МАТЕМАТИКА

УДК 512.542
DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_2_51_58
EDN: UEJBDP

О КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ С ПОЛУСУБНОРМАЛЬНЫМИ КОРАДИКАЛАМИ СИЛОВСКИХ НОРМАЛИЗАТОРОВ

А.Ф. Васильев

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

ON FINITE GROUPS WITH SEMISUBNORMAL RESIDUALS OF SYLOW NORMALIZERS

A.F. Vasil'ev

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Пусть π – некоторое множество простых чисел, G – π-разрешимая группа и $G \in \mathfrak{E}_{\pi}\mathfrak{E}_{\pi'}$. Доказано, что если для любого простого $p \in \pi \cap \pi(G)$ и силовской p-подгруппы P из G нормализатор $N_G(P)$ π-сверхразрешим и его нильпотентный корадикал полусубнормален в G, то G π-сверхразрешима.

Ключевые слова: *конечная группа*, *силовский нормализатор*, *полусубнормальная подгруппа*, *нильпотентный корадикал*, π-*сверхразрешимая группа*.

Для цитирования: *Васильев*, *А.Ф.* О конечных группах с полусубнормальными корадикалами силовских нормализаторов / А.Ф. Васильев // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 2 (51). – С. 58–62. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_2_51_58 – EDN: UEJBDP

Abstract. Let π be some set of primes, G be a π-soluble group and $G \in \mathfrak{E}_{\pi}\mathfrak{E}_{\pi'}$. It is proved that if for any prime $p \in \pi \cap \pi(G)$ and Sylow p-subgroup P from G the normalizer $N_G(P)$ is π-supersoluble and its nilpotent residual is semisubnormal in G, then G is π-supersoluble.

Keywords: *finite group*, *Sylow normalizer*, *semisubnormal subgroup*, *nilpotent residual*, π-*supersoluble group*.

For citation: *Vasil'ev*, *A.F.* On finite groups with semisubnormal residuals of Sylow normalizers / A.F. Vasil'ev // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2022. – № 2 (51). – P. 58–62. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_2_51_58 (in Russian). – EDN: UEJBDP

Введение

В работе рассматриваются только конечные группы. Изучение принадлежности насыщенной формации $\mathfrak{F}$ групп, у которых нормализаторы силовских подгрупп лежат в $\mathfrak{F}$, восходит к результату Глаубермана [1] о том, что если $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_q$ – формация всех q-групп и нормализатор любой силовской q-подгруппы группы G принадлежит $\mathfrak{N}_q$ для любого простого делителя q порядка G, то G – примарная группа. В дальнейшем для краткости нормализаторы силовских подгрупп группы будем называть силовскими нормализаторами. В [2] в случае, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$ – формация всех нильпотентных групп, доказано, что $G \in \mathfrak{N}$ всякий раз, как силовские нормализаторы нильпотентны. В [3] установлено, что если $\mathfrak{F}$ – формация всех φ-дисперсивных групп с абелевыми силовскими подгруппами для некоторого упорядочения φ множества всех простых чисел, или $\mathfrak{F}$ – формация всех вполне факторизуемых групп, то группа G с силовскими нормализаторами из $\mathfrak{F}$ сама соответственно принадлежит $\mathfrak{F}$. К этому направлению исследований относятся также работы [4]–[6].

Отметим, что если $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}$ – формация всех сверхразрешимых групп, то из сверхразрешимости силовских нормализаторов в группе G уже не следует, что G принадлежит $\mathfrak{U}$. В качестве примера такой группы выступает симметрическая группа S_4 степени 4, в которой силовскими нормализаторами являются силовские 2-подгруппы и подгруппы, изоморфные $[Z_3]Z_2$. При этом $S_4 \notin \mathfrak{U}$, а в S_4 все силовские нормализаторы принадлежат $\mathfrak{U}$. Строение группы со сверхразрешимыми силовскими нормализаторами было исследовано в работах [7], [8]. Например, для такой группы G в [7] были получены свойства в случае $|\pi(G)| = 2$, в [8] найдены оценки нильпотентной длины в случае разрешимости G.

Группы с формационно субнормальными силовскими нормализаторами исследовались в [9], где, в частности, были найдены наследственные насыщенные формации $\mathfrak{F}$, содержащие группу с $\mathfrak{F}$-субнормальными силовскими нормализаторами.

Согласно [10] подгруппа A группы G называется *полунормальной* в G, если существует подгруппа B такая, что $G = AB$ и AX – подгруппа в G для любой подгруппы X из B. В [11] подгруппа A группы G называется *полусубнормальной* в G, если A субнормальна или полунормальна в G.

Понятие полусубнормальной подгруппы в разрешимых группах является частным случаем активно используемого в настоящее время понятия $\mathbb{P}$-субнормальной подгруппы. Напомним [12], что подгруппа H группы G называется $\mathbb{P}$-*субнормальной* в G, если либо $H = G$, либо имеется цепь подгрупп от H до G с простыми индексами. В разрешимой группе всякая полусубнормальная подгруппа является $\mathbb{P}$-субнормальной, однако обратное неверно.

В настоящей работе для π-разрешимой группы G, принадлежащей $\mathfrak{E}_{\pi}\mathfrak{E}_{\pi'}$, с π-сверхразрешимыми нормализаторами силовских p-подгрупп $(p \in \pi \cap \pi(G))$ найдена связь полусубнормальности нильпотентных корадикалов в G этих силовских нормализаторов с π-сверхразрешимостью G. Получены новые результаты для разрешимой группы со сверхразрешимыми силовскими нормализаторами.

1 Предварительные сведения

В работе используются обозначения и определения из [13] и [14].

Через $|G|$ обозначается порядок группы G,

$\pi(G)$ – множество всех простых делителей $|G|$,

$O_p(G)$ – наибольшая нормальная p-подгруппа G для простого числа p,

$\mathrm{Core}_G(M) = \cap M^x$ для всех $x \in G$ для любой подгруппы M из G,

$F(G)$ – подгруппа Фиттинга из G, т. е. наибольшая нильпотентная нормальная подгруппа G,

Z_p – циклическая подгруппа порядка p,

1 – единичная подгруппа (группа),

$\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел.

В работе используются обозначения классов групп:

$\mathfrak{S}$ – класс всех разрешимых групп,

$\mathfrak{E}_{\pi}$ – класс всех π-групп для $\pi \subseteq \mathbb{P}$,

$\mathfrak{E}_{\pi'}$ – класс всех π'-групп, где $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$,

$\mathfrak{E}_{\pi}\mathfrak{E}_{\pi'} = (G \mid \exists N \trianglelefteq G, N \in \mathfrak{E}_{\pi}$ и $G / N \in \mathfrak{E}_{\pi'})$.

***Лемма* 1.1.** *Пусть G – группа. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *Если H – субнормальная подгруппа в G*, то $H \cap K$ – субнормальная подгруппа в K [13, теорема 7.3].

(2) *Если K – субнормальная подгруппа в H и H – субнормальная подгруппа в G, то K – субнормальная подгруппа в G* [13, лемма 7.1].

(3) *Если H и K – субнормальные подгруппы в G, то $H \cap K$ – субнормальная подгруппа в G и $\langle H, K \rangle$ – субнормальная подгруппа в G* [13, теоремы 7.4 и 7.5].

(4) *Если H – субнормальная подгруппа в G и K – нормальная подгруппа в G, то HK / K субнормальна в G / K* [14, лемма A.14.1 (b)].

***Лемма* 1.2** [11, лемма 3.1]. (1) *Если H – полусубнормальная подгруппа группы G и $H \le X \le G$, то H полусубнормальна в X.*

(2) *Если H – полусубнормальная подгруппа группы G и подгруппа N нормальна в G, то HN полусубнормальна в G и HN / N полусубнормальна в G / N.*

(3) *Если H – полусубнормальная подгруппа группы G и Y – непустое множество элементов из G, то подгруппа $H^Y = \langle H^y \mid y \in Y \rangle$ полусубнормальна в G. В частности, H^g полусубнормальна в G для любого $g \in G$.*

***Лемма* 1.3** [11, лемма 3.2 (1)]. *Пусть p – наибольший простой делитель порядка группы G. Если силовская p-подгруппа P из G полусубнормальна в G, то P нормальна в G.*

***Лемма* 1.4** [14, теорема A.15.2]. *Если в группе G существует максимальная подгруппа M с* $\mathrm{Core}_G(M) = 1$, *то выполняется только одно из утверждений*:

(1) *в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа N, $N = C_G(N)$ (в частности, N абелева) и M дополняет N в G*;

(2) *в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа N, N неабелева и M является добавлением N в G*;

(3) *в G имеются только две минимальные нормальные подгруппы N_1 и N_2, каждая из них добавляема с помощью M в G. Также $C_G(N_i) = N_{3-i}$ и $N_1 \cong N_2 \cong N_1N_2 \cap M$.*

Для непустой формации $\mathfrak{F}$ через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$-*корадикал* группы G, т. е. наименьшая нормальная подгруппа из G со свойством $G / G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$. Нильпотентный корадикал – это $G^{\mathfrak{N}}$ для $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$.

***Лемма* 1.5** [13, лемма 1.2] *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация, G – группа. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) $(G / K)^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}}K / K$ *для любой* $K \trianglelefteq G$;

(2) *если $G = HK$, H – подгруппа из G и $K \trianglelefteq G$, то $H^{\mathfrak{F}}K = G^{\mathfrak{F}}K$.*

***Лемма* 1.6** [13, лемма 3.9 (1)]. *Если G – группа, то $O_p(G / C_G(H / K)) = 1$ для любого главного фактора H / K из G, $p \in \pi(H / K)$, и $F_p(G) \le C_G(H / K)$.*

Известные необходимые нам свойства π-сверхразрешимых групп (см., например, [13, с. 35], [15, гл. VI, § 8, 9]) приведем в следующей лемме.

***Лемма* 1.7.** Класс всех π-сверхразрешимых групп является наследственной насыщенной формацией; если группа G p-сверхразрешима, то она имеет p-нильпотентный коммутант; если группа G сверхразрешима, то G дисперсивна по Оре.

Напомним [13], что *дисперсивная по Оре* группа – это группа G с $|G| = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}$, в которой существуют нормальные подгруппы порядков

$$p_1^{\alpha_1},\ p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2},\ \ldots,\ p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_{n-1}^{\alpha_{n-1}},\ p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}$$

при естественном упорядочении

$$p_1 > p_2 > \cdots > p_n.$$

Нам потребуется известный результат С.А. Чунихина.

***Лемма* 1.8** [13, теорема 18.3]. *Если G – π-разрешимая группа, то* $G \in (D_\pi \mathfrak{S}) \cap D_{\pi'}$.

2 Основной результат

***Лемма* 2.1.** *Пусть P – силовская p-подгруппа группы G, N – нормальная подгруппа из G. Если $(N_G(P))^{\mathfrak{N}}$ – полусубнормальная подгруппа в G, то $(N_{G/N}(PN/N))^{\mathfrak{N}}$ – полусубнормальная подгруппа в G/N.*

Доказательство. По свойству силовских подгрупп $N_{G/N}(PN/N) = N_G(P)N/N$. Из леммы 1.5 следует, что

$$(N_{G/N}(PN/N))^{\mathfrak{N}} = (N_G(P))^{\mathfrak{N}} N/N.$$

Тогда из полусубнормальности $(N_G(P))^{\mathfrak{N}}$ в G по лемме 1.2 (2) имеем $(N_{G/N}(PN/N))^{\mathfrak{N}}$ – полусубнормальная подгруппа в G/N. □

***Лемма* 2.2.** *Если G – π-сверхразрешимая группа и $|\pi \cap \pi(G)| \geq 1$, то холлова π-подгруппа из G дисперсивна по Оре.*

Доказательство. Из π-сверхразрешимости G по лемме 1.7 следует π-сверхразрешимость холловой π-подгруппы G_π из G. Отсюда с учетом леммы 1.8 G_π дисперсивна по Оре. □

***Теорема* 2.1.** *Пусть G – π-разрешимая группа и $G \in \mathfrak{E}_\pi \mathfrak{E}_{\pi'}$. Если для любого простого $p \in \pi \cap \pi(G)$ и силовской p-подгруппы P из G нормализатор $N_G(P)$ π-сверхразрешим и его нильпотентный корадикал полусубнормален в G, то G π-сверхразрешима.*

Доказательство. Предположим, что существуют группы, для которых теорема неверна. Выберем среди них группу G наименьшего порядка. Тогда G π-разрешима, для любого $p \in \pi \cap \pi(G)$ и силовской p-подгруппы P из G ее нормализатор $N_G(P)$ π-сверхразрешим $(N_G(P))^{\mathfrak{N}}$ полусубнормален в G, а G не является π-сверхразрешимой.

Из π-разрешимости G следует, что в G имеется минимальная нормальная подгруппа N. Тогда либо N – p-группа для некоторого простого числа p, либо N – π'-группа. Так как N π-сверхразрешима, $N \neq G$.

Рассмотрим любую силовскую s-подгруппу S_1N/N из G/N, $s \in \pi \cap \pi(G)$. В G найдется силовская s-подгруппа S такая, что

$$S_1/N = SN/N.$$

Из π-сверхразрешимости $N_G(S)$ следует, что

$$N_{G/N}(S_1/N) = N_G(S)N/N \cong N_G(S)/N_G(S) \cap N$$

π-сверхразрешим. По лемме 2.1 из полусубнормальности $(N_G(S))^{\mathfrak{N}}$ в G заключаем, что

$$(N_{G/N}(S_1/N))^{\mathfrak{N}} = (N_{G/N}(SN/N))^{\mathfrak{N}}$$

полусубнормален в G/N. Так как G/N π-разрешима, по выбору G имеем G/N π-сверхразрешима.

Если в G существует еще одна минимальная нормальная подгруппа $N_1 \neq N$, то G/N_1 π-сверхразрешима. Так как класс всех π-сверхразрешимых групп является формацией, заключаем, что $G/N \cap N_1 \cong G$ π-сверхразрешима. Это противоречит выбору G.

Итак, N является единственной минимальной нормальной подгруппой в G.

Допустим, что $\Phi(G) \neq 1$. Тогда $N \leq \Phi(G)$. Поэтому $G/\Phi(G) \cong G/N/\Phi(G)/N$ π-сверхразрешима. Из насыщенности формации всех π-сверхразрешимых групп заключаем, что G π-сверхразрешима. Получили противоречие с выбором G.

Значит, $\Phi(G) = 1$. Тогда G имеет максимальную подгруппу M с $\mathrm{Core}_G(M) = 1$. Для G может выполняться только одно из утверждений (1) или (2) леммы 1.4.

Случай N – π'-группа невозможен, так как G/N π-сверхразрешима.

Предположим, что N – p-группа, где $p \in \pi \cap \pi(G)$. Тогда N абелева и для G выполняется утверждение (1) леммы 1.4. Поэтому $M \cap N = 1$ и $N = C_G(N)$.

Если $|\pi \cap \pi(G)| = 1$, то из $G \in \mathfrak{E}_\pi \mathfrak{E}_{\pi'}$ следует, что силовская p-подгруппа P из G нормальна в G и получаем противоречие $G = N_G(P)$ – π-сверхразрешимая группа.

Таким образом, $|\pi \cap \pi(G)| > 1$.

Отметим, что p является делителем $|M|$. Из леммы 1.6 и $M \cong G/C_G(N)$ следует, что $O_p(M) = 1$. Из $F(G) = N(F(G) \cap M)$ заключаем, что $|F(G)\cap M|$ не делится на p. Поскольку $F(G)$ – p-группа, имеем, что $N=F(G)$. Более того, $N=F_p(G)$, ввиду того, что $G\in\mathfrak{E}_\pi\mathfrak{E}_{\pi'}$.

Обозначим через r наибольшее простое число из $\pi\cap\pi(M)$ и через R силовскую r-подгруппу группы M. Так как $M\cong G/N$ π-сверхразрешима, по лемме 2.2 R нормальна в холловой π-подгруппе M_π из M. Из $G\in\mathfrak{E}_\pi\mathfrak{E}_{\pi'}$ следует, что $M\in\mathfrak{E}_\pi\mathfrak{E}_{\pi'}$. Поэтому M_π нормальна в M, а значит, R нормальна в M ввиду характеристичности в M_π.

Если предположить, что $r=p$, то получаем противоречие $1\neq R\le O_p(M)=1$.

Следовательно, $r>p$. Так как $M\le N_G(R)$ и $\mathrm{Core}G(M)=1$, заключаем, что $M=N_G(R)$. Индекс $|G:M|$ является p-числом, поэтому R – силовская r-подгруппа группы G и нильпотентный корадикал $M^{\mathfrak{N}}$ полусубнормален в G. Отметим, что $M^{\mathfrak{N}}\neq 1$. Так как в противном случае M была бы нильпотентной подгруппой и в M неединичная силовская p-подгруппа содержалась бы в $O_p(M)=1$.

Из абелевости M/M' следует, что $M^{\mathfrak{N}}\le M'$. Ввиду леммы 1.7 M' p-нильпотентен. Так как $G\in\mathfrak{E}_\pi\mathfrak{E}_{\pi'}$ и $O_p(M)=1$, имеем $p\notin\pi(M')$. Итак, $p\notin\pi(M^{\mathfrak{N}})$. Рассмотрим возможные случаи.

1. $M^{\mathfrak{N}}$ субнормален в G. Тогда существует цепь подгрупп

$$M^{\mathfrak{N}}=M_0\lhd M_1\lhd\cdots\lhd M_{s-1}\lhd M_s=G.$$

Так как $F_p(M_{i-1})$ характеристична в M_{i-1}, заключаем, что $F_p(M_{i-1})$ нормальна в M_i и $F_p(M_{i-1})\le F_p(M_i)$, $i=1,\ldots,s$. Тогда

$$M^{\mathfrak{N}}\le F_p(M_{i-1})\le F_p(M_s)=F_p(G)=N.$$

Получили противоречие $1\neq M^{\mathfrak{N}}\le M\cap N=1$.

2. $M^{\mathfrak{N}}$ полунормален в G. Тогда в G существует подгруппа B такая, что $G=M^{\mathfrak{N}}B$ и подгруппа $M^{\mathfrak{N}}$ перестановочна с каждой подгруппой из B. Из $p\notin\pi(M^{\mathfrak{N}})$ следует, что $p\in\pi(B)$ и силовская p-подгруппа P группы G содержится в B. Поэтому $N\le B$. Пусть $z\in N$ и $|z|=p$. Тогда $M^{\mathfrak{N}}\langle z\rangle$ – подгруппа группы G и

$$M^{\mathfrak{N}}\langle z\rangle\cap N=\langle z\rangle(M^{\mathfrak{N}}\cap N)=\langle z\rangle$$

нормальна в $M^{\mathfrak{N}}\langle z\rangle$.

Предположим, что r делит $|M^{\mathfrak{N}}|$ и M_1 – силовская r-подгруппа из $M^{\mathfrak{N}}$. Заметим, что

$$M_1=R\cap M^{\mathfrak{N}}\trianglelefteq M^{\mathfrak{N}}\trianglelefteq M.$$

Поэтому $M=N_G(M_1)$. Так как $M_1\langle z\rangle$ – подгруппа в $M^{\mathfrak{N}}\langle z\rangle$, M_1 максимальна в $M_1\langle z\rangle$. Из $|M_1\langle z\rangle:N_{M_1\langle z\rangle}(M_1)|\equiv 1(\mathrm{mod}\ r)$ и $r>p$ следует, что M_1 нормальна в $M_1\langle z\rangle$. Отсюда $z\in M_1\langle z\rangle\le N_G(M_1)=M$. Получили противоречие $1\neq z\in M\cap N=1$.

Итак, r не делит $|M^{\mathfrak{N}}|$. Откуда следует, что $|\pi\cap\pi(G)|\ge 3$.

Рассмотрим $H=PR$. Из $P=N(P\cap M)$ следует, что $H=N(P\cap M)R$ является подгруппой в G. Ввиду $N_H(R)\le N_G(R)$ имеем, что $N_H(R)$ π-сверхразрешим и $(N_H(R))^{\mathfrak{N}}\le N_G(R)^{\mathfrak{N}}$ – $\{p,r\}'$-подгруппа. Тогда $(N_H(R))^{\mathfrak{N}}=1$ субнормальна, а значит, полусубнормальна в H.

Отметим, что $N_H(P)=P$. Действительно, если бы в $N_H(P)$ имелась силовская r-подгруппа R_1, то тогда бы $R_1\trianglelefteq N_H(P)$ ввиду сверхразрешимости $N_H(P)$. Поэтому R_1 централизовала бы N и получалось бы противоречие

$$R_1\le C_G(N)=N.$$

Тогда $(N_H(P))^{\mathfrak{N}}=1$ субнормальна, поэтому и полусубнормальна в H. По выбору G из $|G|>|H|$ следует, что H сверхразрешима и $R\trianglelefteq H$. Поэтому $R\le C_K(N)\le C_G(N)=N$. Получили противоречие $1\neq R\le M\cap N=1$. □

3 Заключительные замечания

В работе найдены достаточные условия, при которых π-разрешимая группа G, принадлежащая $\mathfrak{E}_\pi\mathfrak{E}_{\pi'}$, является π-сверхразрешимой, а именно: силовский нормализатор π-сверхразрешим и его нильпотентный корадикал полусубнормален в G для любой силовской p-подгруппы p из G, где p из $\pi\cap\pi(G)$. Из теоремы 2.1 получаются новые результаты.

***Следствие* 3.1.** *Пусть G – π-разрешимая группа и $G\in\mathfrak{E}_\pi\mathfrak{E}_{\pi'}$. Если для любого простого $p\in\pi\cap\pi(G)$ и силовской p-подгруппы P из G нормализатор $N_G(P)$ π-сверхразрешим и его нильпотентный корадикал субнормален в G, то G π-сверхразрешима.*

***Следствие* 3.2.** *Пусть G – π-разрешимая группа и $G\in\mathfrak{E}_\pi\mathfrak{E}_{\pi'}$. Если для любого простого $p\in\pi\cap\pi(G)$ и силовской p-подгруппы P из G нормализатор $N_G(P)$ π-сверхразрешим и его нильпотентный корадикал полунормален в G, то G π-сверхразрешима.*

***Следствие* 3.3.** *Пусть G – π-разрешимая группа и $G\in\mathfrak{E}_\pi\mathfrak{E}_{\pi'}$. Если для любого простого $p\in\pi\cap\pi(G)$ и силовской p-подгруппы P из G*

нормализатор $N_G(P)$ *π-сверхразрешим и его коммутант субнормален в* G, *то* G *π-сверхразрешима.*

Для $\pi(G) \subseteq \pi$ теорема 2.1 включает следующие результаты.

***Следствие* 3.4.** *Если в разрешимой группе G любой силовский нормализатор сверхразрешим и его нильпотентный корадикал полусубнормален в G, то G сверхразрешима.*

***Следствие* 3.5.** *Если в разрешимой группе G любой силовский нормализатор сверхразрешим и его нильпотентный корадикал субнормален в G, то G сверхразрешима.*

***Следствие* 3.6.** *Если в разрешимой группе G любой силовский нормализатор сверхразрешим и его нильпотентный корадикал полунормален в G, то G сверхразрешима.*

***Следствие* 3.7.** *Если в разрешимой группе G любой силовский нормализатор сверхразрешим и его коммутант субнормален в G, то G сверхразрешима.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Glauberman*, *G*. Prime-power factor groups of finite groups II / G. Glauberman // Math. Z. – 1970. – Vol. 117. – P. 46–51.

2. *Bianchi*, *M*. On finite soluble groups with nilpotent Sylow normalizers / M. Bianchi, A. Gillio Berta Mauri, P. Hauck // Arch. Math. – 1986. – Vol. 47, № 3. – P. 193–197.

3. *Монахов*, *В.С*. Нормальные подгруппы конечных групп и формации с нормализаторными условиями / В.С. Монахов, М.В. Селькин // Математические заметки. – 1999. – Т. 66, № 6. – С. 867–870.

4. *Баллестер-Болинше*, *А*. О нормализаторах силовских подгрупп в конечных группах / А. Баллестер-Болинше, Л.А. Шеметков // Сибирский математический журнал. – 1999. – Т. 40, № 1. – С. 3–5.

5. *D'Aniello*, *A*. Saturated formations closed under Sylow normalizers / A. D'Aniello, C. De Vivo, G. Giordano, M.D. Pérez-Ramos // Commun. Algebra. – 2005. – Vol. 33, № 8. – P. 2801–2808.

6. *Kazarin*, *L*. On Sylow normalizers of finite groups / L. Kazarin, A. Martínez-Pastor, M.D. Pérez-Ramos // J. Algebra Appl. – 2014. – Vol. 13, № 3. – P. 1350116–1-20.

7. *Fedri*, *V*. Finite soluble groups with supersoluble Sylow normalizers / V. Fedri, L. Serena // Arch. Math. – 1988. – Vol. 50, № 1. – P. 11–18.

8. *Bryce*, *R.A*. Bounds on the Fitting length of finite soluble groups with supersoluble Sylow normalizers / R.A. Bryce, V. Fedri, L. Serena // Bull. Austral. Math. Soc. – 1991. – Vol. 44, № 1. – P. 19–31.

9. *Васильев*, *А.Ф*. О конечных группах с формационно субнормальными нормализаторами силовских подгрупп / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, А.Г. Коранчук // Математические заметки. – 2020. – Т. 108, № 5. – С. 679–691.

10. *Su*, *X*. Seminormal subgroups of finite groups / X. Su // J. Math. (Wuhan). – 1988. – Vol. 8, № 1. – P. 5–10.

11. *Monakhov*, *V.S*. On the supersolubility of a group with semisubnormal factors / V.S. Monakhov, A.A. Trofimuk // J. Group Theory. – 2020. – Vol. 23, № 5. – P. 893–911.

12. *Васильев*, *А.Ф*. О конечных группах сверхразрешимого типа / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Сибирский математический журнал. – 2010. – Т. 51, № 6. – С. 1270–1281.

13. *Шеметков*, *Л.А*. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – Москва: Наука, 1978. – 272 с.

14. *Doerk*, *K*. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New-York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

15. *Huppert*, *B*. Endliche Gruppen. I. / B. Huppert. – Berlin: Springer, 1967. – 795 s.

Поступила в редакцию 04.04.2022.

Информация об авторах

Васильев Александр Федорович – д.ф.-м.н., доцент