

ГАУССОВО ПРИБЛИЖЕНИЕ В ДИФРАКЦИОННОЙ ТЕОРИИ КОЛЬЦЕВОГО ЛАЗЕРА

А. Я. Бирман и А. Ф. Савушкин

В гауссовой модели поля проведен анализ комплекснозначных дифракционных функционалов, определяющих интенсивности и частоты генерации встречных волн кольцевого лазера.

В дифракционной теории кольцевого лазера [1, 2] частоты ν_p и интенсивности I_p встречных волн ($p=a, b$ — индекс направления распространения) определяются комплекснозначными функционалами μ_p пространственного распределения собственных колебаний невозмущенной системы — резонатора, содержащего компенсирующую линейную активную среду. При этом обусловленные дифракцией нелинейные частотные сдвиги пропорциональны дифракционным параметрам λ_p

$$\lambda_p = \frac{\text{Im } \mu_p}{\text{Re } \mu_p} \quad (1)$$

($\Delta\nu_p^{NL} \sim \lambda_p$), а интенсивности встречных волн обратно пропорциональны действительным частям функционалов [$I_p \sim (\text{Re } \mu_p)^{-1}$]. Таким образом, источником дифракционного расщепления частот встречных волн является различие фаз функционалов ($\Delta\nu_p^{NL} - \Delta\nu_{p'}^{NL} \sim \lambda_p - \lambda_{p'}$), а источником амплитудной невзаимности на центре контура усиления — различие действительных частей функционалов

$$\frac{I_p - I_{p'}}{I_p + I_{p'}} = - \frac{\text{Re } \mu_p - \text{Re } \mu_{p'}}{\text{Re } \mu_p + \text{Re } \mu_{p'}} \quad (2)$$

В модели тонкого слоя активной среды [3] дифракционные функционалы имеют вид

$$\mu_p = N \langle \varphi_{p'}(\mathbf{r}) \varphi_p(\mathbf{r}) \rangle^{-1} \langle \varphi_{p'}(\mathbf{r}) \varphi_p(\mathbf{r}) | \varphi_p(\mathbf{r})|^2 \rangle, \quad (3)$$

где $\varphi_p(\mathbf{r})$ — поперечное распределение встречных волн (собственных колебаний резонатора) в тонком слое активной среды. Угловые скобки означают интегрирование по поперечным координатам, а фактор N связан с показателем усиления G соотношением

$$N = \frac{l}{L} \frac{\exp G - 1}{G}, \quad (4)$$

где L — периметр резонатора, l — толщина слоя активной среды.

Для анализа свойств дифракционных функционалов (3) воспользуемся гауссовой аппроксимацией поля

$$\varphi_p(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{\pi w_p^2}} \exp \left\{ - \left[\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_p)^2}{2w_p^2} - ik \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_p)^2}{2R_p} \right] \right\}, \quad (5)$$

где w_p и R_p — соответственно диаметры распределений и радиусы кривизны волновых фронтов; r_p и ρ_p — центры амплитудных и фазовых распределений встречных волн в активной среде.

Расчет функционалов (3) в модели (5) дает

$$I_p = \frac{N}{\pi w_p^2} \frac{w_p^2 + w_{p'}^2 - \frac{2ik}{R} w_p^2 w_{p'}^2}{w_p^2 + 3w_{p'}^2 - \frac{2ik}{R} w_p^2 w_{p'}^2} \times \exp \left\{ - \frac{w_p^2 \left[-r_{pp'} + ikw_p^2 \left(\frac{r_p - \rho_p}{R_p} + \frac{r_p - \rho_{p'}}{R_{p'}} \right) \right]^2}{\left(w_p^2 + w_{p'}^2 - \frac{2ik}{R} w_p^2 w_{p'}^2 \right) \left(w_p^2 + 3w_{p'}^2 - \frac{2ik}{R} w_p^2 w_{p'}^2 \right)} \right\}, \quad (6)$$

где R — эффективный радиус кривизны волнового фронта поля в активной среде

$$R = \frac{2R_p R_{p'}}{R_p + R_{p'}}, \quad (7)$$

а $r_{pp'}$ — расстояние между центрами амплитудных распределений встречных волн в активной среде

$$r_{pp'} = r_p - r_{p'}. \quad (8)$$

Дифракционные параметры λ_p (1), характеризующие наряду с нелинейными частотными сдвигами асимметрию дисперсионных зависимостей [1, 2] и ширину зоны конкуренции встречных волн [4], представим в виде

$$\lambda_p = \frac{\lambda_p^{(s)} + \operatorname{tg} \psi_p}{1 - \lambda_p^{(s)} \operatorname{tg} \psi_p}, \quad (9)$$

где величины $\lambda_p^{(s)}$

$$\lambda_p^{(s)} = \frac{\frac{4k}{R} w_p^2 w_{p'}^4}{(w_p^2 + w_{p'}^2)(w_p^2 + 3w_{p'}^2) + \frac{4k^2}{R^2} w_p^4 w_{p'}^4}, \quad (10)$$

соответствуют симметричным относительно оси резонатора распределениям встречных волн, а параметры ψ_p

$$\psi_p = 4kw_p^2 w_{p'}^2 \left[(w_p^2 + w_{p'}^2)^2 + \frac{4k^2}{R^2} w_p^4 w_{p'}^4 \right]^{-1} \left[(w_p^2 + 3w_{p'}^2)^2 + \frac{4k^2}{R^2} w_p^4 w_{p'}^4 \right]^{-1} \times \left\{ \frac{w_p^2}{R} (w_p^2 + 2w_{p'}^2) \left[k^2 w_p^4 \left(\frac{r_p - \rho_p}{R_p} + \frac{r_p - \rho_{p'}}{R_{p'}} \right)^2 - r_{pp'}^2 \right] + \frac{1}{2} r_{pp'} \left(\frac{r_p - \rho_p}{R_p} + \frac{r_p - \rho_{p'}}{R_{p'}} \right) \left[(w_p^2 + w_{p'}^2)(w_p^2 + 3w_{p'}^2) - \frac{4k^2}{R^2} w_p^4 w_{p'}^4 \right] \right\} \quad (11)$$

описывают влияние асимметрии распределений, т. е. сдвига центров амплитудного и фазового распределений относительно оси резонатора и несовпадения этих центров друг с другом.

Несовпадение центров амплитудного и фазового распределений означает, что траектория гауссова пучка наклонена по отношению к оси резонатора. Закон поперечной диффузии центра амплитудного распределения можно установить, рассматривая преобразование гауссова пучка (5) параболическим оператором [5]

$$r_p(z) = r_p(z_0) \pm \frac{(z - z_0)}{R_p(z_0)} (r_p(z_0) - \rho_p(z_0)) \quad (12)$$

(верхний знак соответствует $p = a$, нижний — $p = b$). Таким образом, единичные векторы \mathbf{n}_p , характеризующие траектории встречных волн в плю-

СКОСТИ $z = z_0$

$$\mathbf{n}_p = \frac{\pm \mathbf{e}_z + \frac{\mathbf{x}_p}{R_p}}{\sqrt{1 + \frac{x_p^2}{R_p^2}}} \quad (13)$$

(\mathbf{e}_z — единичный вектор оси резонатора), определяются различием центров амплитудного и фазового распределений

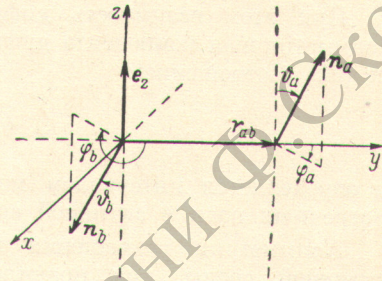
$$\mathbf{x}_p = \mathbf{r}_p(z_0) - \mathbf{p}_p(z_0). \quad (14)$$

Введем угловые координаты траекторий встречных волн в активной среде: ϑ_p (наклон траекторий относительно оси резонатора) и φ_p (азимуты центров амплитудных распределений в активной среде) (см. рисунок). Векторы \mathbf{x}_p (14) представим с помощью (13) в виде

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{n}_p \frac{R_p}{\cos \vartheta_p} \mp \mathbf{e}_z R_p. \quad (15)$$

Преобразование соотношений (11) с учетом (15) позволяет связать дифракционные

Угловые координаты траекторий встречных волн в тонком слое активной среды.



параметры λ_p с угловыми характеристиками траекторий встречных волн в активной среде

$$\begin{aligned} \psi_p = & 4kw_p^2 w_{p'}^2 \left[(w_p^2 + w_{p'}^2)^2 + \frac{4k^2}{R^2} w_p^4 w_{p'}^4 \right]^{-1} \left[(w_p^2 + 3w_{p'}^2)^2 + \frac{4k^2}{R^2} w_p^4 w_{p'}^4 \right]^{-1} \times \\ & \times \left\{ \frac{w_p^2}{R} (w_p^2 + 2w_{p'}^2) \left[kw_p^4 \left(\frac{r_{pp'}^2}{R_{p'}^2} + 2 \frac{r_{pp'}}{R_{p'}} \Phi + \theta \right) - r_{pp'}^2 \right] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{r_{pp'}^2}{R_{p'}} + r_{pp'} \Phi \right) \left[(w_p^2 + w_{p'}^2) (w_p^2 + 3w_{p'}^2) - \frac{4k^2}{R^2} w_p^4 w_{p'}^4 \right] \right\}, \quad (16) \end{aligned}$$

где θ и Φ — комбинации угловых переменных

$$\theta = \operatorname{tg}^2 \vartheta_p + \operatorname{tg}^2 \vartheta_{p'} + 2 \operatorname{tg} \vartheta_p \operatorname{tg} \vartheta_{p'} \cos(\varphi_p - \varphi_{p'}), \quad (17)$$

$$\Phi = \operatorname{tg} \vartheta_p \cos \varphi_p + \operatorname{tg} \vartheta_{p'} \cos \varphi_{p'}. \quad (18)$$

При анализе полученных соотношений рассмотрим вначале кольцевой лазер с симметричным для встречных волн расположением амплитудных и фазовых корректоров относительно тонкого слоя активной среды. Очевидно, что все параметры пространственной структуры поля в активной среде такого лазера не различаются для встречных волн

$$w_a = w_b \equiv w, \quad \vartheta_a = \vartheta_b \equiv \vartheta, \quad R_a = R_b \equiv R, \quad \varphi_a = \varphi_b = 0, \quad r_{ab} = 0. \quad (19)$$

При этом дифракционные функционалы также равны ($\mu_a = \mu_b$), а амплитудная и частотная невзаимности отсутствуют.

Симметричная компонента дифракционного параметра (10)

$$\lambda^{(*)} = - \frac{t}{1 + 2t^2} \quad (20)$$

определяется характерной комбинацией

$$t = \frac{k w^2}{2R} \quad (21)$$

и не превосходит по модулю $2^{-3/2}$. Знак $\lambda^{(s)}$ противоположен знаку радиуса кривизны волнового фронта в активной среде R .

Знак асимметричной компоненты дифракционного параметра (16)

$$\psi = 2kR \frac{t^2 \vartheta^2}{(1 + 4t^2)(1 + t^2)} \quad (22)$$

в отличие от (20) совпадает со знаком R .

Если в рассмотренную схему кольцевого лазера ввести инвертирующий элемент, характеризующий отражающие свойства однородного корректора и осуществляющий инверсию поперечной структуры бегущей волны, то пространственные распределения встречных волн в слое активной среды будут совпадать лишь с точностью до преобразования инверсии

$$w_a = w_b \equiv w, \vartheta_a = \vartheta_b \equiv \vartheta, R_a = R_b \equiv R, \varphi_a = 0, \varphi_b = \pi. \quad (23)$$

При этом взаимность дифракционных функционалов сохраняется, но асимметричная компонента дифракционного параметра описывается отличным от (22) соотношением

$$\psi = \frac{kr_{pp'}^2}{16R} \frac{1}{1 + 4t^2} \quad (24)$$

и определяется интервалом между центрами амплитудных распределений встречных волн в активной среде $r_{pp'}$.

Асимметрия размещения корректоров в резонаторе относительно слоя активной среды, как правило, приводит к различию пространственных характеристик встречных волн в активной среде и, следовательно, к не-взаимности дифракционных функционалов ($\mu_a \neq \mu_b$). Невзаимность симметричных компонент дифракционных параметров (10) определяется различием диаметров встречных волн в активной среде

$$\lambda_p^{(s)} - \lambda_{p'}^{(s)} = \frac{4kw_p^2 w_{p'}^2 (w_p^2 - w_{p'}^2)}{R} \times \\ \times \frac{(w_p^2 + w_{p'}^2)^2 + \frac{4k^2}{R^2} w_p^4 w_{p'}^4}{(w_p^2 + w_{p'}^2)^2 (w_p^2 + 3w_{p'}^2) (w_{p'}^2 + 3w_p^2) + \frac{16k^2}{R^2} w_p^4 w_{p'}^4 (w_p^2 + w_{p'}^2)^2 + \frac{16k^4}{R^4} w_p^8 w_{p'}^8}, \quad (25)$$

а фазовые характеристики распределений фигурируют при этом в виде эффективного радиуса кривизны волнового фронта R (7).

Невзаимность действительных частей симметричных компонент дифракционных функционалов

$$\operatorname{Re} \mu_p^{(s)} = \frac{N}{\pi w_p^2} \frac{(w_p^2 + w_{p'}^2) (w_p^2 + 3w_{p'}^2) + \frac{4k^2}{R^2} w_p^4 w_{p'}^4}{(w_p^2 + 3w_{p'}^2)^2 + \frac{4k^2}{R^2} w_p^4 w_{p'}^4}, \quad (26)$$

определяется аналогичными факторами. Относительная разность параметров (26), характеризующая амплитудную не-взаимность на центре контура усиления (2), в приближении слабого различия диаметров распределений встречных волн в активной среде

$$\frac{\operatorname{Re} \mu_p^{(s)} - \operatorname{Re} \mu_{p'}^{(s)}}{\operatorname{Re} \mu_p^{(s)} + \operatorname{Re} \mu_{p'}^{(s)}} = - \frac{w_p^2 - w_{p'}^2}{w_p^2 + w_{p'}^2} \frac{1 + 3t^2 + 4t^4}{(1 + t^2)(1 + 2t^2)} \quad (27)$$

Определяется относительной разностью диаметров распределений и величиной t (21).

В том же приближении не-взаимность дифракционных параметров (25)

$$\lambda_p^{(s)} - \lambda_{p'}^{(s)} = \frac{w_p^2 - w_{p'}^2}{w_p^2 + w_{p'}^2} \frac{t(1 + 4t^2)}{(1 + 2t^2)^2}. \quad (28)$$

Анализ соотношения (27) показывает, что интенсивность волны с большим диаметром поля в активной среде превосходит интенсивность встречной волны, а анализ (28) демонстрирует аналогичное соответствие для частот, если эффективный радиус кривизны волнового фронта R положителен.

Литература

- [1] А. Я. Бирман, А. Ф. Савушкин. В сб.: Теория дифракции и распространения волн, I, 483. Изд. ВНИИРИ, Ереван, 1973.
- [2] А. Я. Бирман, А. Ф. Савушкин. Опт. и спектр., 37, 317, 1974.
- [3] А. Я. Бирман, А. Ф. Савушкин. Опт. и спектр., 43, 114, 1977.
- [4] А. Я. Бирман, А. Ф. Савушкин. Опт. и спектр., 39, 206, 1975.
- [5] Н. Г. Бондаренко, В. И. Таланов. Изв. вузов, радиофизика, 7, 313, 1964.

Поступило в Редакцию 17 июля 1978 г.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ имени Ф. Скорины