класс $\mathrm{H}_t\mathfrak{F}$ (t – натуральное число) групп, у которых любая k-примарная холлова подгруппа для $k \leq t$ принадлежит заданному классу $\mathfrak{F}$. В частности, установлено, если $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация, то $\mathrm{H}_t\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация, найдено ее локальное задание. Показано, что рассмотренная конструкция $\mathrm{H}_t\mathfrak{F}$ позволяет для конкретных формаций $\mathfrak{F}$ и t получать как известные формации, так и новые.

В классе всех групп возникает следующая

Проблема. Пусть $t \geq 2$. Будет ли $\mathrm{H}_t\mathfrak{F}$ насыщенной формацией, если $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация?

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hall*, *P.* A note on soluble groups / P. Hall // J. London Math. Soc. – 1928. – Vol. 3. – P. 98–105.

2. *Blessenohl*, *D.* Über Formationen und Halluntergruppen endlicher auflösbarer Gruppen / D. Blessenohl // Math. Z. – 1975. – Vol. 142, № 3. – S. 299–300.

3. *Слепова*, *Л.М.* О формациях $E^{\mathfrak{F}}$-групп / Л.М. Слепова // Доклады АН БССР. – 1977. – Т. 21, № 7. – С. 587–589.

4. *Шеметков*, *Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.

5. *Шеметков*, *Л.А.* Нелокальные формации конечных групп / Л.А. Шеметков, А.Ф. Васильев // Доклады АН Беларуси. – 1995. – Т. 39, № 4. – С. 5–8.

6. *Вдовин*, *Е.П.* Формации конечных C_π-групп / Е.П. Вдовин, Д.О. Ревин, Л.А. Шеметков // Алгебра и анализ. – 2012. – Т. 24, № 1. – С. 40–52.

7. *Doerk*, *K.* Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New-York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

8. *Васильев*, *А.Ф.* О конечных группах с обобщенно субнормальными силовскими подгруппами / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 4 (9). – С. 86–91.

9. *Васильев*, *А.Ф.* Конечные группы с обобщенно субнормальным вложением силовских подгрупп / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, А.С. Вегера // Сиб. мат. журн. – 2016. – Т. 57, № 2. – С. 259–275.

10. *Васильев*, *А.Ф.* О конечных группах сверхразрешимого типа / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Сиб. мат. журн. – 2010. – Т. 51, № 6. – С. 1270–1281.

11. *Monakhov*, *V.S.*, Finite groups with $\mathbb{P}$-subnormal subgroups / V.S. Monakhov, V.N. Kniahina // Ricerche di Matematica. – 2013. – Vol. 62, № 2. – P. 307–322.

12. *Schmidt*, *R.* Subgroup Lattices of Groups / R. Schmidt. – Berlin: Walter de Gruyter, 1994. – 572 p.

13. *Zimmermann*, *I.* Submodular Subgroups in Finite Groups / I. Zimmermann // Math. Z. – 1989. – Vol. 202. – P. 545–557.

14. *Васильев*, *В.А.* Конечные группы с субмодулярными силовскими подгруппами / В.А. Васильев // Сиб. мат. журн. – 2015. – Т. 56, № 6. – С. 1277–1288.

Поступила в редакцию 27.11.17.