

МЕТОДИЧЕСКИЕ ПРИЕМЫ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ПО РАЗДЕЛУ
«КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ»

В кинематике изучается движение тел без привлечения сведений об их массах и действующих на них сил. Основные понятия, применяемые в кинематике, – это закон движения, скорость, ускорение, траектория.

Положение материальной точки относительно выбранной системы отсчета описывается ее радиус-вектором $\vec{r}$ или ее координатами. Законом движения материальной точки называется зависимость ее радиус-вектора от времени $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Если закон движения известен, то легко найти скорость и ускорение движущейся материальной точки, вычисляя первую и вторую производные по времени от $\vec{r}(t)$. Конец радиус-вектора описывает в пространстве кривую, называемую траекторией движения точки. Задание закона движения в координатах определяет параметрическое задание траектории движения. В явном виде уравнение траектории можно получить, исключая из закона движения параметр (время), что даст связь между координатами движущейся точки, т. е. уравнение траектории.

Ясно, что, зная закон движения точки, легко полностью описать ее движение, в том числе получить все сведения о скорости, ускорении и траектории. Поэтому во многих задачах поиск решения связан с вопросом о законе движения, который может быть либо конечной целью задачи, либо промежуточным этапом. Часто удается использовать геометрические связи между координатами, из которых можно получить закон движения или другие интересующие нас сведения. Однако не всегда сделать это просто. В связи с этим рассмотрим следующую задачу, попытаемся ее решить и проанализировать решение.

Задача. Узкий пучок света от фонаря, вращающегося с угловой скоростью ω относительно вертикальной оси, попадает на вертикальную стену. Световое пятно бежит по стене горизонтальной прямой. Расстояние от фонаря до стены равно h . Найти скорость бегущего светового пятна в произвольной точке A (Рисунок 1), считая скорость света: а) бесконечной; б) конечной и равной c .

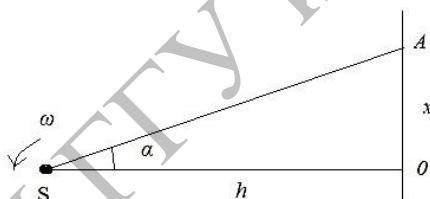


Рисунок 1

Для решения задачи найдем геометрическое соотношение, координату x интересующей нас точки A :

$$x = htg\alpha \quad (1)$$

Дифференцируя это соотношение по времени и учитывая, что $\alpha = \omega t$, находим искомую скорость светового пятна в точке A :

$$v = \frac{h\omega}{\cos^2 \alpha}. \quad (2)$$

Выражая зависимость угла α от времени t , можно считать, что выражение (1) есть закон движения светового пятна по стене. При равномерном вращении $\alpha = \alpha_0 + \omega t$; если угол отсчитывается от прямой $S0$, то $\alpha_0 = 0$ и $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Это то, что касается условия а). Труднее найти решение во втором варианте б). При учете конечной скорости движения фотонов не просто записать закон движения светового пятна из геометрических соображений. Поэтому приходится поискать иной способ решения задачи. Необходимо вернуться к определению скорости как пределу отношения перемещения точки за малый промежуток времени Δt к величине ΔS при $\Delta t \rightarrow 0$. Выберем на прямой OA точку B , находящуюся на расстоянии Δx от точки A (направление на точку B задается углом $\alpha + \Delta\alpha$), и подсчитаем промежуток времени Δt , через который световое пятно перейдет из точки A в точку B . По направлению к точке B фотоны полетят через $\Delta t = \frac{\Delta x}{c}$. Кроме того, до

точки B фотонам предстоит более длинный путь, чем до точки A . Если расстояние SA обозначить через t , то расстояние $SB = \ell + \Delta\ell$, где $\Delta\ell = \frac{h \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} \cdot \Delta\alpha$.

Следовательно, летящий в точку B фотон затратит времени на $\Delta t = \frac{\Delta\ell}{c}$ больше, чем фотон, летящий в точку A . В итоге, получим, что световое пятно окажется в точке B $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2$ позже, чем в точке A .

Учитывая, что $\Delta x = \frac{h}{\cos^2 \alpha} \cdot \Delta\alpha$, получим ответ:

$$v = \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \right) = \frac{h\omega}{\cos^2 \alpha + \frac{h\omega}{c} \cdot \sin \alpha}. \quad (3)$$

Проанализируем решение задачи в двух случаях. Построим график зависимости скорости v от угла α . Угол α изменяется в промежутке $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, поэтому график функции $v(\alpha)$ имеет вид, показанный на рисунке 2.

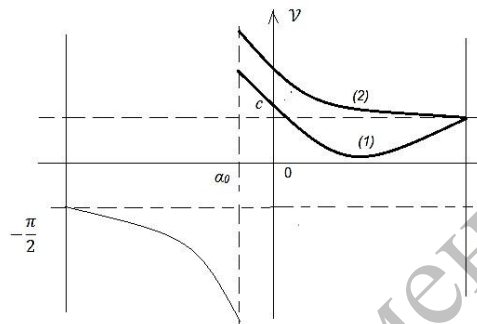


Рисунок 2

Вертикальная асимптота соответствует обращению в нуль знаменателя в уравнении (3) при

$$\sin \alpha_0 = \frac{h\omega}{2c} - \sqrt{\left(\frac{h\omega}{2c}\right)^2 + 1}. \quad (4)$$

Кривой 1 на рисунке 2 при $\alpha > \alpha_0$ соответствует $h\omega < 2c$; при $h\omega > 2c$ имеем кривую 2.

Построенный график позволяет наглядно представить себе движение светового пятна по стене.

Впервые на плоскость стены фотон попадает в точку, направление на которую определяется углом α_0 . Затем по плоскости стены побегут два световых пятна (одно вправо, другое влево) соответственно двум ветвям кривой на рисунке 2. Движение светового пятна со скоростями, превышающими скорости света c , не противоречит теории относительности, так как с помощью этого пятна нельзя передать сигнал или информацию из одной точки плоскости в другую.

Эффект раздвоения светового пятна мог бы наблюдаться при лазерном зондировании удаленных объектов, например, перистых облаков ($h \sim 10$ км), серебристых облаков ($h \sim 100$ км) или луны ($h \sim 400000$ км). Для оценки предположим, что источник света вращается с угловой скоростью, соответствующей одному обороту в секунду. Тогда из уравнений (4) находим, что раздвоение светового пятна происходит в точке с угловым направлением от нормали к плоскости объекта $\sim 89^\circ$ в первом случае, $\sim 87,5^\circ$ во втором и $\sim 7^\circ$ в третьем. Следовательно, для наблюдения раздвоения светового пятна угловая скорость вращения источника должна быть существенно больше. Например, при зондировании Луны $|\alpha_0| \sim 10'$ источник света должен делать около 45 об/с. При этом слагаемые в знаменателе в (3) равны друг другу, а скорость движения светового пятна можно рассчитывать только по полной формуле (3). Более трудным для решения оказываются задачи, в которых из геометрических соображений можно выразить скорость движения точки в виде какой-либо функции, а требуется найти закон движения. В этих случаях приходится применять интегрирование, т.е. решать дифференциальное уравнение. При решении дифференциальных уравнений можно применять метод разделения переменных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Матвеев, А. Н. Механика и теория относительности / А. Н. Матвеев. – М. : Высш. шк., 1976. – 416 с.
2. Сивухин, Д. В. Общий курс физики : учебник : в 5 т. Т. 1. Механика / Д. Н. Сивухин. – М. : Наука, 1974. – 520 с.