Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (87), 2014

Математика

УДК 512.542

О гиперрадикальных формациях в классе конечных групп X

А.Ф. Васильев, И.Н. Халимончик

Рассматривается проблема описания гиперрадикальных формаций в классе X и обсуждаются некоторые направления ее решения. Устанавливается связь наследственных гиперрадикальных формаций с наследственными решеточными формациями в классе X. Приводится описание наследственных формаций, гиперрадикальных в классе всех разрешимых групп, нильпотентная длина которых ограничена натуральным числом k. Сформулирован ряд открытых проблем, стимулирующих дальнейшее развитие теории гиперрадикальных формаций.
Ключевые слова: конечная группа, нильпотентная длина, формация, гиперрадикальная формация, решеточная формация.

The problem of describing hyperradical formations in class X and discuss some of the directions of its solution is considered. A connection of hereditary hyperradical formations with hereditary lattice formations in class X is established. A description of the hereditary hyperradical formations in the class of solvable groups, nilpotent length of which at most a given positive integer k is presented. A number of open problems that stimulate the further development of the theory hyperradical formations are formulated.
Keywords: finite group, nilpotent length, formation, hyperradical formation, lattice formation.

1. Введение. Рассматриваются только конечные группы. Одним из центральных в теории групп является понятие субнормальной подгруппы, которое тесно связано с классом всех нильпотентных групп. В 1938 г. Фиттинг в [1] показал, что класс всех нильпотентных групп является замкнутым относительно взятия произведений (или, что эквивалентно, относительно порождений) субнормальных подгрупп. В работе [2] Виландт установил, что множество всех субнормальных подгрупп образует подрешетку решетки всех подгрупп в любой конечной группе.

Обобщая понятие субнормальности, в 1969 г. Хоукс в [3] ввел понятие F-субнормальной подгруппы в классе разрешимых групп. В 1978 г. Л.А. Шеметков в монографии [4] распространил понятие F-субнормальности на произвольные конечные группы.

Пусть F − непустая формация. Подгруппа K группы G называется F-субнормальной, если либо $K = G$, либо существует максимальная цепь подгрупп $K = K_0 \subset K_1 \subset \ldots \subset K_n = G$ такая, что $(K_i)^{\mathrm{F}} \subseteq K_{i-1}$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

Формация F называется решеточной в классе групп X, если в каждой X-группе G множество всех F-субнормальных подгрупп образует подрешетку решетки всех подгрупп G. Решеточные формации исследовались в работах [5], [6]. В работе [6] была выявлена тесная связь решеточных формаций с формациями, замкнутыми относительно взятия порождений F-субнормальных F-подгрупп. Поэтому в [7] было введено следующее

Определение 1.1. Пусть X − некоторый непустой класс групп. Формация F, содержащаяся в X, называется гиперрадикальной в классе X, если выполняются следующие утверждения:

1. формация F является нормально наследственной;

2. любая X-группа $G = \langle A, B \rangle$, где A и B − F-субнормальные F-подгруппы в G, принадлежит F.

Если X − класс всех групп, то гиперрадикальную формацию F в X будем просто называть гиперрадикальной. Отметим, что формация всех нильпотентных групп является гиперрадикальной. С другой стороны, формация всех сверхразрешимых групп не является гиперрадикальной. Поэтому в связи с общей задачей классификации гиперрадикальных формаций возникает следующая общая

Проблема 1.2. *Пусть* X − *наследственная насыщенная формация*.

1. *Описать все формации* F *являющиеся гиперрадикальными в* X.

2. *Для данной наследственной насыщенной формации* F *описать формации* X, *для которых* F *гиперрадикальна в* X.

Ранее проблема 1.2 исследовалась в случаях, когда X совпадает с классом всех разрешимых или всех произвольных групп. Так из работы [6] следует описание насыщенных наследственных гиперрадикальных формаций. В [7] было получено конструктивное описание гиперрадикальных формаций в классе S всех разрешимых групп.

В [8] были установлены насыщенные наследственные формации X, у которых любая ее насыщенная наследственная подформация F является гиперрадикальной в X.

В частности, было доказано, что любая насыщенная наследственная подформация формации NA всех групп с нильпотентным коммутантом является гиперрадикальной в NA.

Напомним [4], что формация F называется насыщенной, если из $G/\Phi(G)\in$ F следует, что $G\in$ F.

Как следует из работы [7], всякая разрешимая наследственная гипперрадикальная формация является насыщенной. С другой стороны, в работе [9] приведен пример ненаследственной гиперрадикальной формации, не являющейся насыщенной. Вместе с тем остается открытой следующая

Проблема 1.3. *Пусть* X − *наследственная насыщенная формация. Доказать, что любая наследственная формация* F, *являющаяся гиперрадикальной в* X, *будет насыщенной*.

Рассмотрению ряда случаев проблем 1.2 и 1.3 и посвящена данная работа.

2. Предварительные сведения. В работе используются обозначения, определения и результаты из [4], [10]. Напомним, что формация – это класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. Формация называется наследственной, если она вместе с каждой группой содержит все ее подгруппы. Пусть F – некоторая непустая формация. Тогда F-*корадикалом* группы G называется наименьшая нормальная подгруппа из G, факторгруппа по которой принадлежит F и обозначается через G^{F}.

Сформулируем в виде лемм вспомогательные результаты необходимые для доказательства основных результатов.

Лемма 2.1 [10]. *Пусть* F *– непустая формация, H и N – подгруппы группы G, причем N нормальна в G. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если H* F*-субнормальна в G, то HN* F*-субнормальна в G, а HN/N* F*-субнормальна в G/N*;

2) *если $N\subseteq H$, то подгруппа H* F*-субнормальна в G тогда и только тогда, когда подгруппа H/N* F*-субнормальна в G/N*;

3) *если подгруппа H* F*-субнормальна в подгруппе K, а K* F*-субнормальна в группе G, то H* F*-субнормальна в G.*

Лемма 2.2 [10]. *Пусть* F *– непустая наследственная формация. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если H – подгруппа группы G и $G^{\mathrm{F}}\subseteq H$, то H –* F*-субнормальная подгруппа группы G*;

2) *если H –* F*-субнормальная подгруппа и K − подгруппа группы G, то подгруппа $H\cap K$ –* F*-субнормальная подгруппа в K*;

3) *если H_1 и H_2 –* F*-субнормальные подгруппы группы G, то $H_1\cap H_2$ −* F*-субнормальная подгруппа в G*;

4) *если все композиционные факторы группы G принадлежат формации* F*, то каждая субнормальная подгруппа группы G является* F*-субнормальной*;

5) *если H –* F*-субнормальная подгруппа группы G, то H^g –* F*-субнормальная подгруппа в G для любого элемента g из G.*

3. Гиперрадикальные и решеточные формации. Связь гиперрадикальных и решеточных формаций в классе групп X устанавливает следующая

Теорема 3.1. *Пусть* X − *наследственная насыщенная формация. Если* F − *наследственная гиперрадикальная формация в* X, *то* F *является решеточной формацией в* X.

Доказательство. Пусть F − наследственная гиперрадикальная формация в классе X. По 3) леммы 2.2 пересечение F-субнормальных подгрупп является F-субнормальной подгруппой. Предположим, что F не является решеточной формацией в X. Пусть X-группа G − контрпример минимального порядка к утверждению теоремы. Тогда в G найдутся две F-субнормальные подгруппы A и B такие, что подгруппа $< A, B >$ не является F-субнормальной в G. Ясно, что $< A, B > \neq G$ и $< A, B > \in \mathrm{X}$. Если $G \in \mathrm{F}$, то из наследственности формации F следует, что $< A, B >$ является F-субнормальной в G. Противоречие. Следовательно, G не принадлежит F.

Пусть N − минимальная нормальная подгруппа группы G. Если $N = G$, то G − простая группа. Так как $G \notin \mathrm{F}$, то $G^{\mathrm{F}} = G$. Следовательно, $AG^{\mathrm{F}} = G$. Противоречие с тем, что A − F-субнормальная подгруппа в G. Будем считать, что $N \neq G$. По 1) леммы 2.1 AN/N и BN/N − F-субнормальные подгруппы в $G/N \in \mathrm{X}$. По индукции $< AN/N, BN/N > = < A, B >N/N$ − F-субнормальная подгруппа в G/N. Отсюда и из 2) леммы 2.1 подгруппа $< A, B >N$ F-субнормальна в G. Если $< A, B >N \neq G$, то $< A, B >$ F-субнормальна в $< A, B >N$. Тогда по 3) леммы 2.1 $< A, B >$ − F-субнормальная подгруппа в G. Противоречие. Итак, $< A, B >N = G$ для любой минимальной нормальной подгруппы группы G. Так как $< A, B > \neq G$, то нетрудно видеть, что $< A, B >_G=1$.

Пусть $A^{\mathrm{F}} \neq 1$. Ввиду леммы 2.1 из [11] подгруппа A^{F} субнормальна в G. Тогда по теореме 7.10 из [4] следует, что

$$1 \neq (A^{\mathrm{F}})^{G} = (A^{\mathrm{F}})^{N <A,B>} = (A^{\mathrm{F}})^{<A,B>} \subseteq < A, B >.$$

Откуда следует, что $< A, B >_G \neq 1$. Получили противоречие. Значит, $A^{\mathrm{F}}=1$ и $A \in \mathrm{F}$. Аналогично доказывается, что $B \in \mathrm{F}$. Так как $< A, B > \in \mathrm{X}$, то из гиперрадикальности формации F в X следует, что $< A, B > \in \mathrm{F}$. Так как F и X − формации, то X-группа G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу $N = G^{\mathrm{F}}$ и $< A, B >N = G$.

Рассмотрим подгруппу AN. Так как $N = G^{\mathrm{F}}$ и A является F-субнормальной в G, то $AN \neq G$. Из того, что $A \in \mathrm{F}$ следует, что $(AN)^{\mathrm{F}} \subseteq N$.

Пусть $(AN)^{\mathrm{F}} \subset N$. Тогда из наследственности формации F и $AN/(AN)^{\mathrm{F}} \in \mathrm{F}$ следует, что $N/(AN)^{\mathrm{F}} \in \mathrm{F}$. Так как N − элементарная группа, то нетрудно видеть, что $N \in \mathrm{F}$. Так как $G^{\mathrm{F}} \subseteq N$, то по 1) леммы 2.2 N F-субнормальна в G. Из $AN \in$ X и гиперрадикальности F в X получаем, что $AN \in \mathrm{F}$. Аналогично $BN \in \mathrm{F}$. Так как AN и BN − F-субнормальные F-подгруппы в G, то $G = < AN, BN > \in \mathrm{F}$. Противоречие.

Пусть $(AN)^{\mathrm{F}} = N$. Так как A является F-субнормальной подгруппой в G, то по 2) леммы 2.2 следует, что A F-субнормальна в AN. Если $A \neq AN$, то $A(AN)^{\mathrm{F}} \neq AN$. Противоречие. Поэтому $A = AN \in \mathrm{F}$. Аналогично $B = BN \in \mathrm{F}$. Из гиперрадикальности F в X следует, что $G = < AN, BN > = < A, B > \in \mathrm{F}$. Противоречие. Значит, наше предположение неверно и F − решеточная формация в X. Теорема доказана.

Когда X класс всех групп, теорема 1 была доказана в работе [12].

Как следует из работ [7], [11], обратное утверждение теоремы 1 неверно, так как существуют решеточные формации, которые не являются гиперрадикальными.

Следующая теорема развивает основной результат работы [12].

Теорема 3.2. *Пусть* F − *наследственная формация*, X − *насыщенная формация*, *причем* $\mathrm{X} = S_{\pi}\mathrm{X}$, *где* $\pi = \pi(\mathrm{F})$. *Если* F − *гиперрадикальная формация в* X, *то* F *является насыщенной формацией, решеточной в* X.

Следствие 3.3. *Всякая наследственная гиперрадикальная формация является насыщенной решеточной формацией*.

Замечание. Следствие 3 с учетом основного результата из работы [6] дает ответ на вопрос 4.8 из работы [13].

4. Гиперрадикальные формации в классе N^{k}. В следующих теоремах описаны насыщенные формации, гиперрадикальные в классе N^{k} всех разрешимых групп, нильпотентная длина которых не превосходит натуральное число k. Пусть π – некоторое множество простых чисел. Тогда N_{π}^{k} обозначает класс всех разрешимых π-групп, нильпотентная длина которых не превосходит k, где k – некоторое неотрицательное целое число. В частности, если

$k = 0$, то N^{k}_{π} совпадает с классом всех единичных групп. Если $k = 1$, то $N^{k}_{\pi} = N_{\pi}$. Если π совпадает с множеством всех простых чисел, то $N^{k}_{\pi} = N^{k}$.

Используя результаты работы [7], нетрудно получить следующий результат.

Теорема 4.1. *Пусть* F − *подформация формации* N. *Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

1) F *является гиперрадикальной формацией в* N;

2) $F = N_{\pi}$, *где* $\pi = \pi(F)$.

Напомним [10], что формация F конечных групп называется формацией Шеметкова в классе X, если каждая минимальная не F-группа из X является либо группой Шмидта, либо группой простого порядка. Наиболее важную роль для приложений играют формации Шеметкова в классе X, состоящих из разрешимых групп. В работе [14] были описаны наследственные насыщенные формации Шеметкова в классе X в случае, когда $F \subseteq X = S_{\pi(X)}$. В работе [15] получено описание наследственных локальных формаций Шеметкова F в классе X при предположении, что $F \subseteq X$ и X − наследственная насыщенная формация конечных разрешимых групп.

Теорема 4.2. *Пусть* F − *насыщенная формация*, $F \subseteq N^{2}$. *Следующие утверждения эквивалентны*.

1) F *является гиперрадикальной формацией в* N^{2};

2) F *является формацией Шеметкова в* N^{2};

3) F *имеет максимальный внутренний локальный экран* f *такой, что* $f(p)=N_{p}N_{\pi(f(p))}$ *для любого* $p \in \pi(F)$.

Теорема 4.3. *Пусть* F − *нормально наследственная формация*, $F \subseteq N^{k}$, *где* k − *фиксированное натуральное число и* $k \geq 3$. *Формация* F *является гиперрадикальной в* N^{k} *тогда и только тогда, когда существует разбиение* $\{\pi_i \mid i \in I\}$ *множества* $\pi(F)$ *такое, что* $F = D_0(\bigcup_{i \in I} N^{k}_{\pi_i})$.

Литература

1. Fitting, H. Beitrage zur Theorie der endlichen Gruppen / H. Fitting // Jahresber. Deutsch. Math., Verein. − 1938. – Bd. 48. – P. 77–141.

2. Wielandt, H. Eine Verallgemeinerung der invarianten Untergruppen / H. Wielandt // Math. Z. – 1939. − Bd. 45. − S. 209−244

3. Hawkes, T. On formations subgroups of a finite soluble groups / T. Hawkes // J. London Math.Soc. – 1969. − V. 44. − P. 243−250.

4. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков // М. : Наука, 1978.

5. Ballester-Bolinches, A. On the lattice on F-subnormal subgroups / A. Ballester-Bolinches, K. Doerk, M.D. Perez-Ramos // J.Algebra. – 1992. − V. 115. − P. 393−396.

6. Васильев, А.Ф. О решетках подгрупп конечных групп / А.Ф. Васильев, С.Ф. Каморников, В.Н. Семенчук // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические системы. – Киев : Ин-т математики АН Украины, 1993. − С. 27−54.

7. Васильев, А.Ф. Гиперрадикальные формации конечных разрешимых групп / А.Ф. Васильев // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2004. − № 6 (27). − С. 62−70.

8. Халимончик, И.Н. О решеточных, гиперрадикальных и сверхрадикальных формациях конечных групп / И.Н. Халимончик // Весн. Віцебск. дзярж. ун-та. − 2012. − № 3 (69). − С. 20−24.

9. Каморников, С.Ф. Об одном примере гиперрадикальных формаций / С.Ф. Каморников // Проблемы физики, математики и техники. − 2014. − № 3 (20). − С. 61–64.

10. Каморников, С.Ф. Подгрупповые функторы в теории классов конечных групп / С.Ф. Каморников, М.В. Селькин. – Мн. : Беларуская навука, 2003. – 238 с.

11. Васильев, А.Ф. К проблеме Кегеля-Шеметкова о решетках обобщенно субнормальных подгрупп конечных групп / А.Ф. Васильев, С.Ф. Каморников // Алгебра и логика. − 2002. − Т. 41, № 4. − С. 411−428.

12. Васильев, А.Ф. Гиперрадикальные формации конечных групп / А.Ф. Васильев, И.Н. Халимончик // Труды института математики. − 2008. − Т. 16, № 2. − С. 15−18.

13. Каморников, С.Ф. Сверхрадикальные формации / С.Ф. Каморников // Изв. Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2014. – № 3. – С. 47–49.

14. Васильев, А.Ф. Характеризация локальных формаций F по заданным свойствам минимальных не F-групп / А.Ф. Васильев, В.Н. Семенчук // Исследование нормального и подгруппового строения конечных групп : тр. Гомельского семинара. – Мн. : Наука и техника, 1984. − С. 175−181.

15. Халимончик, И.Н. Формации Шеметкова в классе X / И.Н. Халимончик // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. − 2009. − № 4 (55). − С. 219−223.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 14.11.2014