Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (87), 2014

УДК 530.1;539.12

Релятивистское обобщение корнельского потенциала: непертурбативная часть

К.С. Бабич, В.В. Андреев[1], А.С. Курилин[2]

Получена непертурбативная часть ядра интегрального радиального уравнения движения релятивистской кварк-антикварковой системы с корнельским потенциалом.
Ключевые слова: корнельский потенциал, кварк, релятивистская гамильтонова динамика, интегральное уравнение, базисные спиноры.

Radial kernel of the integral equation of motion of a relativistic quark-antiquark system based on non-perturbation part of the Cornell potential is calculated.
Keywords: Cornell potential, quark, relativistic Hamiltonian dynamics, integral equation, basis spinors.

Введение. При описании мезона, как системы из кварка и антикварка с конституэнтными массами m_q и m_Q широко используется корнельский потенциал, который включает кулоновскую и линейную (запирающую) части:

$$\hat{V}(r) = -\frac{4\alpha_s}{3r} + \sigma r + w,\ \ r = |\mathbf{r}|, \tag{1}$$

где σ, w – модельные параметры, α_s – константа сильной связи в квантовой хромодинамике (КХД). Такой потенциал удовлетворяет требованию конфайнмента кварков и был широко использован при расчетах спектров тяжелых мезонов [1], [2].

Расчет потенциала, как правило, делается в рамках теории возмущений, которая не всегда приемлема, если возникает необходимость учесть непертурбативные эффекты. На практике это приводит к тому, что выражение, полученное с помощью амплитуды рассеяния модифицируется тем или иным способом, поэтому потенциал, основанный на амплитуде рассеяния, всегда будет некоторым эффективным потенциалом. Такая особенность характерна для любой модели [3]–[5], описывающей релятивистские связанные системы, и модели, основанные на использовании релятивистской гамильтоновой динамики (РГД), не являются исключением.

Для описания релятивистских эффектов, а также для систем с легкими кварками (u, d и s) необходимо релятивистское обобщение потенциала (1). Такое обобщение зависит от модели, используемой для описания свойств релятивистских систем.

1. Радиальное уравнение. Радиальное уравнение для двухчастичного связанного состояния в системе центра инерции (с.ц.и.) ($\mathbf{P} = 0$) имеет вид [6]

$$\sum_{\ell',S'} \int_0^\infty V^J_{\ell',S';\ell,S}\left(k',k\right)\Phi^{J\mu}_{\ell',S'}\left(k'\right)k'^2 dk' = \left(M_\psi - \sqrt{\mathbf{k}^2+m_q^2} - \sqrt{\mathbf{k}^2+m_Q^2}\right)\Phi^{J\mu}_{\ell,S}\left(k\right). \tag{2}$$

В пуанкаре-ковариантной кварковой модели, основанной на РГД, «создание» релятивистской связанной системы начинают с построения двухчастичной системы кварков с импульсами $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ и массами m_q и m_Q, которая описывается с использованием унитарных представлений группы Пуанкаре. Затем вводят взаимодействие $\hat{V}$ таким образом, чтобы выполнялось требование пуанкаре-инвариантности и для системы взаимодействующих частиц, реализуемое в виде алгебры Пуанкаре на множестве динамических наблюдаемых системы. Это приводит к тому, что релятивистская гамильтонова динамика, как и обычная нерелятивистская квантовая механика, сохраняет вероятностную интерпретацию, а отличается тем, что генераторы преобразований, из которых строятся операторы наблюдаемых величин полного коммутирующего набора, подчиняются алгебре группы Пуанкаре, а не группе Галилея.

Импульсы кварков $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ могут быть преобразованы к общему импульсу $\mathbf{P}$ и относительному импульсу $\mathbf{k}$ для облегчения разделения в системе центра масс:

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \,, \tag{3}$$

$$\mathbf{k} = \frac{1}{2}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) + \frac{\mathbf{P}}{M_0\left(\omega_{M_0}(P) + M_0\right)}\left(m_Q^2 - m_q^2 - M_0\left[\omega_{m_Q}(p_2) - \omega_{m_q}(p_1)\right]\right), \tag{4}$$

где

$$M_0 = \sqrt{\left[\omega_{m_Q}(p_2) + \omega_{m_q}(p_1)\right]^2 - \mathbf{P}^2}\,.$$

которая представляет инвариантную массу двух невзаимодействующих кварков, а функция $\omega_m(p) = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$.

Оператор массы M для связанной системы Ψ с импульсом $\mathbf{Q}$, спином J и проекцией спина μ является суммой оператора $M_0 = \omega_{m_q}(k) + \omega_{m_Q}(k)$ и феноменологического запирающего потенциала V. Задача о собственных значениях для массового оператора может быть записана следующим образом [7]:

$$\hat{M}\left|\Psi_{\mathbf{Q},J,\mu}\right\rangle \equiv \left(M_0 + \hat{V}\right)\left|\Psi_{\mathbf{Q},J,\mu}\right\rangle = M_\Psi \left|\Psi_{\mathbf{Q},J,\mu}\right\rangle. \tag{5}$$

Здесь M_Ψ представляет массу частицы со спином J.

Волновая функция (ВФ) связанной системы спинорных кварков в РГД удовлетворяет в общем случае трехмерному интегральному уравнению [7]:

$$\sum_{\lambda_1,\lambda_2} \int < \mathbf{k}, \sigma_1, \sigma_2 \| \hat{V} \| \mathbf{k}', \lambda_1, \lambda_2 > \Phi^{J\mu}_{\mathbf{Q};\lambda_1\lambda_2}\left(\mathbf{k}'\right) d\mathbf{k}' =$$

$$= \left(M_\psi - \sqrt{\mathbf{k}^2 + m_q^2} - \sqrt{\mathbf{k}^2 + m_Q^2}\right)\Phi^{J\mu}_{\mathbf{Q};\sigma_1\sigma_2}(\mathbf{k}) \tag{6}$$

с редуцированным матричным элементом:

$$< \mathbf{P}, \mathbf{k}, \sigma_1, \sigma_2 \left|\hat{V}\right| \mathbf{P}', \mathbf{k}', \lambda_1, \lambda_2 >= \delta\left(\mathbf{P} - \mathbf{P}'\right) < \mathbf{k}, \sigma_1, \sigma_2 \| \hat{V} \| \mathbf{k}', \lambda_1, \lambda_2 > . \tag{7}$$

Для получения одномерного радиального уравнения используют разложение Клебша-Гордана группы Пуанкаре. Поскольку для численного расчета ядра удобно использовать спиральные состояния кварков, а для классификации связанных состояний используют, как правило, орбитальный момент L, полный спин S и полный момент количества движения J, вычисление ядра выполним в два этапа. На первом этапе, в системе центра инерции $\mathbf{Q} = 0$, строятся состояния с квантовыми числами J, μ и со спиральностями кварков λ_1, λ_2, которые формируют базис неприводимого двухчастичного пространства группы Пуанкаре – $\left|\mathbf{Q} = 0, J, \mu, k, \lambda_1, \lambda_2\right\rangle$. На втором этапе с помощью коэффициентов Клебша-Гордана группы вращений $C^{1/2\;1/2\;S}_{\lambda_1\;-\lambda_2\;\lambda}$ и $C^{L\,S\,J}_{0\,\lambda\,\lambda}$ получают базис состояний с квантовыми числами J, μ, L, S:

$$\left|k, J, \mu, L, S\right\rangle = \sum_{\lambda_1,\lambda_2} \sqrt{\frac{2L+1}{2J+1}}\, C^{1/2\;1/2\;S}_{\lambda_1\;-\lambda_2\;\lambda}\, C^{L\,S\,J}_{0\,\lambda\,\lambda} \left|k, J, \mu, \lambda_1, \lambda_2\right\rangle. \tag{8}$$

Такая схема вычислений была использована для расчета амплитуд однобозонного обмена нуклон-нуклонного рассеяния. Заметим что так как спин кварков равен $1/2$, то полный спин связанной системы будет равен 0 или 1, что соответствует синглетному $S = 0$ и триплетному состоянию $S = 1$ соответственно.

Радиальное уравнение для двухчастичного связанного состояния в системе центра инерции имеет вид

$$\sum_{L',S'} \int_0^\infty V^J_{L,S;L',S'}\left(k, k'\right) \Phi^{J\mu}_{L',S'}\left(k'\right) k'^2 dk' = \left(M_\psi - M_0\right) \Phi^{J\mu}_{L,S}(k), \tag{9}$$

где соответствующий оператор $V^{J}_{L',S',L,S}\left(k',k\right)=<k',J,\mu,L',S'|\hat{V}|k,J,\mu,L,S>$ потенциала системы кварк-антикварк определяется соотношением

$$V^{J}_{L',S';L,S}\left(k',k\right)=\frac{\sqrt{(2L+1)\left(2L'+1\right)}}{2J+1}\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_1',\lambda_2'} C^{1/2\ 1/2\ S}_{\lambda_1\ -\lambda_2\ \lambda}\, C^{L\,S\,J}_{0\,\lambda\,\lambda}$$

$$C^{1/2\ 1/2\ S'}_{\lambda_1'\ -\lambda_2'\ \lambda'}\, C^{L'\,S'\,J}_{0\,\lambda'\,\lambda'} <k',J,\mu,\lambda_1',\lambda_2'|\hat{V}|k,J,\mu,\lambda_1,\lambda_2>, \tag{10}$$

а матричный элемент $<k',J',\mu',\lambda_1',\lambda_2'|\hat{V}|k,J,\mu,\lambda_1,\lambda_2>$ связан с матричным элементом $<\mathbf{k}',\lambda_1',\lambda_2'|\hat{V}|\mathbf{k},\lambda_1,\lambda_2>$ посредством разложения Джакоба-Вика

$$<k',J',\mu',\lambda_1',\lambda_2'|\hat{V}|k,J,\mu,\lambda_1,\lambda_2>=\frac{\sqrt{(2J+1)\left(2J'+1\right)}}{4\pi}$$

$$\int d^2\hat{\mathbf{k}}\, d^2\hat{\mathbf{k}}'\, D^{J'}_{\mu'\,\lambda'}\left(\phi_{k'},\theta_{k'},-\phi_{k'}\right) D^{*J}_{\mu\,\lambda}\left(\phi_k,\theta_k,-\phi_k\right)\left\langle \mathbf{k}',\lambda_1',\lambda_2'|\hat{V}|\mathbf{k},\lambda_1,\lambda_2\right\rangle, \tag{11}$$

с $\lambda=\lambda_1-\lambda_2$. Функция $D^{J}_{\mu\,\lambda}\left(\phi_k,\theta_k,-\phi_k\right)$ задает матрицы неприводимого представления группы $SU(2)$ индекса J. Явный вид матрицы D определяется через сферические углы вектора относительного движения $\hat{\mathbf{k}}=\left\{\sin\theta_k\cos\phi_k,\sin\theta_k\sin\phi_k,\cos\theta_k\right\}$.

Использование теоремы Вигнера-Эккарта приводит к упрощению соотношения (11):

$$<k',J',\mu'\lambda_1',\lambda_2'|\hat{V}|k,J,\mu,\lambda_1,\lambda_2>=\delta_{J,J'}\,\delta_{\mu,\mu'}\,V^{J}_{\lambda_1',\lambda_2';\lambda_1,\lambda_2}\left(k',k\right),$$

$$V^{J}_{\lambda_1',\lambda_2';\lambda_1,\lambda_2}\left(k',k\right)=\int_{-1}^{1} d\left(\cos\beta\right)\int_{0}^{2\pi} d\phi\, D^{J}_{\lambda,\lambda'}\left(\phi,\beta,-\phi\right)\left\langle \mathbf{k}',\lambda_1',\lambda_2'|\hat{V}|\mathbf{k},\lambda_1,\lambda_2\right\rangle, \tag{12}$$

где

$$\cos\beta=\left(\mathbf{k}\mathbf{k}'\right)/\left(|\mathbf{k}||\mathbf{k}'|\right)=\cos\theta_{k'}\cos\theta_k+\cos\left(\phi_{k'}-\phi_k\right)\sin\theta_{k'}\sin\theta_k\ . \tag{13}$$

Здесь и далее для $\lambda_{1,2}$ будем использовать удвоенное значение спиральностей кварков т. е. $\lambda_{1,2}=\pm1$.

Цель данной работы – получить непертурбативную часть ядра, которое входит в радиальное уравнение (2), и построить таким образом релятивистское КХД–мотивированное ядро радиального уравнения кваркония для произвольного момента количества движения J, пертурбативную часть которого мы нашли ранее в работе [7].

Характерной особенностью наших вычислений будет использование только импульсного пространства, поскольку в релятивистском случае оно возникает естественным образом.

2. Дальнодействующий потенциал. Получение дальнодействующей (запирающей) составляющей межкваркового потенциала можно провести исходя из анализа лоренц-структуры потенциала и экспериментальных данных по спектру масс мезонов. Анализ приводит к тому, что в общем случае, имеется скалярная и векторная часть запирающего потенциала, а вкладами псевдоскалярной и аксиально-векторной частями пренебрегаем. Так же, как и в работе [8], предположим, что кварки обладают аномальным хромодинамическим моментом κ.

Непертубативная часть межкваркового потенциала, определяется как сумма векторной ($\sim K_V\left(q^2\right)$) и скалярной ($\sim K_S(q^2)$) запирающих частей [9]

$$<\mathbf{k}',\lambda_{p_1},\lambda_{p_2}|\hat{V}_{conf}|\mathbf{k},\lambda_{k_1},\lambda_{k_2}>=\frac{N_{k,k'}}{4(2\pi)^3}$$

$$\Big[\ K_V\left(q^2\right)\bar{u}_{\lambda_{p_1}}\left(p_1\right)\Big(\ \gamma_\mu+\frac{i\kappa_q}{2m_q}\sigma_{\mu\nu}\left(p_1-k_1\right)^\nu\ \Big)u_{\lambda_{k_1}}\left(k_1\right)$$

$$\bar{\upsilon}_{\lambda_{k_2}}(k_2)\left(\ \gamma^{\mu}+\frac{i\kappa_Q}{2m_Q}\sigma^{\mu\nu}(k_2-p_2)_{\nu}\ \right)\upsilon_{\lambda_{p_2}}(p_2)+$$

$$+K_S\left(q^2\right)\bar{u}_{\lambda_{p_1}}(p_1)u_{\lambda_{k_1}}(k_1)\bar{\upsilon}_{\lambda_{k_2}}(k_2)\upsilon_{\lambda_{p_2}}(p_2)\ \Big], \tag{14}$$

где

$$K_V\left(q^2\right)=\frac{8\pi A_V}{\mathbf{q}^4}+\delta\left(\mathbf{k}'-\mathbf{k}\right)B_V(k),\ \ K_S\left(q^2\right)=-\frac{8\pi A_S}{\mathbf{q}^4}+\delta\left(\mathbf{k}'-\mathbf{k}\right)B_S(k). \tag{15}$$

Используя тождество Гордона, векторная часть соотношения (14) может быть записана в виде

$$\bar{u}_{\lambda_{p_1}}(p_1)\left(\ \gamma_{\mu}+\frac{i\kappa_q}{2\,m_q}\sigma_{\mu\nu}(p_1-k_1)^{\nu}\ \right)u_{\lambda_{k_1}}(k_1)$$

$$\bar{\upsilon}_{\lambda_{k_2}}(k_2)\left(\ \gamma^{\mu}+\frac{i\kappa_Q}{2m_Q}\sigma^{\mu\nu}(p_2-k_2)_{\nu}\ \right)\upsilon_{\lambda_{p_2}}(p_2)=$$

$$=\left(1+\kappa_q\right)\left(1-\kappa_Q\right)\bar{u}_{\lambda_{p_1}}(p_1)\gamma_{\mu}u_{\lambda_{k_1}}(k_1)\bar{\upsilon}_{\lambda_{k_2}}(k_2)\gamma^{\mu}\upsilon_{\lambda_{p_2}}(p_2)+$$

$$+\frac{\kappa_q\kappa_Q}{4\,m_q m_Q}(p_1+k_1)^{\nu}(p_2+k_2)_{\nu}\bar{u}_{\lambda_{p_1}}(p_1)u_{\lambda_{k_1}}(k_1)\bar{\upsilon}_{\lambda_{k_2}}(k_2)\upsilon_{\lambda_{p_2}}(p_2)-$$

$$-\frac{\kappa_q\left(1-\kappa_Q\right)}{2\,m_q}\bar{u}_{\lambda_{p_1}}(p_1)u_{\lambda_{k_1}}(k_1)\bar{\upsilon}_{\lambda_{k_2}}(k_2)\left(\hat{p}_1+\hat{k}_1\right)\upsilon_{\lambda_{p_2}}(p_2)-$$

$$-\frac{\kappa_Q\left(1+\kappa_q\right)}{2\,m_Q}\bar{u}_{\lambda_{p_1}}(p_1)\left(\hat{p}_2+\hat{k}_2\right)u_{\lambda_{k_1}}(k_1)\bar{\upsilon}_{\lambda_{k_2}}(k_2)\upsilon_{\lambda_{p_2}}(p_2). \tag{16}$$

Расчет $<k',J,\lambda_1',\lambda_2'|\hat{V}|k,J,\lambda_1,\lambda_2>$ (12), посредством которого определяется ядро интегрального уравнения (2), проведем в два этапа. Сначала вычислим спинорную часть потенциала $\left\langle\mathbf{k}',\lambda_1',\lambda_2'|\hat{V}|\mathbf{k},\lambda_1,\lambda_2\right\rangle$, а затем проведем интегрирование по угловым переменным.

Спинорную часть потенциала (14) рассчитаем с помощью метода базисных спиноров [10], [11]. В данном подходе фермионная цепочка с оператором Q, который выражается через комбинацию матриц Дирака, может быть представлена в виде:

$$\bar{u}_{\lambda_p}\left(p,s_p\right)Q\,u_{\lambda_k}\left(k,s_k\right)=\sum_{\sigma,\rho=-1}^{1}\sum_{A,C=-1}^{1}\bar{u}_{\lambda_p}\left(p,s_p\right)u_{-\sigma}\left(b_{-C}\right)\times$$

$$\left\{\bar{u}_{\sigma}\left(b_C\right)Q\,u_{-\rho}\left(b_{-A}\right)\right\}\bar{u}_{\rho}\left(b_A\right)u_{\lambda_k}\left(k,s_k\right)$$

$$=\sum_{\sigma,\rho=-1}^{1}\sum_{A,C=-1}^{1}\bar{s}_{\lambda_p,\sigma}^{(C,1)}(p)\Gamma_{\sigma,\rho}^{C,A}[Q]s_{\rho,\lambda_k}^{(A,1)}(k),(\sigma,\rho,C,A=\pm 1), \tag{17}$$

где коэффициенты разложения по базисным спинорам $s_{\rho,\lambda_k}^{(A,B)}(k)$ для спиральных состояний определены посредством соотношений ($B=1$ соответствует фермиону, а $B=-1$ антифермиону):

$$s_{\rho,\lambda_k}^{(A,B)}(k)=f_{\lambda,\rho}^{B}D_{A\rho/2,-B\lambda_k/2}^{*1/2}\left(\phi_k,\theta_k,\phi_k\right)W_{m_k}\left(-B\rho\lambda_k\times k\right), \tag{18}$$

$$f_{\lambda,\rho}^{B}=\delta_{B,1}\lambda+\delta_{B,-1}\rho \tag{19}$$

с вспомогательной функцией

$$W_{m_k}(\pm k)=\sqrt{\omega_{m_k}(k)\pm k},\ \ k^2=\omega_{m_k}^2(k)-|\mathbf{k}|^2=m_k^2\,. \tag{20}$$

Конструкция $\Gamma(Q)$ для произведения матриц Дирака Q

$$\Gamma^{C,A}_{\sigma,\rho}(Q) \equiv \bar{u}_{\sigma}(b_C)\, Q\, u_{-\rho}(b_{-A}) \tag{21}$$

вычисляется через 4-вектора b_A и n_λ $(A, C, \rho, \sigma = \pm 1)$ посредством соотношений [10], [11]:

$$\gamma^{\mu} u_{\rho}(b_A) = 2\, b^{\mu}_A\, u_{-\rho}(b_{-A}) - 2\, A\, n^{\mu}_{-A\times\rho}\, u_{-\rho}(b_A),$$

$$\gamma_5\, u_{\rho}(b_A) = \rho\, u_{\rho}(b_A),\;\; \bar{u}_{\sigma}(b_C) u_{\rho}(b_A) = \delta_{\sigma,-\rho}\, \delta_{C,-A}\,. \tag{22}$$

Векторы b_A и n_λ образуют изотропную тетраду пространства Минковского

$$b_A = 1/2\left(l_0 + A\, l_3\right), n_\lambda = 1/2\left(\lambda\, l_1 + i\, l_2\right),\;\; A, \lambda = \pm 1, \tag{23}$$

где 4-векторы $l_A\left(A = 0,1,2,3\right)$ определяют ортонормальный базис данного пространства с метрическим тензором g т. е. $\left(l_A l_B\right) = g_{AB}$.

Заметим, что коэффициенты разложения строятся таким образом, чтобы закон преобразования двухчастичного состояния соответствовал группе Пуанкаре. Это дает возможность применить теорему Вигнера-Эккарта для матричных элементов, определяющих потенциал.

Получим, что релятивистский матричный элемент $V^{J}_{\lambda_1^{'},\lambda_2^{'};\lambda_1,\lambda_2}\left(k^{'},k\right)$ представляет сумму вида

$$V^{J}_{\lambda_{p_1},\lambda_{p_2};\lambda_{k_1},\lambda_{k_2}}\left(k^{'},k\right) = V^{J}_{I}\left(k^{'},k\right) + \frac{\kappa_q \kappa_Q}{4 m_q m_Q} V^{J}_{II}\left(k^{'},k\right) -$$

$$-\frac{\kappa_q\left(1-\kappa_Q\right)}{2\, m_q} V^{J}_{III}\left(k^{'},k\right) - \frac{\kappa_Q\left(1+\kappa_q\right)}{2 m_Q} V^{J}_{IV}\left(k^{'},k\right) + V^{J}_{S}\left(k^{'},k\right), \tag{24}$$

где слагаемые имеют вид:

$$V^{I}_{\lambda_{k_1},\lambda_{k_2},\lambda_{p_1},\lambda_{p_2}} = 2 \sum_{\sigma,\rho=-1}^{1} W_{-\sigma\lambda_{k_1},\,\rho\lambda_{k_2}}\left(k\right) W_{-\sigma\lambda_{p_1},\rho\,\lambda_{p_2}}\left(k^{'}\right)[\delta_{\lambda_{k_1},\lambda_{k_2}}\, \rho\, \sigma \times$$

$$\times G^{J,1/2,1/2}_{-\lambda_{k_1},\lambda_{k_1};\lambda_{p_1},-\lambda_{p_2}}\left[\tilde{R}^{(I)}_{L}\left(k,k^{'}\right)\right] + \delta_{\rho\lambda_{k_1},-\sigma\lambda_{k_2}}\, G^{J,1/2,1/2}_{\lambda_{k_1},-\lambda_{k_2};\lambda_{p_1},-\lambda_{p_2}}\left[\tilde{R}^{(I)}_{L}\left(k,k^{'}\right)\right]], \tag{25}$$

$$V^{II}_{\lambda_{k_1},\lambda_{k_2},\lambda_{p_1},\lambda_{p_2}} = \sum_{\sigma,\rho=-1}^{1} W_{-\sigma\lambda_{k_1},-\rho\lambda_{k_2}}\left(k\right) W_{\sigma\lambda_{p_1},\rho\,\lambda_{p_2}}\left(k^{'}\right) \times$$

$$\times[\left(k^{'2} + k^2 + \left(\omega_{m_1}\left(k\right) + \omega_{m_1}\left(k^{'}\right)\right)\left(\omega_{m_2}\left(k\right) + \omega_{m_2}\left(k^{'}\right)\right)\right) \times$$

$$\times G^{J,1/2,1/2}_{\lambda_{k_1},-\lambda_{k_2};\lambda_{p_1},-\lambda_{p_2}}\left[\tilde{R}^{(II)}\left(k^{'},k\right)\right] + 2\, k\, k^{'} G^{J,1/2,1/2}_{\lambda_{k_1},-\lambda_{k_2};\lambda_{p_1},-\lambda_{p_2}}\left[\tilde{Z}^{(II)}\left(k^{'},k\right)\right]], \tag{26}$$

$$V^{III}_{\lambda_{k_1},\lambda_{k_2},\lambda_{p_1},\lambda_{p_2}} = \frac{1}{3} \sum_{\sigma,\rho=-1}^{1} W_{-\sigma\lambda_{k_1},\,\rho\lambda_{k_2}}\left(k\right) W_{\sigma\lambda_{p_1},\rho\,\lambda_{p_2}}\left(k^{'}\right)[k^{'}\, \rho\, \lambda_{k_2} \times$$

$$\times\left(3\, G^{J,1/2,1/2}_{\lambda_{k_1},-\lambda_{k_2};\lambda_{p_1},-\lambda_{p_2}}\left[\tilde{Z}^{(III)}\left(k^{'},k\right)\right] - 2\, G^{J,1/2,3/2}_{\lambda_{k_1},-\lambda_{k_2};\lambda_{p_1},-\lambda_{p_2}}\left[\tilde{R}^{(III)}\left(k^{'},k\right)\right]\right) +$$

$$+ G^{J,1/2,1/2}_{\lambda_{k_1},-\lambda_{k_2};\lambda_{p_1},-\lambda_{p_2}}\left[\tilde{R}^{(III)}\left(k^{'},k\right)\right]\left\{\rho\left(3\lambda_{k_2} k + 2\lambda_{p_2} k^{'}\right) + 3\left(\omega_{m_1}\left(k\right) + \omega_{m_1}\left(k^{'}\right)\right)\right\}], \tag{27}$$

$$V^{IV}_{\lambda_{k_1},\lambda_{k_2},\lambda_{p_1},\lambda_{p_2}} = \frac{1}{3} \sum_{\sigma,\rho=-1}^{1} W_{-\sigma\lambda_{k_1},-\rho\lambda_{k_2}}\left(k\right) W_{-\sigma\lambda_{p_1},\rho\,\lambda_{p_2}}\left(k^{'}\right) \times$$

$$\times[k^{'}\sigma\lambda_{k_1}\left(3\, G^{J,1/2,1/2}_{\lambda_{k_1},-\lambda_{k_2};\lambda_{p_1},-\lambda_{p_2}}\left[\tilde{Z}^{(IV)}\left(k^{'},k\right)\right] - 2\, G^{J,3/2,1/2}_{\lambda_{k_1},-\lambda_{k_2};\lambda_{p_1},-\lambda_{p_2}}\left[\tilde{R}^{(IV)}\left(k^{'},k\right)\right]\right) +$$

$$+ G^{J,1/2,1/2}_{\lambda_{k_1},-\lambda_{k_2};\lambda_{p_1},-\lambda_{p_2}}\left[\tilde{R}^{(IV)}\left(k^{'},k\right)\right]\left\{\sigma\left(3\lambda_{k_1} k + 2\lambda_{p_1} k^{'}\right) - 3\left(\omega_{m_2}\left(k\right) + \omega_{m_2}\left(k^{'}\right)\right)\right\}], \quad 28)$$

где дополнительная функция $\tilde{Z}$ задается формулой

$$\tilde{Z}_L\left(k^{'},k\right) = \frac{1}{2L+1}\left[\left(L+1\right)\tilde{R}_{L+1}\left(k^{'},k\right) + L\, \tilde{R}_{L-1}\left(k^{'},k\right)\right], \tag{29}$$

а функция $G^{J,s_1,s_2}_{\lambda_{k_1},\lambda_{k_2};\lambda_{p_1},\lambda_{p_2}}\left[\Phi(x)\right]$ уравнением

$$G^{J,s_1,s_2}_{\lambda_{k_1},\lambda_{k_2};\lambda_{p_1},\lambda_{p_2}}\left[\Phi(x)\right]=\sum_{s=|s_1-s_2|}^{s_1+s_2}\sum_{\ell=|J-s|}^{J+s}\frac{(2\ell+1)}{(2J+1)}C^{s_1\ \ s_2\ \ s}_{\lambda_{k_1}/2\ -\lambda_{k_2}/2\ \lambda}\times$$
$$\times C^{s_1\ \ s_2\ \ s}_{\lambda_{p_1}/2\ -\lambda_{p_2}/2\ \lambda'}C^{\ell\,S\,J}_{0\,\lambda\,\lambda};C^{\ell\,S\,J}_{0\,\lambda'\,\lambda'}\ \Phi_\ell(x)\ , \qquad (30)$$

Скалярная часть запирающего потенциала имеет вид:

$$V^J_S\left(k,k'\right)=-G^{J,1/2,1/2}_{\lambda_{k_1},-\lambda_{k_2};\lambda_{p_1},-\lambda_{p_2}}\left[\tilde{R}^{(S)}\left(k',k\right)\right]\sum_{\sigma,\rho=-1}^{1}W_{-\sigma\lambda_{k_1},-\rho\lambda_{k_2}}(k)\,W_{\sigma\lambda_{p_1},\rho\,\lambda_{p_2}}\left(k'\right)\ , \qquad (31)$$

Функции $\tilde{R}_\ell\left(k',k\right)$, входящие в уравнения (25)–(29), выражаются однотипно в виде одномерных интегралов от $K_V\left(q^2\right)$ либо $K_S\left(q^2\right)$ в виде:

$$\tilde{R}_\ell\left(k',k\right)=\int_{-1}^{1}\frac{K_V\left(q^2\right)P_\ell(x)}{q^4}dx\ , \qquad (32)$$

Заключение. В работе получено ядро непертурбативной части потенциала для релятивистского радиального уравнения системы кварк-антикварк с произвольным полным моментом J, спиновым моментом $S=0{,}1$ и неравными массами.

С учетом расчетов, проведенных в [7] получено релятивистское ядро уравнения кварк-антикварковой системы с учетом аномальных хромодинамических моментов кварков. В дальнейшем авторы планируют определить параметры (векторной (□ $K_V\left(q^2\right)$) и скалярной (□ $K_S(q^2)$) частей) на основе современных экспериментальных данных.

Знание этой части ядра позволит удовлетворить требованию запирания кварков и далее перейти к процедуре численного решения радиального уравнения с ядром, содержащим пертурбативную и непертурбативную части для получения спектра масс кваркония.

Литература

1. Charmonium : comparison with experiment / E. Eichten, K. Gottfried, T. Kinoshita [et al.] // Phys.Rev. – 1980. – Vol. D 21. – P. 203.

2. Spectrum of Charmed Quark-Antiquark Bound States / E. Eichten, T. Kinoshita, K. Gottfried [et al.] // Phys.Rev.Lett. – 1975. – Vol. 34. – P. 369–372.

3. Savkli, C. Quark-antiquark bound states in the relativistic spectator formalism / C. Savkli, F. Gross // Phys. Rev. – 2001. – Vol. C 63. – P. 035208.

4. Adams, J.A. Solving nonperturbative flow equations / J.A. Adams [et al.] // Mod. Phys. Lett. – 1995. – Vol. A 10. – P. 2367–2380.

5. Gubankova, E. Flow equations for quark-gluon interactions in light-front QCD / E. Gubankova, C.-R. Ji, S.R. Cotanch // Phys. Rev. – 2000. – Vol. D 62. – P. 125012.

6. Keister, B.D. Relativistic Hamiltonian dynamics in nuclear and particle physics / B.D. Keister, W.N. Polyzou // Adv. Nucl. Phys. – 1991. – Vol. 20. – P. 225–479.

7. Бабич, К.С. Релятивистское обобщение корнельского потенциала : пертурбативная часть / К.С. Бабич, В.В. Андреев // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. – 2012. – 6 (75). – С. 23–30.

8. Ebert, D. Semirelativistic quark – anti-quark potential, mass spectra and weak decays into excited states of heavy – light mesons [Electronic resource] / D. Ebert, R.N. Faustov, V.O. Galkin. – 1998.– Mode of access : http://arxiv.org/pdf/hep-ph/9809285. – Date of access : 14.01.2008.

9. Galkin, V.O. Meson masses in the relativistic quark model / V.O. Galkin, A.Y. Mishurov, R.N. Faustov // Sov. J. Nucl. Phys. – 1992. – Vol. 55. – P. 1207–1213.

10. Андреев, В.В. Аналитическое вычисление фейнмановских амплитуд / В.В. Андреев // Ядерная физика. – 2003. – Т. 66, № 2. – С. 410–420.

11. Андреев, В.В. Методы вычисления амплитуд в квантовополевых теориях и моделях / В.В. Андреев. – Гомель : УО «Гомельский государственный ун-т им. Ф. Скорины», 2004. – 235 с.

[1]Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

[2]Объединенный институт

ядерных исследований,
лаборатория ядерных проблем

Поступила в редакцию 13.11.2014