Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (87), 2014

УДК 512. 542

О p-разрешимости конечной группы с заданными индексами некоторых максимальных подгрупп

Д.А. Ходанович

Пусть p>3 – наибольший простой делитель порядка конечной группы G. Доказано, что фактор-группа $G/O_p(G)$ p-нильпотентна, если индекс каждой не p-нильпотентной максимальной подгруппы есть простое число или квадрат простого числа. В частности, такая группа p-разрешима и ее p-длина не превосходит 2.

Ключевые слова: конечная группа, p-нильпотентная группа, p-разрешимая группа, максимальная подгруппа, p-длина.

Let p>3 be the largest prime divisor of the order of finite group G. We prove that the quotient group $G/O_p(G)$ is p-nilpotent if the index of every non-p-nilpotent maximal subgroup is a prime or the square of a prime. In particular, the group G is p-solvable and its p-length is at most 2.

Keywords: finite group, p-nilpotent group, p-solvable group, maximal subgroup, p-length.

Введение. Рассматриваются только конечные группы. Принятые обозначения стандартны и соответствуют [1]–[2].

В 1954 г. Б. Хупперт установил сверхразрешимость группы, у которой индексы максимальных подгрупп – простые числа [3]. В этой же работе он поставил вопрос о разрешимости группы, у которой индексы максимальных подгрупп являются простыми числами или квадратами простых чисел [3, с. 423]. Положительный ответ на этот вопрос получил Ф. Холл.

Теорема А (Ф. Холл) [2, VI. 9.4]. *Если в группе G индексы максимальных подгрупп являются простыми числами или квадратами простых чисел, то группа G разрешима.*

Пример 1. В простой группе $PSL(2,7)$ индексы максимальных подгрупп исчерпываются числами 7 и 8. Поэтому в теореме Ф. Холла дальнейшее ослабление на показатели степеней простых делителей индексов максимальных подгрупп недопустимо, т. е. группа, у которой индексы максимальных подгрупп являются простыми числами, квадратами простых чисел или кубами простых, чисел может быть неразрешимой.

Детальное изучение конечных групп с такими индексами максимальных подгрупп осуществлено в работах С.Ф. Каморникова [4], В.С. Монахова, М.В. Селькина и Е.Е. Грибовской [5], [6]. В частности, эти группы имеют ранг, не превосходящий 2. Разрешимые группы ранга, не превосходящего 3, описаны в [7].

Группой Шмидта называют ненильпотентную группу, у которой все максимальные подгруппы нильпотентны. Еще в 1924 г. О.Ю. Шмидт доказал, что группы Шмидта разрешимы и их порядок делится в точности на два различных простых числа [8]. Обзор результатов о группах Шмидта и перспективы их приложений в теории конечных групп содержится в обзорной статье В.С. Монахова [9]. Из теоремы Фробениуса о нормальных дополнениях вытекает, что группа, в которой все максимальные подгруппы p-нильпотентны, либо сама p-нильпотентна, либо является p-замкнутой группой Шмидта.

Вполне естественно возникает задача изучения строения конечной группы, у которой максимальные подгруппы либо нильпотентны, либо имеют своим индексом простое число или квадрат простого числа. В этом направлении ранее была доказана следующая теорема.

Теорема В [10, теорема 4.1]. *Если в группе G индекс каждой ненильпотентной максимальной подгруппы есть простое число, либо квадрат простого числа, то группа G разрешима и* $G\in \mathfrak{N}\mathfrak{N}_2\mathfrak{U}$.

Кроме того, для конечной разрешимой группы принадлежность $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{N}_2\mathfrak{U}$ остается истинной [10, теорема 4.3], если индекс каждой ненильпотентной максимальной подгруппы есть простое число, либо квадрат простого числа, или 8.

В работе [11] получена следующая теорема.

Теорема С [11, теорема 1.2]. *Если в группе G индекс каждой ненильпотентной максимальной подгруппы есть простое число, то группа G разрешима и либо группа $G \in \mathfrak{A}^2$, либо G p-нильпотентна и q-замкнута для некоторых простых p и q.*

В настоящей заметке мы развиваем эти результаты и доказываем следующую теорему.

Теорема. *Пусть p – наибольший простой делитель порядка группы G и $p > 3$. Если в группе G индекс каждой не p-нильпотентной максимальной подгруппы есть простое число или квадрат простого числа, то фактор-группа $G / O_p(G)$ p-нильпотентна.*

Следствие 1. *Пусть p – наибольший простой делитель порядка группы G. Если в группе G индекс каждой не p-нильпотентной максимальной подгруппы есть простое число или квадрат простого числа, то группа G p-разрешима и $l_p(G) \le 2$.*

Пример 2. В теореме 1 при $p = 3$ фактор-группа $G / O_p(G)$ может быть не 3-нильпотентной. Примером служит симметрическая группа S_4 степени 4.

Следствие 2. *Если каждая максимальная подгруппа группы G либо нильпотентна, либо ее индекс является простым числом или квадратом простого числа, то группа G разрешима.*

1. Обозначения и вспомогательные результаты

p – простое число;

p' – множество всех простых чисел отличных от p;

p-группа – группа, порядок которой есть степень p;

$O_p(G)$ – наибольшая нормальная p-подгруппа группы G;

G_p – силовская p-подгруппа группы G;

$G_{p'}$ – дополнение к силовской p-подгруппе в группе G, т. е. p'-холлова подгруппа группы G;

$\Phi(G)$ – подгруппа Фраттини группы G, т. е. пересечение всех максимальных подгрупп неединичной группы G. Если G единична, то $\Phi(1) = 1$;

$F(G)$ – подгруппа Фиттинга группы G, т. е. произведение всех нормальных нильпотентных нормальных подгрупп группы G.

Группу G называют: p-замкнутой, если G_p нормальна в G; p-нильпотентной, если $G_{p'}$ нормальна в G; p-разложимой, если G_p и $G_{p'}$ нормальны в G.

Группа называется p-разрешимой, если она обладает нормальным (p, p')-рядом

$$1 = N_0 \subseteq P_0 \subset N_1 \subset P_1 \subset N_2 \subset \ldots \subset P_l \subseteq N_l = G, \tag{1}$$

где $P_i / N_i = O_p(G / N_i)$, $N_{i+1} / P_i = O_{p'}(G / P_i)$. Наименьшее натуральное число l такое, что $N_l = G$ называется p-длиной p-разрешимой группы и обозначается через $l_p(G)$.

Стандартные обозначения, закрепленные за некоторыми классами групп: $\mathfrak{A}$ – класс всех абелевых групп; $\mathfrak{N}$ – класс всех нильпотентных групп; $\mathfrak{N}_2$ – класс всех 2-групп; $\mathfrak{N}_{2'}$ – класс всех нильпотентных групп нечетного порядка; $\mathfrak{U}$ – класс всех сверхразрешимых групп.

Произведение формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ состоит из всех групп G, для которых $G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{F}$, т. е. $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = \{G \in \mathfrak{G} \mid G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{F}\}$. Как обычно, $\mathfrak{F}^2 = \mathfrak{F}\mathfrak{F}$.

Для доказательства теорем нам потребуются следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть* $p \in \pi(G)$, G *– группа и* P *– ее силовская* p*-подгруппа. Предположим, что подгруппа* P *ненормальна в* G, *а* H *и* K *– подгруппы в* G *такие, что* $N_G(P) \subseteq K \subseteq H$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если $|H:K| = q$ *– простое число, то* $p < q$;

2) если $|H:K| = q^2$, $q \in \pi(G)$, $p > q$, *то* $p = 3$, $q = 2$.

Доказательство. Ясно, что $N_G(P) = N_K(P) = N_H(P)$ и P является силовской p-подгруппой в K и в H. По лемме об индексах

$$|H : N_H(P)| = |H : K||K : N_K(P)|, \quad (2)$$

а по теореме Силова

$$|H : N_H(P)| = 1 + hp, |K : N_K(P)| = 1 + kp, h, k \in \mathbf{N} \cup \{0\}., \quad (3)$$

Пусть $|H:K| = t$. Тогда $1 + hp = t(1 + kp)$, $t = 1 + (h - tk)p$.

1. Если число $t = q$ простое, то p делит $q - 1$, поэтому $p < q$.

2. Если $t = q^2$, $q \in \pi(G)$, то $q^2 - 1 = (h - tk)p$ и p делит $q^2 - 1$. Если $p > q$, то $q = 2$, $p = 3$. Лемма доказана.

Нам понадобятся также следующие обозначения и понятия. Пусть P – p-группа и $d(P)$ – минимальное число образующих P. По [1, лемма 3.25] $p^{d(P)} = |P / \Phi(P)|$. Положим

$$m(P) = \max\{d(U) | U \le P, U' = 1\}, \quad (4)$$

$$J(P) = < U | U \le P, U' = 1, d(U) = d(P) >, \quad (5)$$

Очевидно, что $J(P)$ – характеристическая подгруппа в P и $J(X) = J(P)$ для каждой подгруппы X из P такой, что $J(P) \subseteq X$.

Лемма 2 [14, теорема 10]. *Пусть* $p \ge 2$ *и* P *– силовская* p*-подгруппа группы* G. *Группа* G p*-нильпотентна тогда и только тогда, когда подгруппа* $N_G(Z(J(P)))$ p*-нильпотентна.*

Лемма 3 [13]. *Пусть* G *– неразрешимая группа с нильпотентной максимальной подгруппой. Тогда* $O^2(G / F(G))$ *есть прямое произведение простых групп, чьи силовские 2-подгруппы диэдральные.*

Здесь $O^2(X)$ – наименьшая нормальная подгруппа группы X, фактор-группа по которой является 2-группой.

Лемма 4 [12, теорема 2]. *Пусть* G *– не* p*-нильпотентная группа. Если группа* G *содержит* p*-разложимую максимальную подгруппу* M, *то в группе* G *нормальна либо силовская* p*-подгруппа из* M, *либо* p'*-холлова подгруппа из* M.

Лемма 5 [13]. *Пусть* G *– неразрешимая группа с нильпотентной максимальной подгруппой* M. *Если* $S(G) = 1$, *то подгруппа* M *является силовской 2-подгруппой группы* G.

Доказательство. Из леммы 3 следует, что подгруппа M имеет четный порядок, т. е. $M = M_2 \times M_{2'}$, где M_2 – неединичная силовская 2-подгруппа из M, а $M_{2'}$ – $2'$-холлова подгруппа из M. Так как $S(G) = 1$, то M_2 не нормальна в G, поэтому M_2 является силовской в G. Поскольку группа G не является 2-нильпотентной, то по лемме 4 подгруппа $M_{2'}$ нормальна в G и $M_{2'} = 1$ ввиду того, что $S(G) = 1$. Лемма доказана.

Лемма 6 [2, VI.6.9]. *Пусть* G *–* p*-разрешимая группа и* $l_p(G) > k$. *Если* $l_p(H) \le k$ *и* $l_p(G / K) \le k$ *для любых* $H \subset G$ *и* $K \lhd G$, *то справедливы следующие утверждения:*

1) $\Phi(G) = O_{p'}(G) = 1$;

2) группа G *имеет единственную минимальную нормальную подгруппу* $N = F(G) = O_p(G)$;

3) $l_p(G) = k + 1$.

3. Доказательство результатов. *Доказательство теоремы.* Предположим, что теорема неверна и пусть G – контрпример минимального порядка. Пусть N – нормальная в G подгруппа и M/N – максимальная подгруппа фактор-группы G/N. Тогда M – максимальная подгруппа группы G и по условию либо M p-нильпотентна, либо $|G:M|$ – простое число или квадрат простого числа. Так как

$$|G:M|=|G/N:M/N|, \tag{6}$$

то подгруппа M/N p-нильпотентна, либо ее индекс есть простое число или квадрат простого числа. Следовательно, для фиксированного простого числа p условия теоремы наследуют все факторгруппы группы G.

Предположим, что $O_p(G)\neq 1$. По индукции факторгруппа

$$(G/O_p(G))/O_p(G/O_p(G)), \tag{7}$$

p-нильпотентна. Так как $O_p(G/O_p(G))=1$, то $G/O_p(G)$ p-нильпотентна и теорема справедлива.

Поэтому $O_p(G)=1$ и $N_G(Z(J(P)))$ – собственная в G подгруппа. Здесь P – силовская p-подгруппа группы G. Пусть H – максимальная в G подгруппа, содержащая $N_G(Z(J(P)))$. По условию либо H p-нильпотентна, либо $|G:H|=q$ или $|G:H|=q^2$, где q – простое число. Если H p-нильпотентна, то подгруппа $N_G(Z(J(P)))$ p-нильпотентна и лемме 2 группа G p-нильпотентна, теорема справедлива.

Пусть H не p-нильпотентна. Тогда $|G:H|=q$ или $|G:H|=q^2$. Поскольку $Z(J(P))$ – характеристичекая подгруппа группы P, то $N_G(P)\le N_G(Z(J(P)))\le H$ и по лемме 1 $p=3$, $q=2$, что противоречит условию теоремы. Теорема доказана.

Доказательство следствия 1. В силу теоремы $p=3$ и группа G является разрешимой $\{2,3\}$-группой. Условия следствия наследуют все фактор-группы. По лемме 6 группа G примитивна, $O_{3'}(G)=\Phi(G)=1$ и $O_3(G)=F(G)=C_G(O_3(G))$ – является единственной минимальной нормальной в G подгруппой. Кроме того, $G=[F(G)]M$, где M – максимальная в G подгруппа с единичным ядром. Если M 3-нильпотентна, то $l_3(G)=2$ и следствие справедливо.

Значит, необходимо считать, что $|G:M|=9$ и M изоморфна подгруппе из $GL(2,3)$. Так как

$$|GL(2,3)|=(3^2-1)(3^2-3)=2^4\cdot 3, \tag{8}$$

то $l_3(M)\le 1$ и $l_3(M)\le 2$. Следствие доказано.

Доказательство следствия 2. Предположим, что утверждение неверно и пусть группа G контрпример минимального порядка. Так как условия следствия наследуют все фактор-группы, то наибольшая нормальная разрешимая подгруппа $R(G)$ единична.

По теореме Ф. Холла (теорема А) существует нильпотентная максимальная подгруппа T. По лемме 5 подгруппа T совпадает с силовской 2-подгруппой группы G.

Пусть p – наибольший простой делитель порядка группы. Ясно, что $p>3$. Так как $O_p(G)\le R(G)=1$, то по теореме 1 группа G p-нильпотентна, т. е. p'-холлова подгруппа $G_{p'}$ нормальна в G. Так как $T\subseteq G_{p'}$ и T максимальна в G, то $T=G_{p'}$ и G является $\{2,p\}$-группой. Значит G разрешима. Следствие доказано.

Литература

1. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов – Минск : Выш. Школа, 2006. – 208 с.
2. Huppert, B. Endliche Gruppen I. / B. Huppert. – Berlin–Heidelberg–New York : Springer, 1967. – 792 p.
3. Huppert, B. Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen / B. Huppert // Math. Zeitschr. – 1954. – Vol. 60. – P. 409–434.

4. Каморников, С.Ф. К теореме Ф. Холла / С.Ф. Каморников // Вопросы алгебры. – 1990. – Вып. 5. – С. 45–52.

5. Монахов, В.С. О максимальных и силовских подгруппах конечных разрешимых групп / В.С. Монахов, Е.Е. Грибовская // Математические заметки. – 2001. – Т. 70, № 4. – С. 603–612.

6. Монахов, В.С. О разрешимых нормальных подгруппах конечных групп / В.С. Монахов, М.В. Селькин, Е.Е. Грибовская // Украинский математический журнал. – 2002. – Том 54, № 7. – С. 940–950.

7. Монахов, В.С. О конечных разрешимых группах фиксированного ранга / В.С. Монахов, А.А. Трофимук // Сибирский математический журнал. – 2011. – Т. 52, № 5. – С. 1123–1137.

8. Шмидт, О.Ю. Группы, все подгруппы которых специальные / О.Ю. Шмидт // Математический сборник. – 1924. – 31. – С. 366–372.

9. Монахов, В.С. Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения / В.С. Монахов // Алгебра і теорія чисел : Праці Українського математичного конгресу. – 2001. – КиїВ : Ін-т математики НАН України, 2002. – С. 81–90.

10. Ходанович Д.А. О *p*-разрешимости конечной группы с ограниченными индексами ненильпотентных максимальных подгрупп / Д.А. Ходанович // Вестник ПГУ, серия С, Фундаментальные науки. – 2005. – № 4. – С. 18–22.

11. Lu, J. Finite groups with non-nilpotent maximal subgroups / J. Lu, L. Pang, X. Zhong // Monatsh. math. – 2013. – Vol. 171. – P. 425–431.

12. Романовский, А.В. Группы с холловыми нормальными делителями / А.В. Романовский // В кн. : Конечные группы. – Минск : Наука и техника, 1966. – С. 98–115.

13. Baumann, B. Endliche nichtauflösbare gruppen mit einer nilpotenten maximal untergruppen / B. Baumann // J. Algebra. – 1976. – Vol. 38. – P. 119–135.

14. Glauberman, G. Subgroups of finite groups / G. Glauberman // Bull. Am. Math. Soc. – 1967. – Vol. 73. – P. 1–12.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 10.11.2014