Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 3 (132), 2022

УДК 512.548

Идемпотенты в полиадических группах специального вида

А.М. Гальмак[1], Ю.И. Кулаженко[2], М.В. Селькин[3]

В статье изучаются идемпотенты в полиадических группах специального вида, то есть в полиадических группах с l-арной операцией $\eta_{s,\sigma,k}$, которая называется полиадической операцией специального вида и определяется на декартовой степени A^k n-арной группы $< A, \eta >$ с помощью подстановки $\sigma \in \mathbf{S}_k$, удовлетворяющей условию $\sigma^l = \sigma$, и n-арной операции η.
Ключевые слова: полиадическая операция, n-арная группа, идемпотент, подстановка.

The article focuses on idempotents in polyadic groups of a special form, i.e. in polyadic groups with l-ary operation $\eta_{s,\sigma,k}$, that is called polyadic operation of a special form and is defined on Cartesian power A^k of n-ary group $< A, \eta >$ by substitution $\sigma \in \mathbf{S}_k$, satisfying the condition $\sigma^l = \sigma$, and n-ary operation η.
Keywords: polyadic operation, n-ary group, idempotent, substitution.

Введение. В данной статье изучаются идемпотенты в полиадических группах специального вида, то есть в полиадических группах вида $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ с l-арной операцией $\eta_{s,\sigma,k}$, которая называется полиадической операцией специального вида и определяется на декартовой степени A^k n-арной группы $< A, \eta >$ с помощью подстановки $\sigma \in \mathbf{S}_k$, удовлетворяющей условию $\sigma^l = \sigma$, и n-арной операции η. Равенство $\sigma^l = \sigma$ обеспечивает перенос ассоциативности с n-арной операции η на l-арную операцию $\eta_{s,\sigma,k}$. Первоначально операция $\eta_{s,\sigma,k}$ была определена в [1] на декартовой степени n-арного группоида без каких-либо ограничений на подстановку σ.

Изучавшаяся ранее [2] l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ также относится к полиадическим операциям специального вида, так как является частным случаем l-арной операции $\eta_{s,\sigma,k}$ при $l = s + 1$, в этом случае $n = 2$. Полиадическими операциями специального вида, соответствующими циклу $\sigma = (12 \ldots k)$, являются и две полиадические операции Э. Поста [3], так как они совпадают с операцией $[\ ]_{l,(12\ldots k),k}$, которая в одном случае определяется на декартовой степени симметрической группы, а во втором – на декартовой степени полной линейной группы над полем комплексных чисел.

Определения и основные свойства n-арной группы, а также более подробную информацию о нейтральных и обратных последовательностях можно найти в [3], [4].

Множество всех идемпотентов полиадического группоида $< A, \eta >$ будем обозначать символом $\mathbf{I}(A, \eta)$.

1. Предварительные сведения. Как показывает следующая теорема, равенство $\sigma^l = \sigma$ обеспечивает перенос свойства быть «полиадической группой» с n-арной группы $< A, \eta >$ на l-арный группоид $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$.

Теорема 1.1 [5]. *Если* $< A, \eta >$ – n*-арная группа*, *подстановка* σ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, *то* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ – l*-арная группа*.

Согласно Э. Посту [3], последовательность $e_1 \ldots e_{k(n-1)}$, где $k \geq 1$, элементов n-арной группы $< A, \eta >$ называют её *нейтральной последовательностью*, если

$$\eta(e_1 \ldots e_{k(n-1)}x) = x,\ \eta(xe_1 \ldots e_{k(n-1)}) = x$$

для любого $x \in A$.

Нейтральные последовательности существуют в любой n-арной группе, но определяются они неоднозначно.

Предложение 1.1. *Если* $< A, \eta >$ – n*-арная группа*, $k \geq 1$, $e_1, \ldots, e_{k(n-1)} \in A$, *то следующие утверждения эквивалентны*:

1) *последовательность* $e_1 \ldots e_{k(n-1)}$ – *нейтральная*;

2) *существует элемент* $a \in A$ *такой, что* $\eta(e_1 \ldots e_{k(n-1)}a) = a$;

3) *существует элемент* $a \in A$ *такой, что* $\eta(ae_1 \ldots e_{k(n-1)}) = a$.

В справедливости следующей леммы можно убедиться простой проверкой.

Лемма 1.1. *Если* $<A, \eta>$ – *n-арная группа, подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, *то элемент* $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$ *является идемпотентом в l-арной группе* $<A^k, \eta_{s,\sigma,k}>$ *тогда и только тогда, когда компоненты* $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$ *удовлетворяют условиям*

$$\eta(\varepsilon_1\varepsilon_{\sigma(1)}\varepsilon_{\sigma^2(1)}\ldots\varepsilon_{\sigma^{l-2}(1)}\varepsilon_1) = \varepsilon_1, \ldots, \eta(\varepsilon_k\varepsilon_{\sigma(k)}\varepsilon_{\sigma^2(k)}\ldots\varepsilon_{\sigma^{l-2}(k)}\varepsilon_k) = \varepsilon_k.$$

Следующая лемма доказана в [6].

Лемма 1.2 [6]. *Пусть* $l \geq 2$, $k \geq 2$, σ – *цикл из* $\mathbf{S}_k$ *длины k,* $\sigma^l = \sigma$, $a_1, \ldots, a_k$ – *элементы n-арной группы* $<A, \eta>$. *Если равенство* $\eta(a_j a_{\sigma(j)} a_{\sigma^2(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_j) = a_j$ *верно для некоторого* $j \in \{1, \ldots, k\}$, *то оно верно для любого* $j \in \{1, \ldots, k\}$.

Следующий результат был получен в [6] как следствие основного результата.

Лемма 1.3 [6]. *Пусть* $<A, \eta>$ – *n-арная группа,* $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k) \in A^k$, σ – *цикл длины k из* $\mathbf{S}_k$, $l - 1 = tk$ *для некоторого* $t \geq 1$. *Тогда*:

1) *если элемент* $\boldsymbol{\varepsilon}$ *является идемпотентом в l-арной группе* $<A^k, \eta_{s,\sigma,k}>$, *то*

$$\eta(\underbrace{\varepsilon_j\varepsilon_{\sigma(j)}\varepsilon_{\sigma^2(j)}\ldots\varepsilon_{\sigma^{k-1}(j)}\ldots\varepsilon_j\varepsilon_{\sigma(j)}\varepsilon_{\sigma^2(j)}\ldots\varepsilon_{\sigma^{k-1}(j)}}_{t}\varepsilon_j) = \varepsilon_j \qquad (1.1)$$

для любого $j \in \{1, \ldots, k\}$;

2) *если для некоторого* $j \in \{1, \ldots, k\}$ *верно* (1.1), *то элемент* $\boldsymbol{\varepsilon}$ *является идемпотентом в l-арной группе* $<A^k, \eta_{s,\sigma,k}>$.

2. Основной результат. Начнём с примера, который мы затем обобщим.

Пример 2.1. Пусть $A = \{e, a\}$ – группа второго порядка с единицей e, $<A, \eta>$ – тернарная группа с тернарной операцией η, производной от групповой операции: $\eta(xyz) = xyz$. Ясно, что $\eta(eee) = e$, $\eta(aaa) = a$.

Так как цикл $\sigma = (12)$ удовлетворяет условию $(12)^3 = (12)$, то по теореме 1.1 $<A^2, \eta_{1,(12),2}>$ – тернарная группа, где $A^2 = \{(e, e), (e, a), (a, e), (a, a)\}$. А так как

$$\eta_{1,(12),2}((e, e)(e, e)(e, e)) = (\eta(eee), \eta(eee)) = (e, e),$$
$$\eta_{1,(12),2}((a, a)(a, a)(a, a)) = (\eta(aaa), \eta(aaa)) = (a, a),$$
$$\eta_{1,(12),2}((e, a)(e, a)(e, a)) = (\eta(eae), \eta(aea)) = (a, e) \neq (e, a),$$
$$\eta_{1,(12),2}((a, e)(a, e)(a, e)) = (\eta(aea), \eta(eae)) = (e, a) \neq (a, e),$$

то *множество всех идемпотентов тернарной группы* $<A^2, \eta_{1,(12),2}>$ *четвёртого порядка совпадает с двухэлементным множеством* $\{(e, e), (a, a)\}$:

$$\mathbf{I}(A^2, \eta_{1,(12),2}) = \{(e, e), (a, a)\}.$$

Замечание 2.1. Если длина последовательности α элементов полиадической группы $<B, \mu>$ арности m равна $s(m-1) - 1$ для некоторого $s \geq 1$, то любая обратная последовательность для последовательности α отождествляется с единственным элементом α^{-1}, который называется *обратным* для α, и является решением уравнения $\mu(x\alpha b) = b$, где b может быть любым элементом из B.

Предложение 2.1. *Пусть* $<A, \eta>$ – *n-арная группа, подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_{l-1}$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, *существует* $j \in \{1, \ldots, l-1\}$, *для которого*

$$j \notin \{\sigma(j), \sigma^2(j), \ldots, \sigma^{l-2}(j)\}.$$

Тогда

$$\mathbf{I}(A^{l-1}, \eta_{s,\sigma,l-1}) \subseteq \{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{l-1}) \mid \varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{j-1},\varepsilon_{j+1},\ldots,\varepsilon_{l-1} \in A,\ \varepsilon_j = (\varepsilon_{\sigma(j)}\varepsilon_{\sigma^2(j)}\ldots\varepsilon_{\sigma^{l-2}(j)})^{-1}\}.$$

Если множество A конечно ($|A| = r$), *то* $|\mathbf{I}(A^{l-1}, \eta_{s,\sigma,l-1})| \leq r^{l-2}$.

Доказательство. Так как $j \notin \{\sigma(j), \sigma^2(j), \ldots, \sigma^{l-2}(j)\}$, то множество

$$\{\sigma(j), \sigma^2(j), \ldots, \sigma^{l-2}(j)\}$$

является подмножеством множества $\{1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, l-1\}$. Поэтому правая часть в доказываемом включении определена корректно.

Для сокращения записей обозначим правую часть в доказываемом включении символом $\mathbf{\Sigma}$.

Если $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{l-1}) \in \mathbf{I}(A^{l-1}, \eta_{s,\sigma,l-1})$, то по лемме 1.1

$$\eta(\varepsilon_j\varepsilon_{\sigma(j)}\varepsilon_{\sigma^2(j)}\ldots\varepsilon_{\sigma^{l-2}(j)}\varepsilon_j) = \varepsilon_j, \tag{2.1}$$

откуда следует

$$\varepsilon_j = (\varepsilon_{\sigma(j)}\varepsilon_{\sigma^2(j)}\ldots\varepsilon_{\sigma^{l-2}(j)})^{-1}. \tag{2.2}$$

Следовательно, $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{l-1}) \in \boldsymbol{\Sigma}$, и доказано включение

$$\mathbf{I}(A^{l-1}, \eta_{s,\sigma,l-1}) \subseteq \boldsymbol{\Sigma}, \tag{2.3}$$

то есть доказываемое включение верно.

Если $|A| = r$, то число элементов в правой части доказанного включения равно r^{l-2}. Поэтому из этого включения следует неравенство из условия предложения. Предложение доказано.

Теорема 2.1. *Пусть* $< A, \eta >$ *– n-арная группа,* σ *– цикл из* $\mathbf{S}_{l-1}$ *длины* $l-1$, $j \in \{1, \ldots, l-1\}$. *Тогда*

$$\mathbf{I}(A^{l-1}, \eta_{s,\sigma,l-1}) = \{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{l-1}) \mid \varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{j-1},\varepsilon_{j+1},\ldots,\varepsilon_{l-1} \in A,\ \varepsilon_j = (\varepsilon_{\sigma(j)}\varepsilon_{\sigma^2(j)}\ldots\varepsilon_{\sigma^{l-2}(j)})^{-1}\}.$$

Если $|A| = r$, *то* $|\mathbf{I}(A^{l-1}, \eta_{s,\sigma,l-1})| = r^{l-2}$.

Доказательство. Так как σ – цикл из $\mathbf{S}_{l-1}$ длины $l-1$, то $\sigma^l = \sigma$. Кроме того, множество

$$\{\sigma(j), \sigma^2(j), \ldots, \sigma^{l-2}(j)\}$$

совпадает с множеством $\{1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, l-1\}$. Поэтому

$$j \notin \{\sigma(j), \sigma^2(j), \ldots, \sigma^{l-2}(j)\}.$$

Тогда согласно предложению 2.1, верно включение (2.3), где $\boldsymbol{\Sigma}$ – то же, что и в доказательстве предложения 2.1.

Если теперь $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{l-1}) \in \boldsymbol{\Sigma}$, то из условия (2.2) следует равенство (2.1). Тогда, полагая в утверждении 2) леммы 1.3 $k = l-1$ (в этом случае $t = 1$), получим

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{l-1}) \in \mathbf{I}(A^{l-1}, \eta_{s,\sigma,l-1}).$$

Тем самым доказано включение

$$\boldsymbol{\Sigma} \subseteq \mathbf{I}(A^{l-1}, \eta_{s,\sigma,l-1}). \tag{2.4}$$

Из включений (2.3) и (2.4) следует $\mathbf{I}(A^{l-1}, \eta_{s,\sigma,l-1}) = \boldsymbol{\Sigma}$, то есть первое доказываемое равенство верно.

Второе доказываемое равенство является следствием только что доказанного равенства и равенства $|\boldsymbol{\Sigma}| = r^{l-2}$. Теорема доказана.

Полагая в теореме 2.1 $\sigma = (12 \ldots l-1)$, получим

Следствие 2.1. *Если* $< A, \eta >$ *– n-арная группа,* $j \in \{1, \ldots, l-1\}$, *то*

$$\mathbf{I}(A^{l-1}, \eta_{s,(12\ldots l-1),l-1}) = \{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{l-1}) \mid \varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{j-1},\varepsilon_{j+1},\ldots,\varepsilon_{l-1} \in A,\ \varepsilon_j = (\varepsilon_{j+1}\ldots\varepsilon_{l-1}\varepsilon_1\ldots\varepsilon_{j-1})^{-1}\}.$$

Если $|A| = r$, *то* $|\mathbf{I}(A^{l-1}, \eta_{s,(12\ldots l-1),l-1})| = r^{l-2}$.

Полагая в теореме 2.1 и в следствии 2.1 $j = 1$ и $j = l-1$, получим ещё два следствия.

Следствие 2.2. *Пусть* $< A, \eta >$ *– n-арная группа,* σ *– цикл из* $\mathbf{S}_{l-1}$ *длины* $l-1$. *Тогда*

$$\mathbf{I}(A^{l-1}, \eta_{s,\sigma,l-1}) = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{l-1}) \mid \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{l-1} \in A,\ \varepsilon_1 = (\varepsilon_{\sigma(1)}\varepsilon_{\sigma^2(1)}\ldots\varepsilon_{\sigma^{l-2}(1)})^{-1}\} =$$

$$= \{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{l-2}, \varepsilon_{l-1}) \mid \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{l-2} \in A,\ \varepsilon_{l-1} = (\varepsilon_{\sigma(l-1)}\varepsilon_{\sigma^2(l-1)}\ldots\varepsilon_{\sigma^{l-2}(l-1)})^{-1}\}.$$

Если $|A| = r$, *то* $|\mathbf{I}(A^{l-1}, \eta_{s,\sigma,l-1})| = r^{l-2}$.

Следствие 2.3. *Если* $< A, \eta >$ *– n-арная группа, то*

$$\mathbf{I}(A^{l-1}, \eta_{s,(12\ldots l-1),l-1}) = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{l-1}) \mid \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{l-1} \in A,\ \varepsilon_1 = (\varepsilon_2\varepsilon_3\ldots\varepsilon_{l-1})^{-1}\} =$$

$$= \{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{l-2}, \varepsilon_{l-1}) \mid \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{l-2} \in A,\ \varepsilon_{l-1} = (\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{l-2})^{-1}\}.$$

Если $|A| = r$, *то* $|\mathbf{I}(A^{l-1}, \eta_{s,(12\ldots l-1),l-1})| = r^{l-2}$.

Так как для любого элемента a тернарной группы $< A, \eta >$ обратный элемент a^{-1} совпадает с косым элементом $\bar{a}$, то полагая в следствиях 2.2 и 2.3 $l = n = 3$, получим

Следствие 2.4. *Если* $< A, \eta >$ *– тернарная группа, то*

$$\mathbf{I}(A^2, \eta_{1,(12),2}) = \{(\bar{a}, a) \mid a \in A\} = \{(a, \bar{a}) \mid a \in A\}.$$

Если $|A| = r$, *то* $|A^2, \eta_{1,(12),2}| = r$.

Теперь понятно, что пример 2.1 может быть извлечён из следствия 2.4, если в нём считать тернарную группу $< A, \eta >$ производной от группы второго порядка.

Теорема 2.2. *Пусть* $< A, \eta >$ – *n-арная группа* ($n \geq 3$), σ – *цикл из* $\mathbf{S}_{n-1}$ *длины* $n - 1$, $j \in \{1, \ldots, n-1\}$. *Тогда*

$$\{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{n-1}) \mid \varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{j-1},\varepsilon_{j+1},\ldots,\varepsilon_{n-1} \in A,\ \varepsilon_j = (\varepsilon_{\sigma(j)}\varepsilon_{\sigma^2(j)} \ldots \varepsilon_{\sigma^{n-2}(j)})^{-1}\} \subseteq \mathbf{I}(A^{n-1}, \eta_{s,\sigma,n-1}).$$

Если $|A| = r$, *то* $r^{n-2} \leq |\mathbf{I}(A^{n-1}, \eta_{s,\sigma,n-1})|$.

Доказательство. Так как $\sigma^{s(n-1)+1} = \sigma$, то по теореме 1.1 $< A^{n-1}, \eta_{s,\sigma,n-1} >$ – l-арная группа.

Для сокращения записей обозначим левую часть в доказываемом включении через $\mathbf{\Sigma}$.

Если $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}) \in \mathbf{\Sigma}$, то из условия $\varepsilon_j = (\varepsilon_{\sigma(j)}\varepsilon_{\sigma^2(j)} \ldots \varepsilon_{\sigma^{n-2}(j)})^{-1}$ следует

$$\eta(\varepsilon_j\varepsilon_{\sigma(j)}\varepsilon_{\sigma^2(j)} \ldots \varepsilon_{\sigma^{n-2}(j)}\varepsilon_j) = \varepsilon_j,$$

что означает нейтральность последовательности $\varepsilon_j\varepsilon_{\sigma(j)}\varepsilon_{\sigma^2(j)} \ldots \varepsilon_{\sigma^{n-2}(j)}$, откуда следует нейтральность последовательности

$$\underbrace{\varepsilon_j\varepsilon_{\sigma(j)}\varepsilon_{\sigma^2(j)} \ldots \varepsilon_{\sigma^{n-2}(j)} \ldots \varepsilon_j\varepsilon_{\sigma(j)}\varepsilon_{\sigma^2(j)} \ldots \varepsilon_{\sigma^{n-2}(j)}}_{s}.$$

Следовательно,

$$\eta(\underbrace{\varepsilon_j\varepsilon_{\sigma(j)}\varepsilon_{\sigma^2(j)} \ldots \varepsilon_{\sigma^{n-2}(j)} \ldots \varepsilon_j\varepsilon_{\sigma(j)}\varepsilon_{\sigma^2(j)} \ldots \varepsilon_{\sigma^{n-2}(j)}}_{s}\varepsilon_j) = \varepsilon_j.$$

Тогда, полагая в утверждении 2) леммы 1.3 $k = n - 1$, $s = t$, получим

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}) \in \mathbf{I}(A^{n-1}, \eta_{s,\sigma,n-1}).$$

Тем самым доказано требуемое включение $\mathbf{\Sigma} \subseteq \mathbf{I}(A^{n-1}, \eta_{n,\sigma,n-1})$.

Если $|A| = r$, то число элементов в левой части доказанного включения равно r^{n-2}. Поэтому из этого включения следует неравенство из условия теоремы. Теорема доказана.

Полагая в теореме 2.2 $\sigma = (12 \ldots n-1)$, получим

Следствие 2.5. *Если* $< A, \eta >$ – *n-арная группа* ($n \geq 3$), $j \in \{1, \ldots, n-1\}$, *то*

$$\{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{n-1}) \mid \varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{j-1},\varepsilon_{j+1},\ldots,\varepsilon_{n-1} \in A,\ \varepsilon_j = (\varepsilon_{j+1} \ldots \varepsilon_{n-1}\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{j-1})^{-1}\} \subseteq$$
$$\subseteq \mathbf{I}(A^{n-1}, \eta_{s,(12\ldots n-1),n-1}).$$

Если $|A| = r$, *то* $r^{n-2} \leq |\mathbf{I}(A^{n-1}, \eta_{s,(12\ldots n-1),n-1})|$.

Полагая в следствии 2.5 $j = 1$ и $j = n - 1$, получим

Следствие 2.6. *Если* $< A, \eta >$ – *n-арная группа* ($n \geq 3$), *то*

$$\{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n-1}) \mid \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n-1} \in A,\ \varepsilon_1 = (\varepsilon_2\varepsilon_3 \ldots \varepsilon_{n-1})^{-1}\} =$$
$$= \{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-2}, \varepsilon_{n-1}) \mid \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-2} \in A,\ \varepsilon_{n-1} = (\varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{n-2})^{-1}\} \subseteq \mathbf{I}(A^{n-1}, \eta_{s,(12\ldots n-1),n-1}).$$

Если $|A| = r$, *то* $r^{n-2} \leq |\mathbf{I}(A^{n-1}, \eta_{s,(12\ldots n-1),n-1})|$.

Полагая в следствии 2.6 $n = 3$, получим

Следствие 2.7. *Если* $< A, \eta >$ – *тернарная группа*, *то*

$$\{(\bar{a}, a) \mid a \in A\} = \{(a, \bar{a}) \mid a \in A\} \subseteq \mathbf{I}(A^2, \eta_{s,(12),2}).$$

Если $|A| = r$, *то* $r \leq |\mathbf{I}(A^2, \eta_{s,(12),2})|$.

Замечание 2.2. Подчеркнём, что, все обратные элементы, о которых говорилось выше, начиная с обратного элемента $(\varepsilon_{\sigma(j)}\varepsilon_{\sigma^2(j)} \ldots \varepsilon_{\sigma^{l-2}(j)})^{-1}$ из предложения 2.1, определяются с помощью n-арной операции η, то есть в n-арной группе $< A, \eta >$. Это следует иметь ввиду и далее.

Пример 2.1 показывает, что включение из теоремы 2.2 может быть равенством, то есть множество всех идемпотентов l-арной группы $< A^{n-1}, \eta_{s,\sigma,n-1} >$ может совпадать с левой частью этого включения.

3.Случай (2*s* + 1)-арной группы $< A^k, \eta_{s,\tau,k} >$ порядка 2^k. Покажем, что включение из теоремы 2.2 может быть строгим, то есть множество всех идемпотентов в l-арной группе $< A^{n-1}, \eta_{s,\sigma,n-1} >$ может быть шире его левой части.

Пример 3.1. Пусть $< A, \eta >$ – тернарная группа из примера 2.1, производная от группы $A = \{e, a\}$ с единицей e. Так как $\eta(eee) = e$, $\eta(aaa) = a$, то в тернарной группе $< A, \eta >$ обратные элементы к элементам e и a совпадают с обратными к ним же в группе A и являются косыми к самим себе: $e = e^{-1} = \bar{e}$, $a = a^{-1} = \bar{a}$. А так как цикл $\sigma = (12)$ удовлетворяет условию $(12)^{2s+1} = (12)$, то по теореме 1.1 $< A^2, \eta_{s,(12),2} >$ – $(2s + 1)$-арная группа для любого $s \geq 1$, где

$$A^2 = \{(e, e), (e, a), (a, e), (a, a)\}.$$

Так как

$$\eta_{2,(12),2}((e, e)(e, e)(e, e)(e, e)(e, e)) = (\eta(eeeee), \eta(eeeee)) = (e, e),$$
$$\eta_{2,(12),2}((a, a)(a, a)(a, a)(a, a)(a, a)) = (\eta(aaaaa), \eta(aaaaa)) = (a, a),$$
$$\eta_{2,(12),2}((e, a)(e, a)(e, a)(e, a)(e, a)) = (\eta(eaeae), \eta(aeaea)) = (e, a),$$
$$\eta_{2,(12),2}((a, e)(a, e)(a, e)(a, e)(a, e)) = (\eta(aeaea), \eta(eaeae)) = (a, e),$$

то в 5-арной группе $< A^2, \eta_{2,(12),2} >$ все элементы являются идемпотентами, то есть $< A^2, \eta_{2,(12),2} >$ – идемпотентная 5-арная группа:

$$\mathbf{I}(A^2, \eta_{2,(12),2}) = \{(e, e), (a, a), (e, a), (a, e)\} = A^2.$$

При этом левая часть включения из теоремы 2.2 в данном случае имеет вид $\{(e, e), (a, a)\}$. Таким образом, указанное включение является строгим.

Теорема 3.1. *Пусть* $< A, \eta >$ *– тернарная группа, производная от группы* $A = \{e, a\}$ *с единицей* e, $\tau = (\alpha\ \beta)$ – транспозиция из $\mathbf{S}_k$. *Тогда*:

1) *для любого* $s \geq 1$ *и любых* $a_1, \ldots, a_{\alpha-1}, a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\beta-1}, a_{\beta+1}, \ldots, a_k \in A$ *элементы*

$$\mathbf{u} = (a_1, \ldots, a_{\alpha-1}, e, a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\beta-1}, e, a_{\beta+1}, \ldots, a_k), \tag{3.1}$$
$$\mathbf{u} = (a_1, \ldots, a_{\alpha-1}, a, a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\beta-1}, a, a_{\beta+1}, \ldots, a_k) \tag{3.2}$$

являются идемпотентами в $(2s + 1)$*-арной группе* $< A^k, \eta_{s,\tau,k} >$;

2) *если* $s = 2r - 1$, *то множество* $\mathbf{I}(A^k, \eta_{2r-1,\tau,k})$ *всех идемпотентов* $(2s + 1)$*-арной группы* $< A^k, \eta_{2r-1,\tau,k} >$ *исчерпывается элементами* $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ из 1), *то есть*

$$\mathbf{I}(A^k, \eta_{2r-1,\tau,k}) = \{\mathbf{u}, \mathbf{v} \mid a_1, \ldots, a_{\alpha-1}, a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\beta-1}, a_{\beta+1}, \ldots, a_k \in A\},$$

при этом $|\mathbf{I}(A^k, \eta_{2r-1,\tau,k})| = 2^{k-1}$;

3) *если* $s = 2r$, *то* $\mathbf{I}(A^k, \eta_{2r,\tau,k}) = A^k$, $|\mathbf{I}(A^k, \eta_{2r,\tau,k})| = 2^k$.

Доказательство. 1) Так как подстановка τ удовлетворяет условию $\tau^{2s+1} = \tau$, то по теореме 1.1 $< A^k, \eta_{s,\tau,k} >$ – $(2s + 1)$-арная группа для любого $s \geq 1$.

Считая $a_\alpha = e$, $a_\beta = e$, будем иметь

$$\mathbf{u} = (a_1, \ldots, a_{\alpha-1}, a_\alpha = e, a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\beta-1}, a_\beta = e, a_{\beta+1}, \ldots, a_k).$$

Кроме того, положим

$$\eta_{s,\tau,k}(\underbrace{\mathbf{u} \ldots \mathbf{u}}_{2s+1}) = (u_1, \ldots, u_k).$$

Тогда для символов j, которые подстановка τ оставляет неподвижными, то есть для символов, отличных от α и β, имеем

$$u_j = \eta(a_j a_{\tau(j)} \ldots a_{\tau^{2s-1}(j)} a_{\tau^{2s}(j)}) = a_j a_{\tau(j)} \ldots a_{\tau^{2s-1}(j)} a_{\tau^{2s}(j)} = a_j^{2s+1} = a_j.$$

Кроме того,

$$u_\alpha = \eta(a_\alpha a_{\tau(\alpha)} \ldots a_{\tau^{2s-1}(\alpha)} a_{\tau^{2s}(\alpha)}) = e^{2s+1} = e,$$
$$u_\beta = \eta(a_\beta a_{\tau(\beta)} \ldots a_{\tau^{2s-1}(\beta)} a_{\tau^{2s}(\beta)}) = e^{2s+1} = e.$$

Таким образом,

$$\eta_{s,\tau,k}(\underbrace{\mathbf{u} \ldots \mathbf{u}}_{2s+1}) = \mathbf{u}.$$

Это означает, что элементы вида (3.1) являются идемпотентами в $< A^k, \eta_{s,\tau,k} >$ – для любого $s \geq 1$.

Аналогично, считая $a_\alpha = a$, $a_\beta = a$, будем иметь

$$\mathbf{v} = (a_1, \ldots, a_{\alpha-1}, a_\alpha = a, a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\beta-1}, a_\beta = a, a_{\beta+1}, \ldots, a_k).$$

Тогда, полагая

$$\eta_{s,\tau,k}(\underbrace{\mathbf{v} \ldots \mathbf{v}}_{2s+1}) = (v_1, \ldots, v_k),$$

получим

$$v_j = \eta(a_j a_{\tau(j)} \ldots a_{\tau^{2s-1}(j)} a_{\tau^{2s}(j)}) = a_j a_{\tau(j)} \ldots a_{\tau^{2s-1}(j)} a_{\tau^{2s}(j)} = a_j^{2s+1} = a_j$$

для символов j, которые подстановка τ оставляет неподвижными. Кроме того,

$$v_\alpha = \eta(a_\alpha a_{\tau(\alpha)} \ldots a_{\tau^{2s-1}(\alpha)} a_{\tau^{2s}(\alpha)}) = a^{2s+1} = a,$$

$$v_\beta = \eta(a_\beta a_{\tau(\beta)} \ldots a_{\tau^{2s-1}(\beta)} a_{\tau^{2s}(\beta)}) = a^{2s+1} = a.$$

Таким образом,

$$\eta_{s,\tau,k}(\underbrace{\mathbf{v} \ldots \mathbf{v}}_{2s+1}) = \mathbf{v}.$$

Это означает, что элементы вида (3.2) также являются идемпотентами в $< A^k, \eta_{s,\tau,k} >$ для любого $s \geq 1$.

2) Покажем теперь, что любой идемпотент в $< A^k, \eta_{2r-1,\tau,k} >$ совпадает либо с (3.1), либо с (3.2) Для этого предположим, что для любых $a_1, \ldots, a_k \in A$ элемент

$$\mathbf{w} = (a_1, \ldots, a_{\alpha-1}, a_\alpha, a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\beta-1}, a_\beta, a_{\beta+1}, \ldots, a_k) \tag{3.3}$$

является идемпотентом в $< A^k, \eta_{2r-1,\tau,k} >$ и положим

$$\eta_{s,\tau,k}(\underbrace{\mathbf{w} \ldots \mathbf{w}}_{2s+1}) = (w_1, \ldots, w_k),$$

где $s = 2r - 1$. Тогда

$$w_j = \eta(a_j a_{\tau(j)} \ldots a_{\tau^{2s-1}(j)} a_{\tau^{2s}(j)}) = a_j a_{\tau(j)} \ldots a_{\tau^{2s-1}(j)} a_{\tau^{2s}(j)}$$

для любого $j \in \{1, \ldots, k\}$. Так как подстановка τ оставляет неподвижными символы, отличные от α и β, то из полученного равенства вытекает

$$w_j = a_j^{2s+1} = a_j,\ j \neq \alpha,\ j \neq \beta. \tag{3.4}$$

Кроме того, учитывая равенство $s = 2r - 1$, получим

$$w_\alpha = a_\alpha a_{\tau(\alpha)} a_{\tau^2(\alpha)} a_{\tau^3(\alpha)} \ldots a_{\tau^{4r-4}(j)} a_{\tau^{4r-3}(j)} a_{\tau^{4r-2}(j)} =$$

$$= \underbrace{a_\alpha a_\beta \ldots a_\alpha a_\beta}_{2(r-1)} a_\alpha a_\beta a_\alpha = a_\alpha a_\beta a_\alpha = a_\beta,$$

$$w_\beta = a_\beta a_{\tau(\beta)} a_{\tau^2(\beta)} a_{\tau^3(\beta)} \ldots a_{\tau^{4r-4}(\beta)} a_{\tau^{4r-3}(\beta)} a_{\tau^{4r-2}(\beta)} =$$

$$= \underbrace{a_\beta a_\alpha \ldots a_\beta a_\alpha}_{2(r-1)} a_\beta a_\alpha a_\beta = a_\beta a_\alpha a_\beta = a_\alpha,$$

то есть

$$w_\alpha = a_\beta,\ w_\beta = a_\alpha. \tag{3.5}$$

Из (3.4) и (3.5) следует

$$\eta_{s,\tau,k}(\underbrace{\mathbf{w} \ldots \mathbf{w}}_{2s+1}) = (a_1, \ldots, a_{\alpha-1}, a_\beta, a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\beta-1}, a_\alpha, a_{\beta+1}, \ldots, a_k).$$

А так как по предположению

$$\eta_{s,\tau,k}(\underbrace{\mathbf{w} \ldots \mathbf{w}}_{2s+1}) = \mathbf{w},$$

то, учитывая (3.3), получим

$$(a_1, \ldots, a_{\alpha-1}, a_\alpha, a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\beta-1}, a_\beta, a_{\beta+1}, \ldots, a_k) =$$
$$= (a_1, \ldots, a_{\alpha-1}, a_\beta, a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\beta-1}, a_\alpha, a_{\beta+1}, \ldots, a_k),$$

откуда следует $a_\alpha = a_\beta$.

Таким образом, если $\mathbf{w}$ – идемпотент в $< A^k, \eta_{2r-1,\tau,k} >$, то либо

$$\mathbf{w} = (a_1, \ldots, a_{\alpha-1}, e, a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\beta-1}, e, a_{\beta+1}, \ldots, a_k),$$

либо

$$\mathbf{w} = (a_1, \ldots, a_{\alpha-1}, a, a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\beta-1}, a, a_{\beta+1}, \ldots, a_k).$$

Ясно, что число элементов вида (3.1) равно 2^{k-2}, элементов вида (3.2) столько же. Поэтому $|\mathbf{I}(A^k, \eta_{2r-1,\tau,k})| = 2^{k-1}$.

3) Рассмотрим произвольный элемент $\mathbf{w}$ из A^k, который запишем в виде (3.3) и положим

$$\eta_{2r,\,\tau,\,k}(\underbrace{\mathbf{w}\ \ldots\ \mathbf{w}}_{4r+1}) = (w_1, \ldots, w_k).$$

Тогда

$$w_j = \eta(a_j a_{\tau(j)} \ldots\ a_{\tau^{4r-1}(j)}\ a_{\tau^{4r}(j)}) = a_j a_{\tau(j)} \ldots\ a_{\tau^{4r-1}(j)}\ a_{\tau^{4r}(j)}$$

для любого $j \in \{1, \ldots, k\}$. Так как подстановка τ оставляет неподвижными символы, отличные от α и β, то из полученного равенства вытекает

$$w_j = a_j^{4r+1} = a_j,\ j \neq \alpha,\ j \neq \beta. \qquad (3.6)$$

Кроме того,

$$w_\alpha = a_\alpha a_{\tau(\alpha)} \ldots\ a_{\tau^{4r-1}(j)}\ a_{\tau^{4r}(j)} = \underbrace{a_\alpha a_\beta \ldots a_\alpha a_\beta}_{2r}\, a_\alpha = a_\alpha,$$

$$w_\beta = a_\beta a_{\tau(\beta)} \ldots\ a_{\tau^{4r-1}(\beta)}\ a_{\tau^{4r}(\beta)} = \underbrace{a_\beta a_\alpha \ldots a_\beta a_\alpha}_{2r}\, a_\beta = a_\beta,$$

то есть

$$w_\alpha = a_\alpha,\ w_\beta = a_\beta. \qquad (3.7)$$

Из (3.6) и (3.7) следует

$$\eta_{2r,\,\tau,\,k}(\underbrace{\mathbf{w}\ \ldots\ \mathbf{w}}_{4r+1}) = \mathbf{w}.$$

Следовательно, $\mathbf{w}$ – идемпотент в $< A^k, \eta_{2r,\,\tau,\,k} >$. Теорема доказана.

Литература

1. Гальмак, А. М. О полиадических операциях на декартовых степенях / А. М. Гальмак, А. Д. Русаков // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. – 2014. – № 3. – С. 35–40.
2. Гальмак, А. М. Многоместные операции на декартовых степенях / А. М. Гальмак. – Минск : Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.
3. Post, E. L. Polyadic groups / E. L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.
4. Русаков, С. А. Алгебраические *n*-арные системы / С. А. Русаков. – Минск : Навука і тэхніка, 1992. – 245 с.
5. Гальмак, А. М. О разрешимости уравнений в $< A^k, \eta_{s,\,\sigma,\,k} >$ / А. М. Гальмак // Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова. – 2018. – № 1 (51). – С. 4–10.
6. Гальмак, А. М. Идемпотенты в полиадических группоидах специального вида / А. М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 2 (51). – С. 4–10.

[1]Белорусский государственный университет
пищевых и химических технологий

[2]Белорусский государственный
университет транспорта

[3]Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины

Поступила в редакцию 12.03.2022