Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (87), 2014

УДК 512.542

О собственных подформациях однопорожденной τ-замкнутой ω-насыщенной формации

В.М. Селькин

Исследовалось строения τ-замкнутых ω-насышенных формаций. Доказано, что всякая собственная τ-замкнутая ω-насыщенная подформация M однопорожденной τ-замкнутой ω-насыщенной формации F содержится в некоторой максимальной τ-замкнутой ω-насыщенной подформации формации F.
Ключевые слова: формация, τ-замкнутая ω-насыщенная формация, однопорожденная формация, спутник

We investigate the structure of τ-closed ω-saturated formations. It is proved that every proper τ-closed ω-saturated subformation M of one-generated τ-closed ω-saturated formation F is contained in some maximal τ-closed ω-saturated subformation of F.
Keywords: formation, τ-closed ω-saturated formations, one-generated formation, satellite.

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Используется общепринятая терминология [1]-[4].

В группе G выберем некоторую систему подгрупп $\tau(G)$. Исходя из [3], τ называется подгрупповым функтором, если выполняются следующие условия:

1. $G \in \tau(G)$ для любой группы G;

2. для любого эпиморфизма и любых групп $H \in \tau(A)$ и $T \in \tau(B)$ имеет место $H^{\varphi} \in \tau(B)$ и $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$.

Формация F называется τ-замкнутой, если $\tau(G) \subseteq \mathsf{F}$ для любой группы $G \in \mathsf{F}$. Для подгрупповых функторов τ_1 и τ_2 полагают $\tau_1 \le \tau_2$, если $\tau_1(G) \subseteq \tau_2(G)$ для любой группы G. Подгрупповой функтор τ называется замкнутым, если всегда из того, что $T \in \tau(H)$, $H \in \tau(G)$, следует $T \in \tau(G)$. Символом $\bar{\tau}$ обозначается наименьший замкнутый подгрупповой функтор со свойством $\tau \le \bar{\tau}$.

Пусть ω – произвольное непустое множество простых чисел. Всякая функция вида

$$f : \omega \cup \{\omega'\} \mapsto \{\text{формации групп}\}$$

называется ω-локальным спутником [4]. Если все значения ω-локального спутника f являются τ-замкнутыми формациями, то f называется τ-замкнутым ω-локальным спутником. Символом $LF_{\omega} < f >$ обозначим класс групп $(G \mid G/O_{\omega}(G) \in f(\omega')$ и $G/F_p(G) \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G))$ для любого произвольного ω-локального спутника f. Пусть $\mathsf{F} = LF_{\omega} < f >$, то говорим, что f – ω-локальный V-спутник формации F. В этом случае мы называем F ω-насыщенной формацией. Если при этом все значения f лежат в F, то f будем называть внутренним ω-локальным V-спутником формации F.

Пусть X – произвольная совокупность групп, p – простое число. Тогда полагают

$$\mathsf{X}(F_p) = \begin{cases} \mathrm{form}(G/F_p(G) \mid G \in \mathsf{X}), & \text{если } p \in \pi(\mathsf{X}); \\ \varnothing, & \text{если } p \notin \pi(\mathsf{X}). \end{cases}$$

V-спутник формации F называется минимальным τ-значным ω-локальным V-спутником формации F, если $f(\omega') = \mathrm{form}(G/O_{\omega}(G) \mid G \in \mathsf{F})$ и $f(p) = \mathrm{form}(\mathsf{F}(F_p))$ для всех простых $p \in \omega$. Символом $\tau^{\omega}\mathrm{form}(\mathsf{X})$ обозначаем пересечение всех τ-замкнутых

ω-насыщенных формаций, содержащих непустое множество групп $\mathfrak{X}$. Формация $\mathfrak{F}$ называется минимальной τ-замкнутой ω-насыщенной $\mathfrak{H}$-формацией, если $\mathfrak{F}$ не содержатся в $\mathfrak{H}$, но все собственные τ-замкнутые ω-насыщенные подформации формации $\mathfrak{F}$ содержатся в $\mathfrak{H}$.

Общая теория минимальных τ-замкнтых ω-насыщенных не $\mathfrak{H}$-формаций построена автором в [5]–[9]. Целью данной работы является нахождение подформации формации $\mathfrak{F}$, содержащей все собственные τ-замкнутые ω-насыщенные подформации формации.

Теорема 1. Всякая собственная τ-замкнутая ω-насыщенная подформация M однопорожденной τ-замкнутой ω-насыщенной формации $\mathfrak{F}$ содержится в некоторой максимальной τ-замкнутой ω-насыщенной подформации формации $\mathfrak{F}$.

Доказательство. Пусть $F = \tau^{\omega}\mathrm{form(G)}$. Тогда $G \notin \mathfrak{M}$, и поэтому множество Σ всех тех τ-замкнутых ω-насыщенных подформаций из $\mathfrak{F}$, которые включают в себя M и не содержат G, не пусто и это множество частично упорядочено по включению. Пусть $\{H_i | i \in I\}$ – произвольная цепь в Σ и $H = \cup_{i\in I} H_i$. Покажем, что $H \in \Sigma$. Понятно, что $M \subseteq \mathfrak{H}$ и $G \notin H \subseteq \mathfrak{F}$. Поэтому нам необходимо лишь установить, что $\mathfrak{H}$ является τ-замкнутой ω-насыщенной формацией. Пусть h_i – минимальный τ-замкнутый ω-локальный V-спутник формации H_i и h – такой спутник, что $h(a) = \bigcup_{i\in I} h_i(a)$ для всех $a \in \omega \bigcup \{\omega'\}$. По лемме 2.13 [10] включение $H_i \subseteq H_j$ имеет место тогда и только тогда, когда $h_i(a) \subseteq h_j(a)$ для всех $a \in \omega \bigcup \{\omega'\}$. Таким образом, относительно включения множество $\{h_i(a) | i \in I\}$ является цепью. Поэтому

$$h(a) = \bigcup_{i\in I} h_i(a)$$

Является τ-замкнутой формацией при всех $a \in \omega \bigcup \{\omega'\}$. Покажем теперь, что $H = LF_{\omega}(h)$. Пусть $G \in H$. Тогда для некоторого простого i имеет место $G \in H_i$, и поэтому

$$G/O_{\omega}(G) \in h_i(\omega') \subseteq h(\omega)$$

и

$$G/F_p(G) \in h_i(p) \subseteq h(p)$$

для всех простых $p \in \omega$. Следовательно, $G \in LF_{\omega}(h)$ и поэтому $H \subseteq LF_{\omega}(h)$. Пусть теперь $G \in LF_{\omega}(h)$ и

$$\pi = \pi(G) \bigcap \omega = \{p_1, ..., \mathrm{p}_t\}.$$

Тогда найдутся такие формации $H_i, H_{i_1}, ..., H_{i_t}$, что $G/O_{\omega}(G) \in h(\omega')$ и

$$G/F_{p_{i_j}}(G) \in h_{i_j}(p_{i_j}) .$$

В свою очередь, поскольку $\{H_i | i \in I\}$ является цепью, то найдется такая формация H_k, которая содержит все формации $H_i, H_{i_1}, ..., H_{i_t}$. Значит, $H_i, H_{i_1}, ..., H_{i_t}$

$$G \in H_k \subseteq H .$$

Следовательно, $H = LF_{\omega}(h)$, и поэтому $H \in \Sigma$. Теперь утверждение леммы получаем, применяя лемму Цорна. Теорема доказана.

Литература

1. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – Москва : Наука, 1978, – 272 с.
2. Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – Москва : Наука, 1989. – 253 с
3. Скиба, А. Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск : Беларуская навука, 1997. – 240 с.
4. Shemetkov, L.A. Multiply ω-local formations and Fitting classes of finete groups / L.A. Shemetkov, A.N. Skiba // Matem. Trudy. – 1999. – № 2. – P. 114–147.

5. Селькин, В.М. О минимальных τ-замкнутых ω-локальных не метанильпотентных формациях / В.М. Селькин // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2008. –№ 2 (47). – С. 184–188.

6. Селькин, В.М. Об одной проблеме теории ω-локальных формаций / В.М. Селькин // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2005. –№ 5 (32). – С. 166–168.

7. Селькин, В.М. О наследственных критических формациях / В.М. Селькин, А.Н. Скиба // Сибирский математический журнал. – 1996. – № 5 – С. 59–81.

8. Селькин, В.М. Формации с единственной максимальной τ-замкнутой ω-локальной подформацией / В.М. Селькин // Весцi НАН Беларусi, Сер.фiз.-матем. навук.– 2002. – № 1. – С. 25–29.

9. Селькин, В.М. Про iснування мiнiмальних τ-замкнених ω-насичених не Н-формацiй / В.М. Селькин // Український математичний журнал. – 2010. – Т. 62, № 4. – С. 572–576.

10. Go, W. Factorization theory of onegenerated Bear ω-local formations / W. Go, V.M. Selkin, K.P. Sham // Communications in Algebra.– 2007. – Vol. 35. – P. 2901–2931.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 10.11.2014