Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 3 (132), 2022

УДК 512.542

Характеризация конечных N_σ-критических групп

С.Ф. Каморников[1*], В.Н. Тютянов[2]

Пусть σ – некоторое разбиение множества всех простых чисел и N_σ – класс всех σ-нильпотентных конечных групп. В работе показывается, что всякая N_σ-критическая конечная группа является группой Шмидта.

Ключевые слова: конечная группа, $\mathfrak{F}$-критическая группа, σ-нильпотентная группа, группа Шмидта, π-однородная группа.

Let σ be some partition of the set of all primes and N_σ be the class of all σ-nilpotent finite groups. It is proved that every N_σ-critical group is a Schmidt group.

Keywords: finite group, $\mathfrak{F}$-critical group, σ-nilpotent group, Schmidt group, π-homogeneous group.

Светлой памяти
Ведерникова Виктора Александровича
посвящается

Введение. Пусть $\mathfrak{F}$ – некоторый класс конечных групп. Группа G называется $\mathfrak{F}$-*критической* (или *критической группой класса* $\mathfrak{F}$), если все ее подгруппы принадлежат $\mathfrak{F}$, а сама она не входит в $\mathfrak{F}$. В частности, если $\mathsf{F}=\mathsf{N}$ – класс всех конечных нильпотентных групп, то $\mathfrak{F}$-критическая группа – это *группа Шмидта*, т. е. ненильпотентная группа, все подгруппы которой являются нильпотентными.

В связи с изучением σ-субнормальных подгрупп конечных групп в [1] под номером 4.9 был сформулирован следующий вопрос (см. также вопрос 6.2 из [2]):

Пусть σ – некоторое разбиение множества всех простых чисел и N_σ – класс всех σ-нильпотентных конечных групп. Верно ли, что любая N_σ-критическая группа является σ-разрешимой?

В данной работе дается положительный ответ на этот вопрос. Наша главная цель – доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть σ – некоторое разбиение множества всех простых чисел и N_σ – класс всех σ-нильпотентных конечных групп. Тогда и только тогда конечная группа G является N_σ-критической, когда G – группа Шмидта и простые делители ее порядка принадлежат различным компонентам разбиения σ.*

1. Определения и предварительные результаты.

В работе рассматриваются только конечные группы, используются определения и обозначения, принятые в [3].

Пусть $\sigma=\{\sigma_i \mid i\in I\}$ – некоторое разбиение множества всех простых чисел $\mathbb{P}$, т. е. $\mathbb{P}=\cup_{i\in I}\sigma_i$ и $\sigma_i\cap\sigma_j=\varnothing$ для всех $i\neq j$. Следуя [1], будем говорить, что группа G является:

– σ-*примарной*, если G является σ_i-группой для некоторого $\sigma_i\in\sigma$;

– σ-*нильпотентной*, если она является прямым произведением некоторых σ-примарных групп;

---

[*]Исследования первого автора выполнены при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь (грант № 20211779 «Конвергенция – 2025»).

– σ-*разрешимой*, если каждый главный фактор группы G является σ-примарной группой.

Простая проверка показывает, что класс N_σ всех σ-нильпотентных групп является наследственной формацией Фиттинга. Отметим, что если $\sigma = \{\pi, \pi'\}$ для некоторого множества π простых чисел, то группа G является σ-нильпотентной тогда и только тогда, когда она π-*разложима*, т. е. $G = O_\pi(G) \times O_{\pi'}(G)$.

Основное строение групп Шмидта установлено в работе [4]. В частности, из [4] следует, что группа Шмидта бипримарна (т. е. ее порядок делится в точности на два различных простых числа), одна из ее силовских подгрупп является нормальной, а другая – циклической.

Пусть π – некоторое множество простых чисел. Группа G называется π-*замкнутой*, если она обладает нормальной холловой π-подгруппой. Следуя [5], группу G будем называть π-*однородной*, если для любой π-подгруппы H из G группа $N_G(H)/C_G(H)$ является π-группой.

Ключом к доказательству теоремы 1 является основной результат из [6], доказательство которого опирается на классификацию конечных простых групп. Этот результат мы приведем в виде следующей леммы.

***Лемма* 1.** *Пусть π – некоторое множество нечетных чисел. Группа G является π-однородной тогда и только тогда, когда она π'-замкнута.*

***Лемма* 2.** *Для любого разбиения σ всякая N_σ-критическая группа является σ-разрешимой.*

Доказательство. Предположим, что для некоторого разбиения σ лемма не верна. Пусть G – N_σ-критическая группа наименьшего порядка, которая не является σ-разрешимой. Пусть N – ее минимальная нормальная подгруппа.

Рассмотрим группу G/N. Простая проверка показывает, что все собственные подгруппы из G/N являются σ-нильпотентными. Если сама группа G/N является σ-нильпотентной, то по определению она будет σ-разрешимой. Если же G/N не является σ-нильпотентной, то она будет N_σ-критической, а потому ввиду выбора G группа G/N является σ-разрешимой. Если при этом группа G не является простой, то из условия следует, что подгруппа N σ-нильпотентна, а значит, σ-разрешима. А так как класс всех σ-разрешимых групп замкнут относительно расширений, то группа G является σ-разрешимой. Пришли к противоречию с выбором группы G.

Таким образом, G – простая группа. Тогда, исходя из условия леммы, найдется такая компонента σ_n разбиения $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$, что $\sigma_n \cap \pi(G) \neq \varnothing$ и, кроме того, множество $\sigma_n \cap \pi(G) \neq \varnothing$ состоит из нечетных простых чисел. Пусть H – произвольная σ_n-подгруппа из G. Так как группа G является N_σ-критической и простой, то $N_G(H) \neq G$, а потому

$$N_G(H) = O_{\sigma_n}(N_G(H)) \times O_{\sigma_n'}(N_G(H)).$$

Так как подгруппа H является σ_n-подгруппой, то из

$$O_{\sigma_n'}(N_G(H)) \subseteq C_G(H)$$

следует, что $N_G(H)/C_G(H)$ – σ_n-подгруппа. Следовательно, группа G является σ_n-однородной. Но тогда по лемме 1 G является σ_n'-замкнутой группой. Пришли к противоречию с простотой группы G.

Лемма доказана.

2. Доказательство теоремы 1.

Пусть G – некоторая N_σ-критическая группа и π – такая компонента разбиения $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$, что $\pi \cap \pi(G) \neq \varnothing$. Так как группа G не является σ-нильпотентной, то

$\pi \cap \pi(G) \neq \pi(G)$. Очевидно, группа G является $\mathfrak{N}_{\{\pi,\pi'\}}$-критической группой. Поэтому группа G не π-разложима, но все ее собственные подгруппы являются π-разложимыми. Кроме того, ввиду леммы 2 группа G обладает главным рядом, все факторы которого являются либо π-группами, либо π'-группами. Отсюда по теореме Холла из [7] G является D_π-группой, т. е. группа G обладает по крайней мере одной холловой π-подгруппой, любые две холловы π-подгруппы группы G сопряжены и каждая π-подгруппа из G содержится в некоторой холловой π-подгруппе.

Тогда по теореме В.А. Ведерникова из [8, теорема 3] G является группой Шмидта, а потому $\pi(G) = \{p, q\}$ для некоторых простых чисел p и q. Отсюда и из $\pi \cap \pi(G) \neq \pi(G)$ следует, что либо $p \in \pi$ и $q \in \pi'$, либо $q \in \pi$ и $p \in \pi'$, т. е. простые делители порядка группы G принадлежат различным компонентам разбиения σ.

Пусть теперь G – некоторая группа Шмидта и простые делители p и q порядка группы G принадлежат различным компонентам разбиения σ. Тогда, очевидно, все собственные подгруппы группы G являются σ-нильпотентными, а сама группа G σ-нильпотентной не является.

Теорема доказана.

Литература

1. Skiba, A. N. On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups / A. N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – V. 436. – P. 1–16.

2. Skiba, A. N. On σ-properties of finite groups I / A. N. Skiba // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 4 (21). – С. 89–96.

3. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–New York : Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

4. Шмидт, О. Ю. Группы, все подгруппы которых специальные / О. Ю. Шмидт // Мат. сборник. – 1924. – Т. 31, № 3–4. – С. 366–372.

5. Baer, R. Die Existenz Hallscher Normalteiler / R. Baer // Arch. Math. – 1960. – V. 11. – P. 77–87.

6. Arad, Z. A criterion for the existence of normal π-complements in finite groups / Z. Arad, D. Chillag // J. Algebra. – 1984. – V. 87. – P. 472–482.

7. Hall, P. Theorems like Sylow's / P. Hall // Proc. London Math. Soc. – 1956. – V. 6. – P. 286–304.

8. Ведерников, В. А. О π-свойствах конечных групп / В. А. Ведерников // Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп. – Минск : Наука и техника, 1986. – С. 13–19.

[1]Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины

[2]Международный университет «МИТСО»,
Гомельский филиал

Поступила в редакцию 06.05.2022