УДК 621.373 : 535.01

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ МОД И ФЛУКТУАЦИЯХ ИЗЛУЧЕНИЯ В МНОГОМОДОВОМ ЛАЗЕРЕ

Г. В. Кривощеков и *В. С. Смирнов*

Рассмотрено влияние фазового взаимодействия флуктуирующих мод на устойчивость генерации и модовый состав излучения.

1. Вопросу взаимодействия мод и устойчивости многомодовой генерации посвящено достаточно много работ [1–3]. В обзоре [4] проанализированы физические механизмы, приводящие к нестационарной генерации в многомодовых лазерах, при этом рассмотрены различные типы лазеров и учитываются их конкретные особенности. В этом же обзоре исследованы некоторые вопросы, касающиеся флуктуаций излучения многомодовых лазеров.

В настоящей работе мы хотим обратить внимание на одно обстоятельство, которое обычно игнорируется при рассмотрении многомодового режима генерации. Для определенности будем говорить о твердотельном лазере с однородно уширенной линией усиления и резонатором типа Фабри—Перо, в котором при заданной накачке возможна генерация M аксиальных мод и $M \gg 1$. В этом случае, помимо амплитудного взаимодействия, приводящего к перераспределению энергии между модами, существует фазовое взаимодействие мод, имеющее вид высокочастотных межмодовых биений. Это взаимодействие мало (по параметру $1/M^2$) и не приводит к заметному искажению стационарных решений. Однако оно может быть сравнимо с энергией диссипации, связанной с конечным временем жизни возбужденного атома $1/\gamma$. Высокочастотный характер взаимодействия приводит к тому, что в определенном масштабе времени оно оказывается эквивалентным случайной δ-коррелированной силе. В такой ситуации межмодовые биения, даже с достаточно малой амплитудой, могут существенно изменить характер генерации. В условиях приближенного сохранения полной энергии [4] относительные флуктуации в энергиях отдельных мод становятся аномально велики $\sim\sqrt{M}$ [см. формулу (22)]. При этом асимптотически подавляются все моды, кроме одной, энергия и положение в спектре которой оказываются не определены. Такой режим генерации можно назвать режимом генерации одномодовых флуктуаций. Время выхода в него пропорционально $\ln M$ и обратно пропорционально коэффициенту корреляции случайных сил f_m [формула (18)]. Следут подчеркнуть, что рассматриваемое фазовое взаимодействие не связано с высокочастотными межмодовыми биениями инверсии, а обусловлено рассеянием на стационарных пространственных неоднородностях инверсии из одной аксиальной моды в другие.

2. Будем придерживаться традиционного подхода и разложим поле в ряд по собственным функциям резонатора $U_m(r, t)$

$$\mathcal{E} = e^{-i\omega t} \sum E_m(t)\, U_m(r, t), \qquad (1)$$

$$U_m(r, t) = U_m(r)\, e^{-i\Omega_m t}, \quad \langle U_m(r)\, U_n(r)\rangle_L = \delta_{mn}.$$

Здесь выделена оптическая частота ω, а частоты резонатора Ω_m отсчитываются от ω, т. е. $\Omega_m \ll \omega$. Амплитуды мод E_m — медленные функции времени, $dE_m/dt \ll \omega E_m$. Потери на излучение считаем равномерно распределенными по объему резонатора и учтем их введением в уравнения Максвелла потерь, пропорциональных ширине линии резонатора ν. Тогда $U_m(r)$ — собственные функции идеального резонатора, а символ $\langle \ldots \rangle_L$ означает усреднение по его объему.

Как известно, ширина линии люминесценций $\gamma_\perp$ твердотельных лазеров велика по сравнению со всеми характерными частотами задачи. Этот факт позволяет исключить из уравнений для матрицы плотности ее недиагональный элемент и записать уравнение для изменения числа активных атомов среды N, отнесенного к числу атомов, создаваемых накачкой

$$\left(\frac{1}{\gamma}\frac{d}{dt}+1\right)N = 1 - N\sum\frac{|E_m|^2 U_m^2(r)}{1+\Delta_m^2}. \tag{2}$$

Здесь и в дальнейшем используется специальная система единиц $\frac{2d_{ab}}{\hbar\sqrt{\gamma\gamma_\perp}}=1$ (d_{ab} — дипольный момент рабочего перехода на частоте ω_{ab}, в которой энергия поля безразмерна и порядка единицы. Параметр $\Delta_m = (\omega - \omega_{ab} + \Omega_m)/\gamma_\perp$ имеет смысл частоты резонатора, отсчитанной от центра линии усиления, измеряемой в единицах $\gamma_\perp$.

Уравнения для медленных амплитуд E_m получаются после подстановки (1) в уравнения Максвелла, усреднения по высокочастотным оптическим колебаниям и использования ортогональности функций

$$\left(\frac{2}{\nu}\frac{d}{dt}+1\right)E_m = \frac{\eta}{1+\Delta_m^2}\left\{E_m\langle NU_m^2(r)\rangle_L + \sum E_n e^{i(\Omega_n-\Omega_m)t}\langle U_m(r)\,NU_m(r)\rangle_L\right\}, \tag{3}$$

η — относительное превышение подкачки над пороговым значением. Затягиванием частоты пренебрегаем.

В правой части уравнений (3) выделено два слагаемых: первое описывает амплитудное взаимодействие мод, второе — высокочастотное — фазовое взаимодействие. Подчеркнем, что в (2) фазовое взаимодействие отброшено, поскольку оно дает пренебрежимо малый вклад в решение, порядка $\gamma/\Omega_m \ll 1$. В (3) межмодовые биения тоже дают малый вклад. Однако, как будет видно дальше, их надо сравнивать с малой величиной, а именно с энергией диссипации, с которой они могут быть сравнимы.

Из исследования системы балансных уравнений при малых энергиях следует, что малые отклонения от стационарных решений, осциллируя медленно, со скоростью $\gamma\eta/2$, затухают. Причем у частот осцилляций есть два характерных размера: $\Omega = \sqrt{\gamma\nu(\eta-1)}$ и $\Omega/\sqrt{M}$ при $M \gg 1$ [8]. Поэтому целесообразно выделить максимальную частоту Ω, переходя к безразмерному времени $\tau = \Omega t$. Тогда в (2), (3) явно появляется малый параметр задачи ε, равный скорости затухания в единицах Ω ($\varepsilon = \gamma\eta/2\Omega$). Причем из (3) следует, что отклонения перенаселенности от стационарного значения $\bar{N}(r)$ порядка ε, и систему (2), (3) можно эффективно линеаризовать по N. Ищем решение в виде

$$\left.\begin{aligned} N(r,t) &= N(r) + \frac{\Omega}{\nu\eta}\tilde{N}(r,t),\\ E_m &= \sqrt{W_m}\,e^{i\varphi_m}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Подставляя эти решения в (2), (3), приходим к следующей системе уравнений:

$$\frac{1}{W_m}\frac{dW_m}{d\tau} = \frac{\langle\tilde{N}U_m^2(r)\rangle}{1+\Delta_m^2} + f_m, \tag{5}$$

$$f_m = \frac{\nu\eta}{\Omega}\sum\sqrt{\frac{W_n}{W_m}}\left\langle U_m(r)\,U_n(r)\left(\bar{N}+\frac{\Omega}{\nu\eta}\tilde{N}\right)\right\rangle_L \cos\left[\varphi_n-\varphi_m-(\Omega_n-\Omega_m)t\right], \tag{6}$$

$$\frac{d\tilde{N}}{d\tau} = -\frac{\gamma}{\Omega}\tilde{N}\left(1+\sum\frac{W_m U_m^2(r)}{1+\Delta_m^2}\right) - \frac{\eta\bar{N}\gamma\nu}{\Omega^2}\sum(W_m-\bar{W}_m)\frac{U_m^2(r)}{1+\Delta_m^2}. \tag{7}$$

Стационарные значения $\bar{N}$, $\bar{W}_m$ определяются обычным образом

$$\bar{N} = \frac{1}{1 + \sum \frac{\bar{W}_m U_m^2(r)}{1+\Delta_m^2}}, \quad \frac{\eta \langle \bar{N} U_m^2(r) \rangle}{1+\Delta_m^2} = 1. \tag{8}$$

Предполагается, что решения системы (8) существуют. Если это так, то вопрос об их устойчивости может быть решен в общем виде. Умножим уравнения (7) на $U_m^2(r)/(1+\Delta_m^2)$, усредним по объему резонатора и введем обозначения

$$\bar{N}_m = \frac{\langle \bar{N} U_m^2(r) \rangle_L}{1+\Delta_m^2}, \quad \bar{N}_{mn} = \frac{\langle \bar{N} U_m^2 U_n^2 \rangle_L}{(1+\Delta_m^2)(1+\Delta_n^2)}, \quad \bar{N}_{mn} = \frac{\langle \bar{N} U_m^2 U_n^2 \rangle_L}{(1+\Delta_m^2)(1+\Delta_n^2)}.$$

Далее составим билинейную комбинацию $(1/2) \sum A_{nm} \bar{N}_m \bar{N}_n$ с некоторой, пока произвольной, симметричной матрицей A и продифференцируем ее по времени, используя (5), (7). Матрица $\bar{N}_{mn}$ неособенная и положительно определена. Поэтому можно выбрать $A = \bar{N}^{-1}$ и диагонализовать квадратичную форму $(\bar{N}, A\bar{N})$ преобразованием $\bar{N}_m = \bar{N}_{mn}^{1/2} p_n$. После таких преобразований введем эффективный гамильтониан

$$H = \sum_m \left\{ \frac{p_m^2}{2} + \frac{\gamma\nu\eta}{\Omega^2} \bar{W}_m \left(\frac{W_m}{\bar{W}_m} - 1 - \ln \frac{W_n}{\bar{W}_m} \right) \right\}. \tag{9}$$

Очевидно $H \geqslant 0$, причем минимум достигается в стационарной точке $p_m = 0$, $W_m = \bar{W}_m$. Изменение эффективной полной энергии $E = H$ во времени описывается уравнением

$$\frac{dE}{d\tau} = -\frac{\gamma}{\Omega} \left\{ \sum p_m^2 + \sum p_m \bar{N}_{mk}^{1/2} \bar{N}_{kn} W_n \right\} + \frac{\eta\gamma\nu}{\Omega^2} \sum f_m (W_m - \bar{W}_m). \tag{10}$$

Выражение, стоящее в фигурных скобках, знакопостоянно и всегда больше нуля. В отсутствие фазового взаимодействия $j_m = 0$, $dE/d\tau < 0$.

Следовательно, при $f_m = 0$ многомодовая генерация асимптотически выходит на стационарный режим ($E \to 0$), который устойчив по отношению к любым возмущениям начальных условий. Совершенно другая ситуация возникает, если учесть фазовое взаимодействие

$$\delta E = \frac{\eta}{\eta - 1} \sum f_m (W_m - \bar{W}_m).$$

Это слагаемое в (10) знакопеременно и сделать какое-либо заключение об устойчивости стационарных решений (8) не представляется возможным. Однако из (10) можно определить характерный масштаб, при котором межмодовые биения могут существенно изменить характер генерации. Выражение в фигурных скобках (10) есть энергия диссипации $\sim \varepsilon$. Следовательно, характерный масштаб δE определяется условием $\langle (\delta E)^2 \rangle \geqslant \varepsilon$, где усреднение проводится по межмодовым осцилляциям.

3. Поскольку в отсутствие фазового взаимодействия стационарные решения (8) устойчивы, то при некоторых предположениях оказывается возможным дальнейшее исследование решений системы уравнений (5)—(7). Будем считать, что $\varepsilon \sim 1/M \ll 1$ и удержим в (5)—(7) только члены первого порядка по ε. Тогда в первом члене правой части уравнения (7) можно пренебречь пространственной модуляцией, а в (6) — членом с $\bar{N}$ (ошибка имеет порядок ε/M). Более грубое приближение будет состоять в том, что мы пренебрежем дисперсией контура линии усиления (при заданном M), т. е. положим $W_m = \bar{W}/M$, где $\bar{W} = \sum W_m = \eta - 1$, и введем аппроксимирующее выражение для

$$\bar{N}_{mn} = \frac{1}{\eta} \left(1 + \frac{1}{2} \delta_{mn} \right). \tag{11}$$

Последнее приближение при $W_m = \bar{W}/M$ переходит в асимптотически точное в пределах $\eta - 1 \ll 1$ и $\eta \gg 1$. В области $\eta - 1 \approx 1$ формула (11) является довольно грубой аппроксимацией и оправданием ее применения может служить лишь то, что качественное поведение решений системы (5)—(7) не слишком критично к выбору вида матрицы $\tilde{N}$. Оказывается достаточным сохранить ее положительную определенность. В таких предположениях будем иметь $2M$ уравнений для $\tilde{N}_m$ и W_m, и задача сводится к M-частичной задаче классической механики. Прежде всего необходимо выделить в уравнениях (5)—(7) главный порядок по параметру $1/M$. В пределе $M \to \infty$ пространственная неоднородность в распределении активных атомов стремится к нулю — следовательно, амплитуды гармоник $\tilde{N}_m$ отличаются друг от друга на величину порядка $1/M^2$ и в главном порядке «хорошей» переменной может служить следующая величина $\sum \tilde{N}_m/M = p$, $(p \sim 1)$. Выделение ее эквивалентно в механической задаче введению импульса центра инерции. В уравнение для p входит полная энергия излучения $W = \sum W_m$, которая, как и p, порядка единицы. По этой причине полная энергия излучения является второй переменной, не исчезающей в пределе $M \to \infty$. Для сохранения аналогии с механической системой определим координату «центра инерции» соотношением $q = \ln W/(\eta - 1)$. В задаче остались не определены $2(M-1)$ переменные. В качестве $M-1$ импульсов «частиц» можно выбрать следующие: $p_m = \tilde{N}_m - \tilde{N}_M$. Эти величины, очевидно, малы. Следует подчеркнуть, что вычитание именно $\tilde{N}_M$ гармоники не имеет особого физического смысла, и сделано это просто для определенности (можно брать разность $\tilde{N}_m$ с гармоникой любого номера). Обобщенные $M-1$ координаты «частиц» свяжем с энергией мод следующим соотношением:

$$W_m = \frac{\eta - 1}{M} e^{q+q_m}; \quad \frac{1}{M} \sum e^{q_m} = 1. \tag{12}$$

Второе условие здесь, эквивалентное уравнению связи, следует из определения $W = (\eta - 1) e^q$. Выпишем теперь уравнения для p_m и q_m

$$\frac{dp_m}{d\tau} = -\frac{2\varepsilon}{\eta} [1 + [\eta - 1) e^q] p_m - \frac{1}{2M} e^{q+q_m} \left(1 - e^{q_M - q_m}\right), \tag{13}$$

$$\frac{d}{d\tau}(q_m - q_M) = p_m + f_m - f_M. \tag{14}$$

Не приводя уравнение для q, отметим, что если в нем пренебречь поправками на неоднородность $(\sim 1/M)$, то система уравнений для p и q становится замкнутой и эквивалентной обычным балансным уравнениям, записанным в гамильтоновой форме. Отличительной чертой будет присутствие в уравнении для q высокочастотной силы $f(\tau) = \sum \frac{f_m(\tau)}{M}$, зависящей только от времени и от случайных фаз полей [см. формулу (17)]. При $f(\tau) = 0$, как известно, решения для q и p имеют вид медленно затухающих колебаний с частотой ~ 1 (их размерная частота Ω). Характерная частота осцилляций в (13), (14) имеет порядок $1/\sqrt{M}$ (в размерных единицах $\Omega/\sqrt{M}$), если считать, что $M \ll 1/\varepsilon^2$. Последнее условие в твердотельных лазерах выполняется, как правило, всегда: $\varepsilon \sim 10^{-2}$, $M \sim 10^2$. Следовательно, в уравнении (13) можно заменить e^q ее средним по периоду быстрых осцилляций значением $\langle e^q \rangle_T = 1$. В такой ситуации система уравнений (13), (14) также становится замкнутой и можно получить ее приближенное решение. Для этого заметим, что правую часть уравнения (13) можно линеаризовать по q_m и p_m, поскольку $p_m \ll 1$, и получить линейное неоднородное уравнение для p_m. Как следует из решения этого уравнения p_m порядка $1/\sqrt{M}$, поэтому в первом приближении можно пренебречь членом p_m в уравнении (14). После этого можно легко найти, как изменяются энергии отдельных мод

$$\frac{W_m}{\eta - 1} = e^g \frac{\varkappa_m}{\sum \varkappa_m}; \quad \varkappa_m = e^{\int d\tau' f_m(\tau')}. \tag{15}$$

4. Дальнейшее исследование многомодовой генерации сводится к исследованию характера сил f_m. В определение (6) входит матричный элемент $\langle U_m(r)\,\bar{N}(r)\,U_m(r)\rangle_L$, он отличен от нуля, если $m+n$ четное число, т. е. моды взаимодействуют через одну, а во взаимодействии принимает участие $M/2$ мод. Учтем это обстоятельство фактором 1/2 и примем следующую аппроксимацию:

$$\langle U_m \bar{N} U_n\rangle_L = \frac{\eta-1}{4\eta^2 M}. \tag{16}$$

Основания для такой аппроксимации те же, что и в (13). Структура силы f_m при этом упрощается

$$f_m = \sqrt{A}\sum \cos\left[\varphi_n - \varphi_m - (\Omega_n - \Omega_m)\,t\right], \quad A = \left[\frac{\nu(\eta-1)}{4\Omega M\eta}\right]^2. \tag{17}$$

Как видно, f_m представляет собой импульсный процесс, в котором средняя скорость следования импульсов имеет порядок Ω_0 ($\Omega_n \approx n\Omega_0$), а их ширина $\sim 1/\Omega_0 M$. Отношение максимального значения f_m к минимальному $\sim M$. Другими словами, f_m в масштабе частот уравнений (5), (7) можно рассматривать как δ-коррелированный случайный импульсный процесс. При этом следует учитывать, что часть мод, выходящих в генерацию, может быть синхронизирована. Импульсный процесс с синхронизированными модами статистически не зависим от процесса с независимыми фазами φ_n, поэтому при вычислении коррелятора сил надо сложить корреляторы от этих двух процессов. Относительно числа синхронизованных мод M_c будем предполагать, что M_c равномерно распределено в интервале $(0, M)$. Заметим, что для получения коэффициентов корреляции в главном порядке по $1/M$ суммирование по модам можно заменить интегрированием. Тем самым выделяется главная часть импульсов. Дальнейшее вычисление элементарно (см., например, [5]); приведем конечные результаты для эффективных корреляторов, которые требуются в дальнейших расчетах,

$$\langle f_m(\tau)\, f_n(\tau)\rangle_{\text{эфф.}} = D\delta(\tau-\tau')\,\delta_{mn}. \tag{18}$$

Здесь коэффициент диффузии

$$D = \frac{\pi\Omega}{2\Omega_0\,(8\varepsilon M)^2} \ll 1. \tag{19}$$

Отметим, что в общем случае коррелятор (18) не равен нулю при $M \neq 1$. Однако он может быть приведен к виду (18) простым линейным преобразованием, не меняющим вида решения (15).

Система балансных уравнений с высокочастотной шумовой добротностью достаточно подробно изучена в работах [6, 7]. Остановимся более подробно на флуктуациях в энергии отдельных мод. Поскольку флуктуации полной энергии излучения слабо влияют на отдельные моды, то в (15) можно заменить e^q ее средним по периоду значением, равным 1. В таком приближении нетрудно установить, как флуктуируют отдельные моды. Среднее значение $\langle W_m\rangle$, очевидно, равно своему стационарному значению $(\eta-1)/M$. Среднеквадратичные значения $\langle (W_m^2)\rangle$ можно свести к следующему M-мерному интегралу:

$$\left\langle\left(\frac{W_m}{\eta-1}\right)^2\right\rangle = \frac{1}{M}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int \frac{\sum\limits_1^M e^{2\beta x_k}}{\left(\sum\limits_1^M e^{\beta x_k}\right)^2}\prod_1^M\left(\frac{dx_k}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-x_k^2}\right). \tag{20}$$

Здесь параметр β зависит от времени, $\beta = \sqrt{D\tau}$. С изменением β средний квадрат энергии моды меняется в широких пределах. При $\beta \to 0$ $\langle (W_m^2)\rangle \to \left(\frac{\eta-1}{M}\right)^2$, что соответствует начальному δ-образному распределению.

С ростом β величина $\langle (W_m)^2 \rangle$ растет и асимптотически стремится к предельному значению:

$$\left\langle \left(\frac{W_m}{\eta - 1} \right)^2 \right\rangle \Bigg|_{\beta \to \infty} = 1/M. \tag{21}$$

Следовательно, установившиеся стационарные флуктуации в энергии отдельных мод аномально велики

$$\left[\frac{\langle (\Delta W_m)^2 \rangle}{(\langle \Delta W_m \rangle)^2} \right]^{1/2} = \sqrt{M}. \tag{22}$$

В такой ситуации очевидно, что понятие энергии отдельной моды как физической величины в пределе $M \to \infty$ становится бессмысленным. Напомним, что «хорошей» физической величиной является только та величина, относительные флуктуации которой малы по сравнению с единицей. Здесь же относительные флуктуации много больше единицы.

Примечателен следующий факт. Как видно, соотношение (22) не содержит параметров, характеризующих величину случайной силы, а зависит только от числа мод. Подчеркнем, что данный результат в пределе $M \gg 1$ может быть получен непосредственно из уравнений (5), (7) без модельных аппроксимаций типа (11).

Флуктуации в полной энергии излучения, в модели сил (17), определяются только одним параметром D/ε, и в них нет аномалий типа (22) из-за того, что абсолютные флуктуации энергии в моде малы. Следствием соотношений (21), (22) является сильная межмодовая корреляция $\langle W_m W_n \rangle \to 0$ при $\beta \to 0$. Последнее означает, что рост энергии в одной моде сопровождается подавлением остальных мод. Следовательно, если в начальный момент времени возбуждены все допустимые моды (начальное δ-образное распределение), то с течением времени за счет шумов межмодовое взаимодействие приводит к подавлению всех мод, кроме одной. Одна мода неустойчива — поэтому генерация срывается, но межмодовое взаимодействие не дает возбудиться многомодовой генерации и в генерацию выходит только одна мода. Характерное время выхода в неустойчивый одномодовый режим оценивается из (20) по методу перевала и имеет порядок $t_{\max} \sim \ln M/d_{\min}\Omega$, где $d_{\min}$ — минимальный коэффициент корреляции случайных сил (в нашем случае $d_{\min} = D$). Механизм фазового взаимодействия мод (19) дает для $t_{\max}$ следующую оценку: при $\Omega_0 \sim 10^9$ с, $\Omega \sim 10^6$ с$^{-1}$, $D \sim 10^{-3}$, $M \sim 10^2$, $t_{\max} \sim 10^2$ с, т. е. в этом случае время установления режима одномодовых флуктуаций достаточно велико и может служить лишь для качественного объяснения поведения реальных спектров [9] (например, $t_{\max} \sim M^2 \ln M$).

В заключение следует отметить, что в отличие от ранее проведенных работ (см. монографию [9]) в данной работе не делалось попыток отыскать какой-либо механизм динамической неустойчивости многомодового режима генерации твердотельного лазера. Цель данной работы заключалась в том, чтобы на примере фазового взаимодействия мод обратить внимание на роль случайных сил, действие которых может проявиться при достаточно больших временах.

Литература

[1] C. L. Tang, H. Statz, G. De Mars. J. Appl. Phys., *34*, 2289, 1969.
[2] Е. С. Коваленко, А. В. Пуговкин. Изв. вузов, радиофизика, *11*, 232, 1968.
[3] В. В. Анциферов, А. В. Гайнер, К. П. Комаров, К. Г. Фолин. Квант. электрон., *2*, 591, 1975.
[4] В. А. Дементьев, Т. Н. Зубарев, А. Н. Ораевский. Тр. ФИАН, *91*, 3, 1977.
[5] В. И. Кляцкин, В. И. Татарский. Усп. физ. наук, *110*, 499, 1973.
[6] А. П. Казанцев, Г. В. Кривощеков, В. М. Семибаламут, В. С. Смирнов. Препринт ИФП СО АН СССР, Новосибирск, 1974.
[7] А. П. Казанцев, Г. В. Кривощеков, В. М. Семибаламут, В. С. Смирнов. Квант. электрон., *2*, 165, 1975.
[8] Б. Л. Лившиц, В. Н. Цикунов. Укр. физ. ж., *10*, 1267, 1965.
[9] Я. И. Ханин. Динамика квантовых генераторов, т. 2. «Советское радио», М., 1975.

Поступило в Редакцию 9 октября 1978 г.