ФИЗИКА

УДК 539.12.01 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_2_51_22
EDN: IMQFYS

ПРИБЛИЖЁННОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЛОГУНОВА – ТАВХЕЛИДЗЕ С ЛИНЕЙНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ В РЕЛЯТИВИСТСКОМ КОНФИГУРАЦИОННОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

Ю.А. Гришечкин, В.Н. Капшай

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

APPROXIMATE ANALYTICAL SOLUTION OF THE LOGUNOV – TAVKHELIDZE EQUATION WITH A LINEAR POTENTIAL IN THE RELATIVISTIC CONFIGURATIONAL REPRESENTATION

Yu.A. Grishechkin, V.N. Kapshai

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Найдены приближённые аналитические решения уравнения Логунова – Тавхелидзе в интегральной форме с линейным в релятивистском конфигурационном представлении потенциалом. Полученные волновые функции выражены через функцию Макдональда, а условие квантования энергии является трансцендентным уравнением.

Ключевые слова: *уравнение Логунова – Тавхелидзе*, *релятивистское конфигурационное представление*, *линейный потенциал*, *преобразование Лапласа*, *приближённое аналитическое решение*, *функция Макдональда*, *условие квантования энергии.*

Для цитирования: *Гришечкин*, *Ю.А.* Приближённое аналитическое решение уравнения Логунова – Тавхелидзе с линейным потенциалом в релятивистском конфигурационном представлении / Ю.А. Гришечкин, В.Н. Капшай // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 2 (51). – С. 22–25. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_2_51_22 – EDN: IMQFYS

Abstract. The approximate analytical solutions of the Logunov – Tavkhelidze equation in integral form with a linear potential in the relativistic configurational representation are found. The obtained wave functions are expressed in terms of the Macdonald function while the energy quantization condition is a transcendental equation.

Keywords: *Logunov – Tavkhelidze equation*, *relativistic configurational representation*, *linear potential*, *Laplace transformation*, *approximate analytical solution*, *Macdonald function*, *energy quantization condition.*

For citation: Grishechkin, Yu.A. Approximate analytical solution of the Logunov – Tavkhelidze equation with a linear potential in the relativistic configurational representation / Yu.A. Grishechkin, V.N. Kapshai // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2022. – № 2 (51). – P. 22–25. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_2_51_22 (in Russian). – EDN: IMQFYS

Введение

Уравнение Логунова – Тавхелидзе для сферически-симметричной волновой функции $\psi(2E,r)$ системы двух скалярных частиц одинаковой массы m в релятивистском конфигурационном представлении (РКП) имеет вид [1], [2]

$$\psi(2E,r)=\int\limits_0^\infty G(E,r,r')V(r')\psi(2E,r')dr', \quad (0.1)$$

где параметр $2E$ – энергия двухчастичной системы, $r\geq 0$ – координата в РКП, $V(r)$ − потенциал, $G(E,r,r')$ – функция Грина, имеющая следующую форму:

$$G(E,r,r')=G(E,r-r')-G(E,r+r'), \quad (0.2)$$

$$G(E,r)=\frac{-i}{m\,\mathrm{sh}\,2\chi}\frac{\mathrm{sh}(\pi/2+i\chi)mr}{\mathrm{sh}(\pi mr/2)}.$$

Величина $\chi\geq 0$ в (0.2) связана с энергией $2E$ по формуле $2E=2m\,\mathrm{ch}\,\chi$.

В данной работе мы рассматриваем методы приближённого аналитического и численного решений уравнения (0.1) с линейным потенциалом в РКП следующего вида:

$$V(r)=\lambda r, \quad (0.3)$$

где $\lambda>0$ – константа связи.

1 Приближённое аналитическое решение

Выполним преобразование Лапласа [3] над уравнением (0.1). В результате получим равенство

$$\varphi(2E,z)=\int\limits_0^\infty g(E,z,r')V(r')\psi(2E,r')dr', \quad (1.1)$$

где введены обозначения для изображения волновой функции, определяемого по формуле [3]

$$\varphi(2E,z)=\int\limits_0^\infty \exp(-z\,r)\psi(2E,r)dr, \quad (1.2)$$

и интеграла

$$g(E,z,r')=\int_0^\infty \exp(-zr)G(E,r,r')dr. \quad (1.3)$$

Величина z – комплексная переменная функции-изображения. Вычисление интеграла (1.3) удобно выполнять, используя представление функции Грина в форме интеграла Фурье [1], [2]

$$G(E,r,r')= \quad (1.4)$$
$$=\frac{-2m}{\pi}\int_0^\infty \sin(\chi_p mr)G_{MR}(E,\chi_p)\sin(\chi_p mr')d\chi_p,$$

где мы использовали обозначение для функции Грина в импульсном представлении

$$G_{MR}(E,\chi_p)=\frac{1}{m^2\,\mathrm{ch}^2\,\chi_p-E^2-i0}.$$

После подстановки (1.4) в (1.3) и выполнения двойного интегрирования получим выражение:

$$g(E,z,r')=-\exp(-zr')G_{MR}(E,iz/m)+ \quad (1.5)$$
$$+\frac{2}{\mathrm{sh}\,2\chi}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\chi_s^{(-)}\exp(i\chi_s^{(-)}mr')}{z^2+(m\chi_s^{(-)})^2}-$$
$$-\frac{2}{\mathrm{sh}\,2\chi}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\chi_s^{(+)}\exp(i\chi_s^{(+)}mr')}{z^2+(m\chi_s^{(+)})^2},$$

где $\chi_s^{(+)}=\chi+i\pi s$, $\chi_s^{(-)}=-\chi+i\pi+i\pi s$ – полюса функции $G_{MR}(E,\chi_p)$. Подстановка потенциала (0.3) и выражения (1.5) в (1.1), а также учёт формулы (1.2) приводит к следующему равенству:

$$\varphi(2E,z)-\lambda G_{MR}(E,iz/m)\varphi_z(2E,z)= \quad (1.6)$$
$$=\frac{2\lambda}{\mathrm{sh}\,2\chi}\sum_{s=0}^{\infty}\left[\frac{\chi_s^{(+)}}{(m\chi_s^{(+)})^2+z^2}\varphi_z(2E,-i\chi_s^{(+)}m)-\right.$$
$$\left.-\frac{\chi_s^{(-)}}{(m\chi_s^{(-)})^2+z^2}\varphi_z(2E,-i\chi_s^{(-)}m)\right],$$

где индексом z обозначена производная по соответствующей переменной.

Предположим теперь, что в равенстве (1.6) можно пренебречь суммой, стоящей в правой части, тогда это равенство упрощается до следующего дифференциального уравнения первого порядка:

$$\varphi_z(2E,z)=\frac{1}{\lambda}G_{MR}^{-1}(E,iz/m)\varphi(2E,z). \quad (1.7)$$

Нахождение общего решения уравнения (1.7) и последующая подстановка полученной функции в формулу для обращения преобразования Лапласа [3]

$$\psi(2E,r)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\exp(zr)\varphi(2E,z)dz$$

приводит к следующему интегральному выражению для волновой функции:

$$\psi(2E,r)= \quad (1.8)$$
$$=\frac{m}{2\pi}C\int_0^\infty \cos\left[\left(r-(E^2-m^2/2)/\lambda\right)\frac{m}{2}t+\frac{m^3}{4\lambda}\mathrm{sh}\,t\right]dt,$$

где C – неизвестная константа, возникшая при решении уравнения (1.7).

Получим нерелятивистский предел интегральной формулы (1.8). Для этого выполним в ней замену переменной $x=mt/2$ и устремим массу m к бесконечности. В результате, после несложных преобразований, мы получим интегральное представление функции Эйри [3], т. е. решение уравнения Шрёдингера с запирающим потенциалом в координатном представлении [4]. Интеграл в формуле (1.8) может быть выражен через функцию Макдональда $K_\nu(z)$ [3], а волновая функция представлена в виде

$$\psi(2E,r)=$$
$$=\frac{m}{2\pi}C\exp\left(-\frac{\pi m}{4}\left(r-(E^2-m^2/2)/\lambda\right)\right)\times \quad (1.9)$$
$$\times K_{i\frac{m}{2}\left(r-(E^2-m^2/2)/\lambda\right)}\left(\frac{m^3}{4\lambda}\right).$$

Из уравнения (0.1) следует, что волновая функция обращается в ноль при $r=0.$ Взяв формулу (1.9) в указанной точке и приравняв её к нулю, получим следующее трансцендентное уравнение:

$$K_{im/(8\lambda)\left((2E)^2-2m^2\right)}\left(m^3/(4\lambda)\right)=0, \quad (1.10)$$

которое является условием квантования энергии системы $2E^{(n)}$, где $n=1,2,3,....$ Таким образом, выражения (1.9), (1.10) являются приближённым решением уравнения Логунова – Тавхелидзе с линейным в РКП потенциалом (0.3).

В следующем разделе мы найдём численные решения интегрального уравнения (0.1) с потенциалом (0.3) и выполним их сравнение с решениями, полученными описанным методом, с целью проверки его эффективности.

2 Численное решение интегрального уравнения

Для нахождения численного решения интегрального уравнения (0.1) был использован метод, неоднократно применявшийся для нахождения решений ковариантных двухчастичных уравнений в случае резонансных состояний [5]–[8]. Метод состоит в замене интеграла в уравнении (0.1) интегральной суммой по одной из квадратурных формул с последующим сведением полученных таким образом равенств к линейным системам однородных алгебраических уравнений [9]:

$$M\psi=0;$$
$$M_{mn}=\delta_{mn}-w_nG(2E,r_m,r_n)V(r_n), \quad (2.1)$$

где M – основная матрица системы, ψ – вектор, составленный из значений волновой функции в узловых точках r_n квадратурной формулы, w_n – весовые коэффициенты квадратурной формулы, δ_{mn} – элементы единичной матрицы. Условие существования ненулевых решений системы уравнений (2.1) – равенство нулю детерминанта матрицы M

$$f(2E) = \det M = 0 \qquad (2.2)$$

является уравнением относительно дискретных значений величины $2E$. Таким образом, уравнение (2.2), фактически, является условием квантования энергии. Предварительный поиск корней уравнения (2.2) целесообразно представить графически на комплексной плоскости величины $2E$. На рисунке 2.1 сплошной линией изображены нули действительной части $f(2E)$, штриховой – мнимой части, кружками обведены корни уравнения (2.2).

На рисунке 2.1 видно, что корни расположены на вещественной оси. В таблице 2.1 приведены значения обезразмеренной энергии

$$2\varepsilon_{num} = \frac{2E_{num}}{m},$$

найденные численным решением интегрального уравнения, и значения энергии

$$2\varepsilon_{appr} = \frac{2E_{appr}}{m},$$

полученные численным решением приближённого трансцендентного уравнения (1.10).

Величины энергии найдены с точностью до 6 знаков после запятой и выше. Насколько полученные величины энергии оказываются близкими можно судить по приведенным в таблице 2.1 значениям величины $\Delta = |\, 2\varepsilon_{appr} - 2\varepsilon_{num} \,|$. Как видно, с ростом величины константы связи λ точность значений энергии, найденных при решении уравнения (1.10), снижается, а с ростом номера состояния n – повышается.

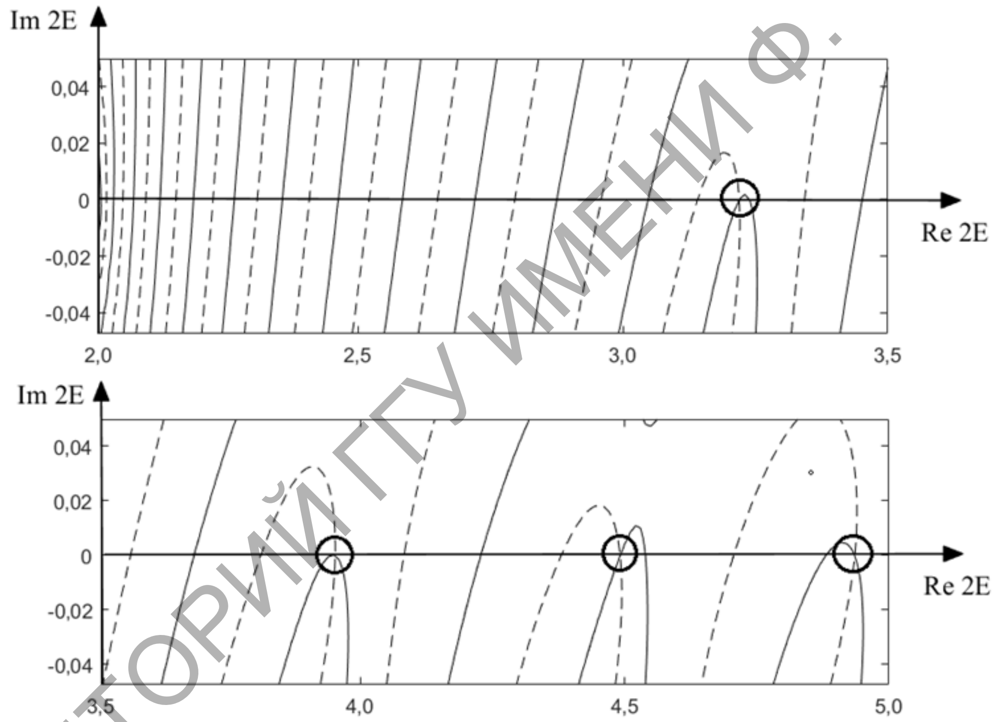

Рисунок 2.1 – Корни уравнения (2.2) при $m = 1$, $\lambda = 0,5$

Таблица 2.1 – Значения обезразмеренной энергии $2E/m$

n	$2\varepsilon_{num}$	$2\varepsilon_{appr}$	Δ	$2\varepsilon_{num}$	$2\varepsilon_{appr}$	Δ	$2\varepsilon_{num}$	$2\varepsilon_{appr}$	Δ
	$\lambda = 0,5$			$\lambda = 1,0$			$\lambda = 2,0$		
0	3,2193	3,2257	0,0064	3,8014	3,8158	0,0144	4,6203	4,6500	0,0297
1	3,9527	3,9557	0,0030	4,8325	4,8385	0,0060	6,0511	6,0624	0,0113
2	4,4914	4,4934	0,0020	5,5804	5,5841	0,0037	7,0798	7,0863	0,0065
3	4,9349	4,9363	0,0014	6,1925	6,1951	0,0026	7,9185	7,9230	0,0045
	$\lambda = 4,0$			$\lambda = 8,0$			$\lambda = 16,0$		
0	5,7570	5,8132	0,0562	7,3200	7,4196	0,0996	9,4574	9,6247	0,1673
1	7,7246	7,7444	0,0198	10,0106	10,0438	0,0332	13,1256	13,1797	0,0541
2	9,1310	9,1422	0,0112	11,9280	11,9463	0,0183	15,7367	15,7660	0,0293
3	10,2755	10,2830	0,0075	13,4868	13,4989	0,0121	17,8594	17,8786	0,0192

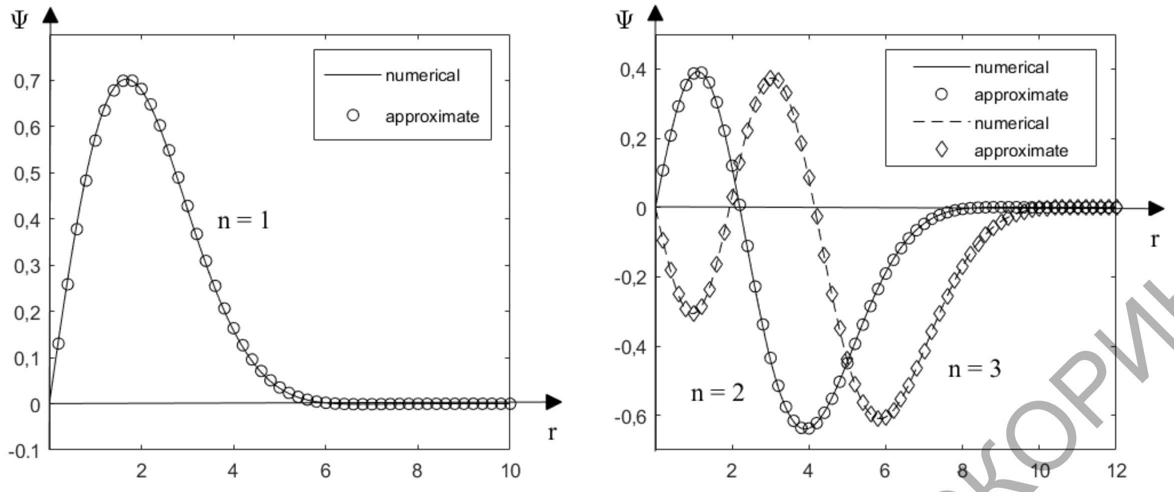

Рисунок 2.2 – Волновые функции первых трёх состояний при $m = 1$, $\lambda = 1$

На рисунке 2.2 приведены графики волновых функций, найденных аналитически по приближённой формуле (1.9) (approximate) и численным решением интегрального уравнения (numerical). Графики приближённых аналитических волновых функций визуально неотличимы от графиков, построенных на основании численных решений.

Таким образом, рассмотренный метод позволяет найти решения с хорошей точностью для указанных значений константы связи λ.

Заключение

Таким образом, в данной работе получены приближённые аналитические решения уравнения Логунова – Тавхелидзе с линейным в релятивистском конфигурационном представлении потенциалом. При этом найденные волновые функции выражены через функцию Макдональда, а собственные значения энергии являются решениями трансцендентного уравнения. Сравнение полученных решений с численными показало эффективность предложенного метода. В дальнейшем мы планируем выполнить исследования, связанные с критериями применимости рассмотренного в данной работе приближённого аналитического метода, а также использовать этот метод для решения релятивистских двухчастичных уравнений в интегральной форме с другими типами взаимодействий.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kapshai*, *V.N.* Relativistic two-particle one-dimensional scattering problem for superposition of δ-potentials / V.N. Kapshai, T.A. Alferova // J. Phys. A. – 1999. – Vol. 32. – P. 5329–5342.

2. *Kapshai*, *V.N.* One-dimensional relativistic problems on bound states and scattering for a superposition of two δ-potentials / V.N. Kapshai, T.A. Alferova // Russian Physics Journal. – 2002. – Vol. 45. – P. 1–9.

3. *Справочник по специальным функциям с формулами*, *графиками и таблицами*; под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – Москва: Наука, 1979. – 830 с.

4. *Теоретическая физика*: в 10 т. / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – 5-е изд. – Москва: Физматлит, 2002. – Т. 3: Квантовая механика: нерелятивистская теория. – 808 с.

5. *Kapshai*, *V.* Integral equations for different wave functions and their use for resonance finding / V. Kapshai, K. Shilyaeva, N. Elander // J. Phys. B. – 2009. – Vol. 42, № 4. – P. 044001.

6. *Капшай, В.Н.* Определение влияния резонансов на сечение рассеяния на основе интегрального уравнения Фредгольма / В.Н. Капшай, К.П. Шиляева // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 4 (5). – С. 10–17.

7. *Капшай*, *В.Н.* Резонансные состояния составных систем и ковариантные двухчастичные уравнения теории поля / В.Н. Капшай, К.П. Шиляева, Ю.А. Гришечкин // Ковариантные методы в теоретической физике. Физика элементарных частиц и теория относительности: Сборник научных трудов / Ин-т физики НАН Беларуси. – Минск, 2011. – С. 79–88.

8. *Гришечкин*, *Ю.А.* Метод комплексного поворота для двухчастичных уравнений в импульсном представлении и резонансные состояния / Ю.А. Гришечкин, М.С. Данильченко, В.Н. Капшай // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 3 (20) – С. 21–25.

9. *Калиткин*, *Н.Н.* Численные методы / Н.Н. Калиткин. – Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2011. – 592 с.

Поступила в редакцию 04.05.2022.

Информация об авторах
Гришечкин Юрий Алексеевич – к.ф.-м.н., доцент
Капшай Валерий Николаевич – к.ф.-м.н., доцент