

поправки из-за дифракции поля на диафрагме и усиливающей среде  $P$ . Они приводят к дифракционным смещениям частот резонатора и снимают вырождение спектра, если оно имелось.

4. Использование в кольцевых лазерах капиллярных трубок, диаметр которых соизмерим с поперечными размерами поля резонатора, приводит к необходимости построения теории все более усложняющихся моделей оптических резонаторов. Разобранная здесь одна из них полезна, в частности, для объяснения частотной невзаимности встречных волн в кольцевых лазерах.

Мне приятно поблагодарить И. Л. Берштейна и Н. И. Калитеевского за ценные замечания и поддержку при выполнении работы.

#### Литература

- [1] A. G. Fox, T. Li. Bell Syst. Techn. J., 40, 489, 1961.
- [2] В. Ф. Бойцов. Опт. и спектр., 43, 734, 1977.
- [3] В. Ф. Бойцов, Т. А. Мурина. Опт. и спектр., 34, 572, 1973.

Поступило в Редакцию 10 декабря 1978 г.

УДК 539.186.2.01 : 546.291

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТРУКТУРЫ ОПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ВОЗБУЖДЕНИЯ ПРИ ЭЛЕКТРОННО-АТОМНЫХ СТОЛКНОВЕНИЯХ

А. П. Мезенцев и В. Л. Федоров

В работе [1] впервые была выявлена структура оптических функций возбуждения ртути. Последующие работы с улучшением экспериментальной техники [2] показали, что наличие структуры характерно для большого числа функций возбуждения. Как известно, экспериментальная функция возбуждения  $f(y)$  является сверткой истинной функции возбуждения  $\varphi(x)$  с функцией распределения электронов возбуждающего пучка по энергиям  $K(y, x)$

$$f(y) = \int_a^b K(y, x) \varphi(x) dx. \quad (1)$$

Ввиду этого поиски  $\varphi(x)$  возможны по двум направлениям: а) сужение  $K(y, x)$  [в этом случае различие между  $f(y)$  и  $\varphi(x)$  стремится к нулю] и б) одновременного измерения как  $f(y)$ , так и  $K(y, x)$  с последующим решением уравнения (1).

Первый путь является традиционным и при своей реализации наталкивается на все возрастающие трудности. При реализации второго пути, т. е. при попытке точного решения уравнения (1), оказывается, что из-за экспериментальных погрешностей определения  $K(y, x)$  и  $f(y)$  задача становится «некорректно поставленной» и точное решение не имеет смысла. Ввиду этого для решения таких задач в настоящее время предложен ряд приближенных методов [3, 4], для которых полученное решение мало отличается от истинного. Известные методы характеризуются использованием априорной информации об ограниченности и определенной степени гладкости решения. Задача решения уравнения (1) с учетом априорных свойств решения и ядра уравнения может быть переведена в класс приближенно решаемых корректных. Допустим, что ядро  $K(y, x)$ , как это имеет место для возбуждающего пучка электронов, зависит только от разности своих аргументов и

$$K(y-x) \begin{cases} > 0 & (y-x) \in [-c, d] \quad c, d > 0, \\ = 0 & (y-x) \notin [-c, d] \quad |c+d| \ll |b-a|. \end{cases} \quad (2)$$

Допустим далее, что  $K(y-x)$  имеет только один максимум при  $y-x=0$  и что иско- мое решение положительно ограничено и расстояние между его экстремумами срав- нимо с  $|c+d|$ . В этом случае функция  $f(y)$  «похожа» на  $\varphi(x)$ . Интегральный характер



связи между ними сказывается прежде всего в том, что некоторые детали типа экстремумов искомого функции  $\varphi(x)$  оказываются сильно сглаженными и плохо или вовсе не отражаются в функции  $f(y)$ . В этой ситуации представляется рациональным использование информации о структуре  $\varphi(x)$ , содержащейся в  $f(y)$ . Наиболее просто указанная задача решается после алгебраизации уравнения (1). Алгебраизацию будем производить на эквидистантной по аргументу сетке

$$\sum_{i=-m}^{n+l} K_{ji}\varphi_i = f_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

где  $K_{ji} = K_{j-i}$  — матрица, порожденная ядром уравнения (1),  $\varphi_i$  — компонента искомого вектора,  $f_j$  — компонента вектора, образованного на множестве известных значений функции  $f(y)$ .

Соотношение (3) можно представить в виде

$$\sum_{i=1}^n K_{ji}\varphi_i = f_j - \Delta_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (4)$$

где

$$\Delta_j = \sum_{i \in [-m, 0] \cup [n+1, n+l]} K_{ji}\varphi_i. \quad (5)$$

Если выполняются добавочные условия

$$f_j \begin{cases} > 0 & 1 < j < n, \\ = 0 & j = 1, n, \end{cases} \quad (6)$$

то, учитывая свойства матрицы  $K_{ji}$ , легко показать, что  $\Delta_j = 0$ .

Если условия (6) не выполняются, то  $\Delta_j$  можно рассматривать как некоторую неопределенность вектора  $\mathbf{f}$ , типа систематической погрешности, которая должна быть конкретизирована или оценена из априорной информации об искомом решении. Отметим, что при принятом характере  $K_{ji}$  неопределенность вектора  $\mathbf{f}$  сконцентрирована только вблизи границ его определения.

Учитывая тот факт, что при практической постановке задачи величины  $K_{ji}$  и  $f_j$  известны приближенно, будем искать решение системы (4) методом наименьших квадратов и одновременно используем информацию о структуре  $\varphi$  по аналогии с методом регуляризации Тихонова [3]. Задача в этом случае сведется к отысканию минимума функционала

$$|K\varphi - \mathbf{f}|^2 + \beta |\varphi - \mathbf{f}|^2 = \min, \quad (7)$$

где  $\beta > 0$  — параметр регуляризации.

Условие минимума функционала (7) определяется уравнением

$$(K'K + \beta E)\varphi = (K' + \beta E)\mathbf{f}, \quad (8)$$

где  $K'$  — матрица, транспонированная по отношению к  $K$ ,  $E$  — единичная матрица.

Легко видеть, что при  $\beta \rightarrow \infty$  каждая компонента  $\varphi$  в уравнении (8) заменяется соответствующей компонентой вектора  $\mathbf{f}$ , а при  $\beta \rightarrow 0$  уравнение эквивалентно (3), решаемому методом наименьших квадратов.

Параметр регуляризации  $\beta$  определяется, исходя из соображений о величине допустимой ошибки решения системы (8). Определим ошибку в решении системы (8), связанную с неточностью задания величин  $K_{ji}$  и  $f_j$ . Допустим, что выполняются условия (6). Принимая элементы матрицы  $K$  и компоненты вектора  $\mathbf{f}$  случайными независимыми величинами с нормальными распределениями и дисперсиями  $\sigma_k^2$  для элементов матрицы  $K$  и  $\sigma_f^2$  для компонент вектора  $\mathbf{f}$  соответственно, можно показать, что

$$M. O. (d\varphi_i)^2 = \sigma_k^2 \varepsilon_{ii} + \sigma_f^2 \omega_{ii}, \quad (9)$$

где

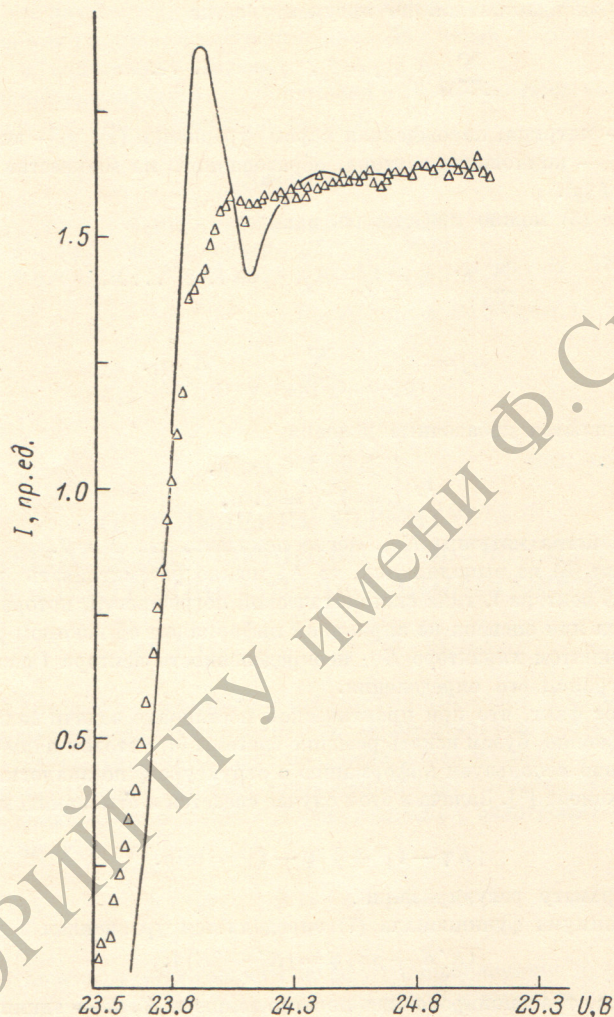
$$\varepsilon_{ii} = \{\alpha [K'K | \varphi|^2 + E |K\varphi - \mathbf{f}|^2 + 2K(K\varphi - \mathbf{f})] \alpha'\}_{ii}, \\ \omega_{ii} = \{\alpha |K + \beta E|^2 \alpha'\}_{ii} \quad \text{и} \quad \alpha = (K'K + \beta E)^{-1}.$$

По описанной методике были обработаны результаты эксперимента для оптической функции возбуждения уровня  $4^1D$ . Экспериментальные данные получались из измерения излучения линии  $\lambda = 4922 \text{ \AA}$  методом, описанным в [5]. Аппаратная функция  $K(y, x)$  (распределение электронов по энергиям) измерялась методом задерживающего поля с электрическим дифференцированием. Полуширина распределения электронов



по энергиям оказалась равной 0.28 эВ. На рисунке приведены экспериментальные данные (нанесены треугольниками) и результаты обработки этих данных (сплошная кривая).

В результате обработки выявился характерный максимум вблизи порога возбуждения.



Восстановление функции возбуждения уровня  $4^1D$ .

$P=10^{-2}$  тор,  $\beta=0.3$ , погрешность восстановления 5%.

Приведенные данные позволяют сделать вывод, что предлагаемый метод расшифровки экспериментальных данных оказывается достаточно эффективным для выявления структуры оптических функций возбуждения.

#### Литература

- [1] С. Э. Фриш, И. П. Запесочный. Изв. АН СССР, сер. физ., 19, 5, 1956.
- [2] И. П. Запесочный, О. Б. Шпенник. ЖЭТФ, 50, 890, 1966.
- [3] А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. Методы решения некорректных задач. «Наука», М., 1974.
- [4] В. Ф. Турчин, В. П. Козлов, М. С. Малкевич. Усп. физ. наук, 102, 345, 1970.
- [5] А. П. Мезенцев, В. Л. Федоров. Опт. и спектр., 43, 589, 1977.

Поступило в Редакцию 9 октября 1978 г.