Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

Л. Н. МАРЧЕНКО,
Л. В. ФЕДОСЕНКО,
Ю. С. БОЯРОВИЧ

ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА
НАРАЩЕНИЕ И ДИСКОНТИРОВАНИЕ

Практическое руководство

для студентов специальности
1-25 01 04 «Финансы и кредит»

Гомель
ГГУ им. Ф. Скорины
2014

УДК 519. 2: 336 (076)
ББК 65. 26 в 631 я 73
М 30

Рецензенты:
д-р. физ.-мат. наук В. Н. Семенчук;
канд. физ.-мат. наук Л. П. Авдашкова

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Марченко, Л. Н.

М 30 Финансовая математика: наращение и дисконтирование: практ. рук-во / Л. Н. Марченко, Л. В. Федосенко, Ю. С. Боярович; М-во образования РБ, Гом. гос. ун-т им. Ф. Скорины. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2014. – 48 с.

В практическом руководстве изложены теоретические основы методов наращения и дисконтирования, представлены решения типовых задач финансового бизнеса. Издание включает теоретические и практические материалы по организации финансовых расчетов в моделях простых и сложных процентов.

Предназначено для студентов дневной и заочной форм обучения студентов экономического факультета специальности 1-25-01-04 «Финансы и кредит».

УДК 519. 2: 336 (076)
ББК 65. 26 в 631 я 73

Содержание

Предисловие

Владение современными методами финансовых вычислений является важной составляющей в профессиональной подготовке предпринимателя, банковского служащего, менеджера и любого другого специалиста в области экономической и финансовой деятельности.

Практическое руководство «Финансовая математика: наращение и дисконтирование» предназначено для студентов дневной и заочной форм обучения специальности 1-25 01 04 «Финансы и кредит». Оно включает теоретический и практический материал по организации финансовых расчетов в моделях простых и сложных процентов в соответствии с учебной программой по дисциплине «Финансовая математика».

Разделы издания имеют идентичную структуру: краткие теоретические сведения, решение типовых задач, задачи для самостоятельного решения, что позволяет использовать его не только для проведения практических занятий, но и для организации самостоятельной учебной работы студентов.

Практическое руководство является основой для подготовки к практическим занятиям и к сдаче зачета. Указанная работа ни в коем случае не заменяет стандартных учебников, а лишь помогает студенту самостоятельно разобраться в тех вопросах, которые вызывают у него затруднения. Успешное усвоение дисциплины дает возможность студенту приобрести определенные навыки в области финансовых и коммерческих расчетов.

1 Логика финансовых расчётов

1.1 Предмет и методы финансовой математики

Финансовая математика – это наука, изучающая методы и методики определения стоимостных и временных параметров финансовых и инвестиционных операций, процессов и сделок, а также модели управления инвестициями, капиталом и его составляющими.

Объект финансовой математики – финансовые операции и сделки и их технико-экономическое обоснование, направленное на извлечение прибыли. *Предмет* – финансовые и актуарные оценки показателей эффективности этих операций и сделок, а также доходов отдельно взятых участников этих сделок, определяемых в виде процентных ставок, норм и коэффициентов, скидок, маржи, котировок ценных бумаг, курсов валют.

Финансовая математика охватывает методы вычислений, необходимость в которых возникает, когда в условиях сделки или финансово-банковской операции оговариваются конкретные значения трех видов параметров:

1) стоимостные характеристики (размеры платежей, долговых обязательств, кредитов и т. д.);

2) временные данные (даты и сроки выплат, продолжительность льготных периодов, отсрочки платежей и т. д.);

3) процентные ставки.

Методы финансовой математики используются в расчетах параметров, характеристик и свойств инвестиционных операций и стратегий, параметров государственных и негосударственных займов, кредитов, в расчетах амортизации, страховых взносов и премий, пенсионных начислений и выплат, при составлении планов погашения долга, оценке прибыльности финансовых сделок.

1.2 Факторы, учитываемые в финансово-экономических расчетах

Финансовые процессы определяются многими факторами, которые условно делятся на внутренние и внешние.

К внутренним относятся те факторы, которые определяют основные и непосредственные характеристики финансового процесса, т. е. структура портфеля активов, контрактные характеристики сделки (способ начисления процентов в кредитных сделках, выбранная схема погашения и т. п.), а также факторы, определяющие начальные условия сделки (величину инвестируемого капитала, начальный момент инвестиций).

Внешние факторы определяют рыночную среду, т. е. условия, в которых протекает финансовый процесс. К ним относятся, во-первых, инфляционные ожидания, влияющие на уровень процентных ставок. Снижение покупательной способности денег за период кредитования приводит к уменьшению реального размера заемных средств, возвращаемых кредитору. Соответственно кредиторы пытаются компенсировать снижение реальных доходов за счет увеличения процентных ставок по активным операциям. Конкуренция на рынке финансовых ресурсов также оказывает влияние на уровень банковских процентных ставок. Развитие рынка ценных бумаг выступает одним из факторов ценообразования на кредитном рынке. Открытость национальной экономики, международная миграция капиталов, обменный курс валют, состояние платежного баланса страны – факторы, также влияющие на национальную систему процентных ставок.

Во-вторых, практически любой финансовой сделке присущ фактор риска. С позиции макроэкономики, риск зависит от экономической, политической и прочих составляющих и часто не поддается управлению.

В-третьих, система налогообложения определяет размер чистой прибыли, остающейся в распоряжении налогоплательщика. Меняя ставки налогообложения, порядок взимания налогов, применяя систему льгот, государство стимулирует определенные экономические процессы.

Задание внутренних и внешних факторов финансового процесса полностью определяет его динамику. Внешние факторы, как правило, не поддаются управлению, однако при проведении финансово-экономических расчетов их необходимо учитывать. Это относится, прежде всего, к учету влияния инфляции, налоговой системы, финансовых рисков. Внутренние факторы могут рассматриваться двояко: как управляющие параметры, либо как параметры, значение которых необходимо определить в ходе выполнения расчетов.

В условиях рыночной экономики при проведении долгосрочных финансовых операций важную роль играет фактор времени. «Золотое» правило бизнеса гласит: «Денежная сумма, полученная сегодня, больше той же суммы, полученной завтра». Поэтому в финансовых расчетах фактор времени играет не меньшую роль, чем размеры денежных сумм. Действительно, всегда найдутся организации и частные лица (заемщики), нуждающиеся в кредитах на тот или иной период и готовые платить за такой заем (ссуду). Таким образом, в большинстве случаев увеличение стоимости капитала происходит в результате предоставления его в долг и взимания процентной ставки.

Фактор времени в финансовой сфере учитывается с помощью процентной ставки. В узком смысле процентная ставка представляет собой цену, уплачиваемую за использование заемных денежных средств. Однако ее также часто используют в качестве уровня (нормы) доходности производимых операций, исчисляемого как отношение полученной прибыли к величине вложенных средств и выражаемого в долях единицы или в процентах.

1.3 Виды процентов

Методы финансово-экономических расчетов различны в зависимости от вида применяемых процентов. Относительно момента выплаты или начисления дохода за пользование предоставленными денежными средствами проценты подразделяются на *обычные* (*декурсивные*) и *авансовые* (*антисипативные*).

Отрезок времени между двумя следующими друг за другом процедурами начисления процентов называется *периодом начисления процентов*. *Обычные* проценты начисляются в конце периода относительно исходной величины средств. Доход, определяемый обычным процентом, выплачивается в конце периодов финансовой операции. Такие проценты применяются в большинстве депозитных и кредитных операций, а также в страховании. *Авансовые* проценты начисляются в начале периода относительно конечной суммы денег. Доход, определяемый авансовым процентом, выплачивается в момент предоставления кредита. Такая форма расчетов называется *авансовой* или *учетом*. При этом базой расчета процентов служит сумма денег с процентами (сумма погашения долга). Исчисленные таким образом проценты взимаются вперед и являются авансом. Так рассчитывают проценты в некоторых видах кредитования, операциях с дисконтными ценными бумагами, в международных расчетах.

Рассмотренным двум видам процентов на практике соответствуют определенные процентные ставки. Пусть сумма PV предоставлена в долг условием, что через n лет будет возвращена большая сумма FV.

Обычная годовая ставка процентов i рассчитывается по формуле

$$i = \frac{FV - PV}{PV \cdot n},$$

учетная годовая ставка процентов d – по формуле

$$d = \frac{FV - PV}{FV \cdot n}.$$

Обе ставки взаимосвязаны, т. е. зная один из показателей, можно рассчитать другой по формулам соответственно:

$$i = \frac{d}{1-d} \text{ и } d = \frac{i}{1+i}.$$

Пример 1.1. Предприниматель получил на два года кредит в размере 100 000 ден. ед. В конце срока он должен возвратить 140 000 ден. ед. Определить доход кредитора в виде процентной и учетной ставок.

Решение. Параметры задачи: $n = 2$ года, $PV = 100\,000$ ден. ед., $FV = 140\,000$ ден. ед. Тогда обычная процентная ставка равна

$$i = \frac{FV - PV}{PV \cdot n} = \frac{140\,000 - 100\,000}{100\,000 \cdot 2} = 0{,}2 \text{ или } 20\ \%,$$

учетная –

$$d = \frac{FV - PV}{FV \cdot n} = \frac{140\,000 - 100\,000}{140\,000 \cdot 2} = 0{,}167 \text{ или } 16{,}7\ \%.$$

Видно, что при равной величине процентных денег

$$I = FV - PV = 40\,000 \text{ ден. ед.}$$

величина процентной ставки $i = 20\ \%$ выше величины учетной ставки $d = 16{,}7\ \%$.

В зависимости от условий проведения финансовых операций, начисление процентов может осуществляться с применением простых, либо сложных процентов. Базой для исчисления *простых* процентов за каждый период служит первоначальная сумма сделки. Простые проценты чаще всего используются в краткосрочных финансовых операциях, срок проведения которых меньше года. База для начисления *сложных* процентов меняется за счет присоединения ранее начисленных процентов, т. е. она включает в себя как исходную сумму сделки, так и сумму уже накопленных к этому времени процентов. Сложные проценты применяются в большей степени в долгосрочных финансовых операциях со сроком проведения более одного года.

Фиксированная процентная ставка – это ставка, определенная в виде конкретного числа в финансовых контрактах. *Постоянная* – ставка, неизменная на протяжении всего периода финансовой операции. *Переменная* – ставка, дискретно изменяющаяся во времени, но имеющая конкретную числовую характеристику. *Плавающая* – ставка, привязанная к определенной величине, изменяющейся во времени, включая надбавку к ней (маржу), которая определяется целым рядом условий (сроком операции и т. п.). Основу процентной ставки составляет базовая ставка, которая является начальной величиной.

1.4 Наращение и дисконтирование

Процесс, в котором по заданной исходной сумме и процентной ставке необходимо найти ожидаемую в будущем к получению сумму, в финансовых вычислениях называется процессом *наращения.* Процесс, в котором по заданной ожидаемой в будущем к получению сумме и процентной ставке необходимо найти исходную сумму долга, называется процессом *дисконтирования.* Логика финансовых операций схематически изображена на рисунке 1.

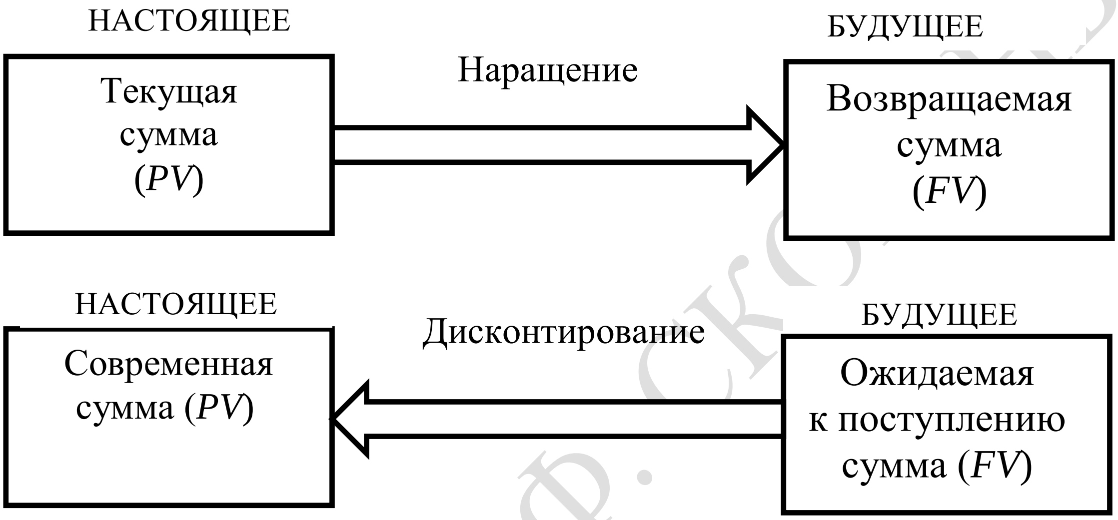

Рисунок 1 – Логическая схема операций наращения и дисконтирования

Наращение позволяет определить будущую величину FV текущей суммы PV через некоторый промежуток времени, исходя из заданной процентной ставки i. Дисконтирование представляет собой процесс нахождения на заданный момент времени современной величины PV по ее известному или предполагаемому значению FV в будущем, исходя из заданной процентной ставки d.

2 Наращение процентов

2.1 Наращение по схеме простых процентов

Наращенная сумма. Пусть $t = 0$ – момент размещения суммы PV на банковский счет под ставку простых процентов i сроком на n лет. Проценты за первый год вклада равны $PV \cdot i$. Следовательно, в конце первого процентного периода, $t = 1$, сумма денег составит $PV + i \cdot PV = PV\,(1 + i)$. В конце второго процентного периода, $t = 2$, сумма увеличится еще на $PV \cdot i$ и составит $PV + 2 \cdot i \cdot PV = PV\,(1 + 2i)$. И так далее. В конце n-го процентного периода наращенная сумма составит $PV \cdot [1+(n-1)\cdot i] + PV \cdot i = PV(1+ni)$.

Таким образом, наращенная сумма вклада через *n* лет равна

$$FV = PV(1 + n \cdot i).$$

Если срок проведения финансовой операции меньше года, то $n = t/T$. Здесь t – число дней проведения операции, T – временная база (число дней в году 360 или 365 (366)). Тогда формула для определения наращенной суммы примет вид

$$FV = PV\left(1+\frac{t}{T}\cdot i\right).$$

Сумма наращенных процентов равна $I = FV - PV = PV\cdot(i\cdot t/T)$.

<u>Замечание</u>. При определении продолжительности финансовой операции дата выдачи и дата погашения считаются за один день.

Если срок финансовой операции выражен в днях, то расчет простых процентов может быть произведен согласно одной из трех возможных практик:

1) *германская практика расчета* или *обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды* (360/360), когда продолжительность года условно принимается за 360 дней, а целого месяца – за 30 дней. Обычно используется в Германии, Дании, Швеции;

2) *французская практика расчета* или *банковский метод* (365/360), когда продолжительность года условно принимается за 360 дней, а продолжительность финансовой операции рассчитывается точно по календарю. Имеет распространение во Франции, Бельгии, Испании, Швейцарии;

3) *английская практика расчета* или *точные проценты* (365/365), когда продолжительность года и продолжительность финансовой операции берутся точно по календарю. Применяется в России, Великобритании, Португалии, США.

В Республике Беларусь коммерческие банки могут самостоятельно выбирать методику расчета продолжительности финансовой операции. Причем в одном и том же банке для различных типов операций применяются разные практики. При этом в кредитных операциях обычно используется германская практика, в депозитных – английская.

Пример 2.1. Сумма 2 000 000 ден. ед. размещена на депозит 18 февраля 2011 года и востребована 25 декабря того же года. Ставка банка составляет 35 % годовых. Определить сумму начисленных процентов при различной практике их начисления.

<u>*Решение*</u>. Параметры задачи: PV = 2 000 000 ден. ед., $t_{\text{нач}}$ = 18.02.2011, $t_{\text{ок}}$ = 25.12.2011, i = 35 %.

1 Германская практика начисления простых процентов, 360/360.

Количество дней финансовой операции равно

t = 11 (февраль) + 30 (март) + 30 (апрель) + 30 (май) + 30 (июнь) +
+ 30 (июль) + 30 (август) + 30 (сентябрь) + 30 (октябрь) + 30 (ноябрь) +
+ 25 (декабрь) – 1 = 305 дней.

Сумма начисленных процентов равна

$$I = PV \cdot \frac{t}{T} \cdot i = 2\,000\,000 \cdot \frac{305}{360} \cdot 0{,}35 = 593\,056 \text{ ден. ед.}$$

2 Французская практика начисления процентов, 365/360.

Количество дней финансовой операции равно

t = 11 (февраль) + 31 (март) + 30 (апрель) + 31 (май) + 30 (июнь) +
+ 31 (июль) + 31 (август) + 30 (сентябрь) + 31 (октябрь) + 30 (ноябрь) +
+ 25 (декабрь) – 1 = 310 дней.

По таблицам порядковых номеров дней в году (приложение А) можно также определить точное число дней финансовой операции:

$$t = 359 - 49 = 310 \text{ дней.}$$

Сумма начисленных процентов равна

$$I = 2\,000\,000 \cdot \frac{310}{360} \cdot 0{,}35 = 602\,778 \text{ ден. ед.}$$

3 Английская практика начисления процентов, 365/365.

Количество дней финансовой операции равно t = 310 дней.

Сумма начисленных процентов равна

$$I = 2\,000\,000 \cdot \frac{310}{365} \cdot 0{,}35 = 594\,521 \text{ ден. ед.}$$

Как видно, результат финансовой операции во многом зависит от выбора способа начисления простых процентов. Поскольку точное число дней в большинстве случаев больше приближенного числа дней, то и проценты с точным числом дней ссуды обычно получаются выше процентов с приближенным числом дней ссуды.

Переменная процентная ставка. В условиях финансовой операции иногда предусматриваются дискретно изменяющиеся во времени процентные ставки. Процентная ставка называется *переменной*, если она изменяет свое значение в течение срока финансовой операции. Пусть в течение периода n_1 процентная ставка равна i_1, в течение периода n_2 – i_2 и т. д., в течение периода n_k – i_k. Тогда наращенная сумма за период $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ в схеме простых процентов равна

$$FV = PV + PV \cdot n_1 \cdot i_1 + PV \cdot n_2 \cdot i_2 + \ldots + PV \cdot n_m \cdot i_m =$$
$$= PV(1 + n_1 \cdot i_1 + n_2 \cdot i_2 + \ldots + n_m \cdot i_m).$$

Реинвестирование. При наращении по простой процентной ставке с использованием реинвестирования осуществляется наращение и на проценты, начисленные в предыдущих периодах. Предположим, что в течение периода времени n_1 установлена ставка простых процентов i_1, тогда к концу этого периода наращенная сумма составит $PV\,(1+n_1 i_1)$. Затем эта сумма будет помещена на следующий срок n_2 под i_2 простых процентов. К концу периода n_2 наращенная сумма будет равна величине $PV\,(1+n_1 \cdot i_1)(1+n_2 \cdot i_2)$. И так далее. Итоговая наращенная сумма определится по формуле:

$$FV = PV(1+n_1 \cdot i_1)(1+n_2 \cdot i_2)...(1+n_t \cdot i_k),$$

где n_1, n_2, …, n_k – продолжительность периодов наращения;

i_1, i_2, …, i_k – ставки, по которым производится реинвестирование.

Пример 2.2. Вкладчик поместил в банк 15 000 ден. ед. на следующих условиях: в первый год процентная ставка составляет 20 % годовых, а в каждые последующие полгода ставка повышается на 3 %. Найти наращенную за 2 года сумму вклада, если:

а) используется переменная процентная ставка;

б) проценты начисляются с одновременной капитализацией процентного дохода.

Решение. Параметры задачи: PV = 15 000 ден. ед., i_1 = 20 %, n_1 = 1 год, i_2 = 23 %, n_2 = 1/2 года, i_2 = 26 %, n_3 = 1/2 года. Наращенная сумма равна:

а) FV = 15 000·(1 + 1·0,2 + 1/2·0,23 + 1/2·0,26) = 21 675 ден. ед.;

б) FV = 15 000·(1 + 1·0,2) · (1 + 1/2·0,23) · (1+ 1/2·0,26) = 22 679 ден. ед.

Таким образом, реинвестирование дает больший финансовый результат, чем переменная ставка процентов.

2.2 Наращение по схеме сложных процентов

Наращенная сумма. Пусть в момент $t = 0$ сумма PV размещена на банковский счет под сложную годовую процентную ставку i сроком на n лет. Проценты начисляются один раз в конце года. Через один период наращения (через год) на счете будет сумма, равная $PV + i \cdot PV = PV\,(1 + i)$. Полученная сумма вновь инвестирована под процентную ставку i на следующий процентный период. Тогда к концу второго процентного периода на его счете будет сумма, которая исчислена следующим образом: $PV\,(1 + i) + i \cdot PV\,(1 + i) = PV\,(1 + i)^2$. И так далее. Наращенная сумма к концу n-го периода суммы PV определяется по формуле

$$FV = PV \cdot (1 + i)^n.$$

В данном случае имеет место так называемая капитализация процентов. Величина $(1 + i)^n$ называется *множителем наращения в схеме сложных процентов*.

Замечание. В MS Excel наращенная сумма по схеме сложных процентов вычисляется с помощью функции БС (ставка; кпер; плт;пс; тип).

Пример 2.3. Сумма в размере 2 000 000 ден. ед. дана в долг на 2 года по ставке сложного процента равной 35 % годовых. Определить сумму, подлежащую возврату, и процентные деньги.

<u>*Решение.*</u> Параметры задачи: PV = 2 000 000 ден. ед., n = 2 года, i = 35 %. Тогда наращенная сумма равна

$$FV = 2\,000\,000 \cdot (1 + 0{,}35)^2 = 3\,645\,000 \text{ ден. ед.}$$

или

$$FV = \text{БС}(35\ \%;2;;–2\,000\,000) = 3\,645\,000 \text{ ден. ед.}$$

Сумма начисленных процентов

$$I = FV – PV = 3\,645\,000 – 2\,000\,000 = 1\,645\,000 \text{ ден. ед.}$$

Таким образом, через два года необходимо вернуть общую сумму в размере 3 645 000 ден. ед., из которой 2 000 000 ден. ед. составляет долг, а 1 645 000 ден. ед. – «цена долга».

Переменная процентная ставка. Применяя формулу наращения сложных процентов последовательно для каждого периода наращения n_1, n_2, … , n_k, когда использовались сложные ставки i_1, i_2, …, i_k соответственно, получаем наращенную сумму:

$$FV = PV(1+i_1)^{n_1}(1+i_2)^{n_2}....(1+i_k)^{n_k}.$$

<u>Замечание</u>. В MS Excel наращенная сумма по переменной ставке сложных процентов вычисляется с помощью функции БЗРАСПИС (первичное; план).

Пример 2.4. Фирма получила кредит в банке на сумму 100 000 ден. ед. сроком на 5 лет. Процентная ставка по кредиту определена в 10 % для 1-го года, для 2-го года предусмотрена надбавка к процентной ставке в размере 1,5 %, для последующих лет 1 % за три года. Определить сумму долга, подлежащую погашению в конце срока.

<u>*Решение.*</u> Параметры задачи: PV = 100 000 ден. ед., i_1 = 10 %, n_1 = 1 год, i_2 = 11,5 %, n_2 = 1 год, i_3 = 12,5 %, n_3 = 3 года. Используя формулу переменных процентных ставок, получим

$$FV = 100\,000 \cdot (1 + 0{,}1) \cdot (1 + 0{,}115) \cdot (1 + 0{,}125)^3 = 174\,633 \text{ ден. ед.},$$

$$FV = \text{БЗРАСПИС}(100\,000;\{0{,}1;0{,}115;0{,}125;0{,}125;0{,}125\}).$$

Таким образом, сумма, подлежащая погашению в конце срока займа, составит 174 633 ден. ед., из которых 100 000 ден. ед. являются непосредственно суммой долга, а 74 633 ден. ед.– проценты по долгу.

Наращение при дробном периоде лет. В случае, когда срок финансовой операции выражен дробным числом лет $n = a + b$, a – целое число лет; b – дробная часть года, $0 < b < 1$, начисление процентов возможно с использованием общего и смешанного методов.

Общий метод заключается в прямом расчете по формуле сложных процентов:

$$FV = PV\,(1 + i)^{a+b}.$$

Смешанный метод расчета предполагает для целого числа лет периода начисления процентов использовать формулу сложных процентов, а для дробной части года – формулу простых процентов:

$$FV = PV\cdot(1 + i)^{a}\cdot (1 + b\cdot i).$$

Поскольку $b < 1$, то $1+b\cdot i > (1+i)^{b}$, то наращенная сумма будет больше при использовании смешанного метода.

Пример 2.5. В банке получен кредит под 9,5 % годовых в размере 250 000 ден. ед. со сроком погашения через 2 года и 9 месяцев. Определить сумму, которую необходимо вернуть, двумя методами, учитывая, что банк использует германскую практику начисления процентов.

Решение. Параметры задачи: PV = 250 000 ден. ед., n = 2 года и 9 месяцев, i = 9,5 %.

Общий метод:

$$FV = 250\,000 \cdot (1 + 0{,}095)^{2+9/12} = 320\,870 \text{ ден. ед.}$$

Смешанный метод:

$$FV = 250\,000 \cdot (1 + 0{,}095)^{2} \cdot (1 + 270/360 \cdot 0{,}095) = 321\,114 \text{ ден. ед.}$$

Видно, смешанная схема более выгодна кредитору.

Наращение процентов *m* раз в году. Иногда в финансовых операциях в качестве периода наращения процентов используется не год, а полугодие, квартал, месяц или другой период времени, т. е. проценты начисляются m раз в году. Тогда в контрактах фиксируется не ставка за процентный период, а годовая ставка процентов, которая называется *номинальной*.

Пусть годовая ставка равна j, срок финансовой операции n лет, а число периодов начисления процентов в году равно m. Тогда в каждом периоде длиной $1/m$ часть года проценты начисляются по ставке j/m, количество начислений при этом составит $N = m\cdot n$. Наращенная сумма равна

$$FV = PV\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m\cdot n},\ m \ge 1.$$

Пример 2.6. Сумма в размере 2 000 ден. ед. дана в долг на 2 года под 10 % годовых. Определить сумму, подлежащую возврату, если проценты начисляются: а) 1 раз в году; б) ежеквартально; в) ежемесячно.

Решение. Параметры задачи: PV = 2 000 ден. ед., i = 10 %, n = 2 года.

а) при m = 1 наращенная сумма равна

$$FV = PV \cdot (1 + i)^{n} = 2\,000 \cdot (1 + 0{,}1)^{2} = 2\,420 \text{ ден. ед.},$$

$$FV = \text{БС}(10\ \%;2;;-2\,000) = 2\,420 \text{ ден. ед.}$$

Сумма начисленных процентов равна

$$I = FV - PV = 2\,420 - 2\,000 = 420 \text{ ден. ед.};$$

б) при $m = 4$ количество периодов начисления равно $N = m \cdot n = 4 \cdot 2 = 8$. Наращенная сумма составит:

$$FV = PV \cdot (1 + j / m)^{m \cdot n} = 2\,000 \cdot (1 + 0{,}1 / 4)^8 = 2\,437 \text{ ден. ед.},$$

FV = БС(10 %/4;2*4;;–2000) = 2 437 ден. ед.

Сумма процентов равна $I = FV - PV = 2\,437 - 2\,000 = 437$ ден. ед.

в) при $m = 12$ количество периодов начисления $N = m \cdot n = 4 \cdot 12 = 24$. Наращенная сумма составит:

$$FV = PV \cdot (1 + j / m)^{m \cdot n} = 2\,000 \cdot (1 + 0{,}1 / 12)^{24} = 2\,441 \text{ ден. ед.},$$

FV = БС(10 % / 12;2*12;; – 2 000) = 2 441 ден. ед.

Сумма процентов равна $I = FV - PV = 2\,441 - 2\,000 = 441$ ден. ед.

Видно, что чем больше раз в году начисляются проценты, тем больше наращенная сумма и, как следствие, процентные деньги.

Наряду с номинальной ставкой существует эффективная ставка, измеряющая тот реальный относительный доход, который получен в целом за год с учетом внутригодовой капитализации. Эффективная ставка показывает, какая годовая ставка сложных процентов дает тот же финансовый результат, что и m-разовое наращение в году по ставке j/m. Эффективная ставка определяется по формуле:

$$i_{eff} = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1.$$

<u>Замечание</u>. В MS Excel эффективная ставка по сложным процентам вычисляется с помощью функции ЭФФЕКТ (номинальная_ ставка; кол_пер).

Пример 2.7. Определить эффективную ставку финансовой операции при: а) ежеквартальном, б) ежемесячном начислении процентов по годовой ставке 10 %.

<u>*Решение*</u>. Параметры задачи: $j = 10$ %.

а) при $m = 4$ эффективная ставка равна

$$i_{eff} = (1 + j / m)^m - 1 = (1 + 0{,}1 / 4)^4 - 1 = 0{,}103\,8 \text{ или } 10{,}38\ \%,$$

i_{eff} = ЭФФЕКТ(10 %;4) = 0,103 8.

б) при $m = 12$ эффективная ставка равна

$$i_{eff} = (1 + j / m)^m - 1 = (1 + 0{,}1 / 12)^{12} - 1 = 0{,}104\,7 \text{ или } 10{,}47\ \%,$$

i_{eff} = ЭФФЕКТ(10 %;12) = 0,104 7.

Таким образом, годовая ставка, эквивалентная номинальной ставке 10 % годовых при ежемесячном начислении процентов, составит 10,47 % против 10,38 % с ежеквартальным начислением процентов. Очевидно, что чем больше периодов начисления, тем быстрее идет процесс наращения.

Расчет эффективной ставки является мощным инструментом финансового анализа, поскольку ее значение позволяет сравнивать между собой финансовые операции, имеющие различные условия: чем выше эффективная ставка финансовой операции, тем (при прочих равных условиях) она выгоднее для кредитора.

Если известна эффективность i_{eff} финансовой операции, то номинальная ставка определяется по формуле:

$$j = m\cdot\left(\sqrt[m]{1+i_{eff}}-1\right).$$

Замечание. В MS Excel номинальная ставка вычисляется с помощью функции НОМИНАЛ (эффективная_ставка; кол_пер).

Пример 2.8. Какая номинальная ставка процентов при ежемесячном начислении процентов даст эффективность финансовой операции 10 %?

Решение. Параметры задачи: i_{eff} = 10 %. Номинальная ставка равна

$$j = m\cdot\left(\sqrt[m]{1+i_{eff}}-1\right) = 12\cdot\left(\sqrt[12]{1+0{,}1}-1\right) = 0{,}095\,7 \text{ или } 9{,}57\ \%,$$

$$j = \text{НОМИНАЛ}(10\ \%;12) = 0{,}095\,7.$$

Таким образом, номинальная ставка 9,57 % обеспечивает годовую доходность 10 %.

2.3 Непрерывное начисление процентов

В современных условиях, с развитием систем электронных платежей, проценты могут начисляться даже чаще, чем один раз в день. При бесконечно частом ($m \to \infty$) дроблении года на малые процентные периоды, т. е. при непрерывном наращении сложных процентов по ставке j, наращенная сумма равна

$$FV = = \lim_{m\to\infty} PV\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn} = PV\left[\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{j}}\right]^{jn} = PV\cdot e^{jn}.$$

Ставка непрерывных процентов называется *силой роста* (*интенсивностью*) и обозначается δ. Тогда наращенная сумма есть

$$FV = PV\cdot e^{\delta\cdot n}.$$

Сила роста δ характеризует относительный прирост наращенной суммы за бесконечно малый промежуток времени.

Пример 2.9. Кредит в размере на 100 000 ден. ед. получен сроком на 3 года под 8 % годовых. Определить сумму, подлежащую возврату в конце срока кредита, если проценты начисляются: а) один раз в год; б) ежемесячно; в) ежедневно; г) непрерывно.

Решение. Параметры задачи: PV = 100 000 ден. ед., i = 8 %, n = 3 года.

а) при m = 1 начисление процентов происходит один раз в году:

$$FV = 100\,000\cdot(1+0{,}08)^3 = 125\,971 \text{ ден. ед.;}$$

б) при m = 12 имеет место ежемесячное начисление процентов:

$$FV = 100\,000 \cdot (1 + 0{,}08 / 12)^{12 \cdot 3} = 127\,024 \text{ ден. ед.};$$

в) при $m = 365$ происходит ежедневное начисление процентов:

$$FV = 100\,000 \cdot (1 + 0{,}08 / 365)^{365 \cdot 3} = 127\,122 \text{ ден. ед.};$$

г) при $m \to \infty$ имеет место непрерывное начисление процентов:

$$FV = 100\,000 \cdot e^{0{,}08 \cdot 3} = 127\,125 \text{ ден. ед.}$$

Видно, что непрерывное начисление процентов дает наибольшую наращенную сумму.

2.4 Определение срока платежа и уровня процентной ставки

В любой простейшей финансовой операции всегда присутствуют четыре величины: первоначальная сумма *PV*, наращенная сумма *FV*, процентная ставка *i* и время *n*. Как правило, в финансовых контрактах обязательно фиксируются сроки, даты, периоды начисления процентов, поскольку фактор времени в финансово-коммерческих расчетах играет важную роль. Однако бывают ситуации, когда срок финансовой операции прямо в условиях финансовой сделки не оговорен, или когда неизвестна процентная ставка. В таких случаях неизвестный параметр находится из соответствующего соотношения.

Замечание. В MS Excel общее количество периодов начисления процентов в схеме сложных процентов определяется с помощью функции КПЕР (ставка; плт;пс;бс; тип). Сложная процентная ставка определяется с помощью функции СТАВКА (кпер; плт; пс; бс; тип).

Пример 2.10. Через какое время вклад размером 200 000 ден. ед станет равным 500 000 ден. ед. при ставке 16 % годовых и начислении процентов: а) ежегодно; б) ежемесячно; в) непрерывно.

Решение. Параметры задачи: $i = 16$ %, $PV = 200\,000$ ден. ед., $FV = 500\,000$ ден. ед.

Из равенства $FV = PV\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot n}$ определим срок финансовой операции

$$n = \frac{\ln \frac{FV}{PV}}{m \ln\left(1 + \frac{j}{m}\right)};$$

а) при $m = 1$ получим

$$n = \frac{\ln \frac{FV}{PV}}{m \ln\left(1 + \frac{j}{m}\right)} = \frac{\ln \frac{500\ 000}{200\ 000}}{1 \cdot \ln\left(1 + \frac{0,16}{1}\right)} = 6,174 \text{ лет или 6 лет 63 дня,}$$

$$n = \text{КПЕР(16 \%;;– 200 000;500 000)} = 6,174;$$

б) при $m = 12$ получим

$$n = \frac{\ln \frac{FV}{PV}}{m \ln\left(1 + \frac{j}{m}\right)} = \frac{\ln \frac{500\ 000}{200\ 000}}{12 \cdot \ln\left(1 + \frac{0,16}{12}\right)} = 5,765 \text{ лет или 5 лет 279 дней,}$$

$$n = \text{КПЕР(16 \%/12;;– 200 000;500 000)/12} = 5,765;$$

в) при $m \to \infty$ получим

$$n = \frac{\ln \frac{FV}{PV}}{\delta} = \frac{\ln \frac{500\ 000}{200\ 000}}{0,16} = 5,727 \text{ лет или 5 лет 265 дней.}$$

Таким образом, с увеличением количества начислений процентов в году, срок финансовой операции уменьшается.

Пример 2.11. На сколько дней можно дать в долг 1 000 ден. ед., исходя из 8 % годовых (простые проценты), если возвращенная сумма будет составлять 1 075 ден. ед.?

<u>Решение</u>. Параметры задачи: $PV = 1\ 000$ ден. ед., $FV = 1\ 075$ ден. ед., $i = 8$ %. Из формулы $FV = PV\left(1 + \frac{t}{T} \cdot i\right)$ получим:

– для обыкновенных процентов

$$t = \frac{FV - PV}{PV \cdot i} \cdot T = \frac{1\ 075 - 1\ 000}{1\ 000 \cdot 0,08} \cdot 360 = 338 \text{ дней;}$$

– для точных процентов

$$t = \frac{FV - PV}{PV \cdot i} \cdot T = \frac{1\ 075 - 1\ 000}{1\ 000 \cdot 0,08} \cdot 365 = 342 \text{ дня.}$$

Таким образом, сумма в 1 000 ден. ед. будет предоставлена на срок в 342 дня, если в условиях финансовой операции используется термин «точные проценты», а по умолчанию или использованию термина «обыкновенные проценты», срок ссуды сокращается до 338 дней.

Пример 2.12. В контракте предусматривается погашение обязательств через 120 дней в сумме 1 200 ден. ед., при первоначальной сумме долга 1 150 ден. ед. Определить доходность операции для кредитора в виде простой процентной ставки.

Решение. Параметры задачи: PV = 1 150 ден.ед., t = 120 дней, FV = 1 200 ден. ед. Рассчитываем годовую процентную ставку, используя обыкновенные проценты, поскольку в условиях сделки нет ссылки на точные проценты:

$$i = \frac{FV - PV}{PV \cdot t} \cdot T = \frac{1\,200 - 1150}{1150 \cdot 120} \cdot 360 = 0{,}13 \text{ или } 13\ \%.$$

Таким образом, доходность финансовой операции составит 13 % годовых, что соответствует весьма высокодоходной финансовой операции, так как обычно доходность подобных операций колеблется от 2 % до 8 %.

Пример 2.13. Через сколько лет первоначальная сумма депозита возрастёт в два раза, если на вложенные средства начисляется 9,75 % годовых и используются сложные проценты с полугодовой капитализацией?

Решение. Параметры задачи: $FV = 2 \cdot PV$, i = 9,75 %, m = 2.

Из равенства $FV = PV\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot n}$ имеем

$$n = \frac{\ln 2}{2 \cdot \ln\left(1 + \frac{0{,}097\,5}{2}\right)} = 7{,}281 \text{ года или 7 лет 103 дня.}$$

Таким образом, для удвоения суммы на депозите понадобится 7 лет 103 дня при ставке сложных процентов 9,75 % годовых с полугодовой капитализацией.

2.5 Задачи для самостоятельного решения

1 Ссуда в размере 1 000 000 ден. ед. выдана 20 января до 5 октября невисокосного года включительно под 18 % годовых. Определите сумму долга в конце срока? Найдите решение тремя практиками расчета.

2 Банк предлагает вкладчикам следующие условия по срочному годовому депозиту: первое полугодие – процентная ставка 12 % годовых, каждый следующий квартал ставка возрастает на 2,5 %. Проценты начисляются только на первоначально внесенную сумму вклада. Определите наращенную сумму за год, если вкладчик поместил в банк на этих условиях 400 000 ден. ед.

3 Клиент поместил в банк 500 000 ден. ед. Какова будет наращенная сумма вклада за 3 месяца, если за первый месяц начисляются простые проценты в размере 10 % годовых, а каждый последующий месяц процентная ставка возрастает на 5 % с одновременной капитализацией процентного дохода?

4 Какой величины достигнет долг, равный 1 000 000 ден. ед. через 5 лет при росте по сложной ставке 15 % годовых?

5 Сумму 1 000 $ разместили на депозит до востребования 13.01.2011 под сложную ставку 6 % годовых. Какую сумму снимет вкладчик 1.09.2013 (в смешанном методе используются точные проценты)?

6 Какой капитал нужно вложить сегодня, чтобы он вместе с 8 % годовых в течение 10 лет и 8 месяцев увеличился на 60 000 ден. ед?

7 Кредит в размере 30 000 ден. ед. выдан на 3 года и 160 дней под 16,5 % сложных годовых. Найдите сумму долга на конец срока двумя методами.

8 Какой величины достигнет долг, равный 1 000 000 ден. ед., через 5 лет по сложной ставке 15 % годовых, если проценты начисляются: а) один раз в году, б) ежеквартально, в) ежемесячно, г) непрерывно?

9 Найдите эффективную ставку процента, если номинальная ставка равна 24 % при ежемесячном начислении процентов.

10 Какой капитал был внесен в банк, если он, вложенный на 7 лет под процентную ставку 8 % и 3-месячную капитализацию, увеличился на 30 000 ден. ед. при вычислении сложных процентов?

11 Какую сумму следует поместить на банковский депозит, чтобы через 5 лет получить 300 000 ден. ед., если проценты начисляются непрерывно по ставке 18 %?

12 Вы получили в банке ссуду на 2 года в размере 5 000 000 ден. ед. Ссуда принесла банку годовой доход 100 000 ден. ед. Определите годовую процентную ставку (простую и сложную).

13 Определите, что выгоднее: за 3 года увеличение вклада в три раза или 46 % годовых?

3 Дисконтирование

3.1 Сущность дисконтирования

В финансовой практике часто приходится решать задачи, обратные определению наращенной суммы: по уже известной наращенной сумме FV следует определить неизвестную первоначальную сумму долга PV. Такой расчет называется *дисконтированием* или *приведением* стоимостного показателя к заданному моменту времени, а величина PV называется *современной* (*приведенной* или *текущей*) величиной FV. Таким образом, *дисконтирование* – это приведение будущих денег к текущему моменту времени. При этом не имеет значения, имела ли место в действительности данная финансовая операция, а также можно ли считать дисконтируемую сумму буквально наращенной.

Исходя из методики начисления процентов, используются два вида дисконтирования:

– математическое дисконтирование по обычной процентной ставке

$$i = \frac{FV - PV}{PV};$$

– банковский учет по учетной ставке $d = \frac{FV - PV}{FV}$.

Процесс начисления и удержания процентов вперед, до наступления срока погашения долга, называется *учетом*, а сами проценты в виде разности наращенной и первоначальной сумм долга называются *дисконтом*:

$$D = FV - PV.$$

Такие ситуации возникают при разработке условий финансовой сделки, или когда проценты с наращенной суммы удерживаются непосредственно при выдаче кредита.

3.2 Математическое дисконтирование

Математическое дисконтирование – это формальное решение задачи, обратной задаче о наращении суммы долга. В зависимости от способа применения процентной ставки i в течение n периодов из формул наращенных сумм получаем:

а) простая процентная ставка $PV = FV \cdot (1 + n \cdot i)^{-1}$;

б) сложная процентная ставка $PV = FV \cdot (1 + i)^{-n}$;

в) номинальная ставка процентов с m разовым начислением процентов в году $PV = FV \cdot (1 + \frac{j}{m})^{-mn}$;

г) непрерывная ставка процентов $PV = FV \cdot e^{-n\delta}$.

Замечание. В MS Excel современная величина определяется с помощью функции ПС(ставка, клер, плт, [бс], [тип]).

Пример 3.1. Через 150 дней с момента подписания контракта необходимо уплатить 310 000 ден. ед., исходя из 28 % годовых (простые проценты) и временной базы 360 дней. Определить первоначальную сумму долга.

Решение. Параметры задачи: FV = 310 000 ден. ед., t = 150 дней, T = 360, i = 28 %. Получим

$$PV = FV \cdot (1 + n \cdot i)^{-1} = \frac{310\,000}{1 + 0{,}28 \cdot \frac{150}{360}} = 277\,612 \text{ ден. ед.}$$

Таким образом, первоначальная сумма долга составила 277 612 ден. ед., а проценты за 150 дней равны 310 000 – 277 612 = 32 388 ден. ед.

Пример 3.2. Фирме потребуется 50 000 ден. ед. через 3 года. В настоящее время фирма располагает деньгами и готова разместить их на депозит единым вкладом, чтобы через 3 года он достиг 50 000 ден. ед. Определить необходимую сумму текущего вклада, если ставка процентов по нему 8 % годовых и проценты начисляются ежемесячно.

<u>*Решение*</u>. Параметры задачи: FV = 50 000 ден. ед., i = 8 %, n = 3 года, m = 12. Имеем

$$PV = \frac{50\,000}{\left(1+\frac{0,08}{12}\right)^{12\cdot 3}} = 39\,363 \text{ ден. ед.},$$

$$PV = \text{ПС}(8\ \%/12;3*12;;-\ 50\,000) = 39\,363.$$

Таким образом, первоначальное вложение составляет 39 363 ден. ед.

3.3 Дисконтирование по простой учетной ставке

Сформулируем задачу банковского дисконтирования. По заданной сумме FV, которая будет выплачена через время n лет, требуется определить сумму долга PV в настоящий момент, при котором проценты за пользование ссудой выплачиваются заранее, в момент $t = 0$ предоставления денег в долг. Для начисления и удержания процентов применяется простая учетная ставка d.

Пусть $t = n$ – момент погашения суммы FV. Согласно определению простой учетной ставки, сумма, которую необходимо выдать в долг в момент $t = n - 1$, равна $FV - d\cdot FV = FV(1-d)$. Величина дисконта за n – й период дисконтирования есть $d{\cdot}FV$. Сумма, которую необходимо выдать в долг в момент $t = n - 2$, равна $FV(1-d) - d\cdot FV = FV(1-2d)$, дисконт – $d{\cdot}FV$ и т. д. Аналогично, в начальный момент времени $t = 0$ современная величина суммы FV равна $PV = FV(1-(n-1)d) - FV\cdot d = FV(1-n\cdot d)$.

Таким образом, формула банковского учета имеет вид

$$PV = FV(1-n\cdot d).$$

Данное соотношение означает, что в обмен на выплату суммы FV через время n кредитор даст взаймы сумму $FV(1-nd)$ в начале этого срока.

Если срок финансовой операции меньше года, то для вычисления современной величины используется формула

$$PV = FV\left(1-\frac{t}{T}\cdot d\right),$$

где t – число дней проведения операции;

T – временная база (число дней в году – 360 или 365 (366)).

Замечание. Дисконтирование по схеме простых процентов имеет смысл, если срок n и учетная ставка d удовлетворяют условию $n\,d < 1$.

Пример 3.3. Вексель выдан на 5 000 ден. ед. с уплатой 17 ноября невисокосного года, а владелец учел его в банке 19 августа того же года по учетной ставке 8 %. Определить сумму, полученную предъявителем векселя, и доход банка при реализации дисконта.

Решение. Параметры задачи: FV = 5 000 ден. ед., $t_{\text{упл}}$ = 17.11.2013, $t_{\text{учет}}$ = 19.11.2013, d = 8 %, T = 360.

Для определения суммы при учете векселя рассчитываем число дней, оставшихся до погашения обязательств:

t = 13 (август) + 30 (сентябрь) + 31 (октябрь) + 17 (ноябрь) – 1 = 90 дней.

Отсюда

$$PV = 5\,000 \cdot \left(1 - \frac{90}{360} \cdot 0{,}08\right) = 4\ 900 \text{ ден. ед.}$$

Тогда дисконт составит $D = FV - PV$ = 100 ден. ед. Следовательно, предъявитель векселя получит сумму 4 900 ден. ед., а банк при наступлении срока векселя реализует дисконт в размере 100 ден. ед.

3.4 Дисконтирование по сложной учетной ставке

Современная величина. Рассмотрим процесс дисконтирования суммы FV по периодам, начиная с n-го. Такой порядок рассмотрения периодов означает, что n-й период дисконтирования является предыдущим по отношению к $(n-1)$-му, $(n-1)$-й период является предыдущим по отношению к $(n-2)$-му и т. д. Сумма, которую необходимо выдать в долг в момент $t = n - 1$, т. е. за единицу времени до погашения суммы FV, есть $FV - d \cdot FV = FV(1-d)$. Сумма, которую необходимо выдать в долг в момент $t = n - 2$, за два периода до погашения суммы FV, есть $FV(1-d) - d \cdot FV(1-d) = FV(1-d)^2$. И так далее. Приведенная к моменту $t = 0$ величина суммы FV – это сумма, которую необходимо выдать в долг в момент $t = 0$ за n периодов до погашения суммы FV, и она равна

$$FV(1-d)^{n-1} - d \cdot FV(1-d)^{n-1} = FV(1-d)^n.$$

Таким образом, современная величина суммы FV при банковском учете ее сложными процентами по ставке d в течение n периодов имеет вид

$$PV = FV(1-d)^n.$$

Величина $(1-d)^n$ называется *множителем дисконтирования по сложной учетной ставке*.

Пример 3.4. Определить величину суммы, выдаваемую заемщику, если он обязуется вернуть ее через 2 года в размере 55 000 ден. ед. Банк определяет свой доход с использованием годовой учетной ставки 30 %.

Решение. Параметры задачи: FV = 55 000 ден. ед., n = 2 года, d = 30 %. По формуле дисконтирования по сложной учетной ставке, определяем:

$$PV = 55\,000 \cdot (1 - 0{,}3)^2 = \text{ден. ед.}$$

Заемщик может получить ссуду в размере 26 950 ден. ед., а через 2 года вернет 55 000 ден. ед.

Дисконтирование *m* раз в году. Если дисконтирование по сложной учетной ставке производится не один, а m раз в году, то годовая учетная ставка называется *номинальной* и обозначается через f. При дисконтировании по сложной учетной ставке через равные промежутки времени m раз в году в начале каждого периода длиной $1/m$ начисляются и удерживаются проценты по ставке f / m. Если срок долга n лет, то $N = m{\cdot}n$ – число периодов применения ставки f / m в сроке долга. Тогда современная величина равна

$$PV = FV\left(1 - \frac{f}{m}\right)^{m \cdot n}, \; m \geq 1.$$

Эффективная учетная ставка d_{eff} – это годовая учетная ставка сложных процентов, удерживаемых один раз в начале года, обеспечивающая тот же финансовый результат, что и m-разовое дисконтирование в году по ставке f / m. Если срок долга n лет, то из эквивалентности процентных ставок следует:

$$d_{eff} = 1 - \left(1 - \frac{f}{m}\right)^{m}.$$

Годовая эффективная учетная ставка d_{eff} измеряет реальный относительный доход, получаемый за год при m-разовом дисконтировании в году.

Пример 3.5. Какой годовой эффективной учетной ставкой можно заменить в контракте годовую номинальную учетную ставку 5 % при поквартальном учете суммы погашаемого долга?

Решение. Параметры задачи: m = 4, f = 0,05. Тогда имеем

$$d_{eff} = 1 - \left(1 - \frac{0{,}05}{4}\right)^{4} = 0{,}049\,07 \text{ или } 4{,}907\ \%.$$

Для участников сделки безразлично, производить дисконтирование 4 раза в году в начале каждого квартала по ставке 5 %/4 = 1,25 % или 1 раз в начале года по ставке 4,907 %. Финансовые обязательства сторон сохраняются.

Если требуется определить годовую номинальную учетную ставку f при заданных d_{eff} и m, то получаем

$$f = m\cdot\left(1-(1-d_{eff})^{\frac{1}{m}}\right).$$

Пример 3.6. Какой должна быть годовая номинальная учетная ставка, соответствующая эффективной учетной ставке 5 % при: а) поквартальном, б) ежемесячном учете суммы погашаемого долга?

Решение. Параметры задачи: $d_{eff} = 0{,}05$.

а) при $m = 4$ имеем

$$f = 4\cdot\left(1-(1-0{,}05)^{\frac{1}{4}}\right) = 0{,}050\,9 \text{ или } 5{,}09\ \%;$$

б) при $m = 12$ имеем

$$f = 12\cdot\left(1-(1-0{,}05)^{\frac{1}{12}}\right) = 0{,}051\,2 \text{ или } 5{,}12\ \%.$$

Видно, что увеличение периодов дисконтирования в году увеличивает номинальную учетную ставку. Финансовые обязательства сторон сохраняются.

3.5 Непрерывное дисконтирование по учетной ставке

Непрерывное дисконтирование – это дисконтирование на бесконечно малых отрезках времени, т. е. при $\frac{1}{m} \to 0$ при $m \to \infty$. Так как при непрерывном начислении процентов начало и конец периода начисления процентов совпадают, то номинальные процентные ставки j и f при $m \to \infty$ перестают различаться. Поэтому при $m \to \infty$ пользуются одной процентной ставкой – силой роста δ. Тогда при непрерывном дисконтировании для современной величины имеет место формула:

$$PV = FV\cdot e^{-n\delta}.$$

Пример 3.7. Сумма в размере 10 000 ден. ед. должна быть возвращена через 5 лет. Сравнить современные величины этого долга по годовой учетной ставке 12 % при дисконтировании: а) по полугодиям; б) ежеквартально; в) непрерывно.

Решение. Параметры задачи: $n = 5$, $FV = 10\,000$ ден. ед., $f = 12\ \%$.

а) при $m = 2$ имеем

$$PV = 10\,000\cdot\left(1-\frac{0{,}12}{2}\right)^{5\cdot 2} = 5\,386 \text{ ден. ед.};$$

б) при $m = 4$ имеем

$$PV = 10\,000\cdot\left(1-\frac{0{,}12}{4}\right)^{5\cdot 4} = 5\,438 \text{ ден. ед.};$$

в) при $m \to \infty$, $\delta = 0{,}12$ имеем

$$PV = 10\,000 \cdot e^{-5 \cdot 0{,}12} = 5\,488 \text{ ден. ед.}$$

Видно, что с увеличением m современная стоимость суммы 10 000 ден. ед. увеличивается, следовательно, дисконт уменьшается.

3.6 Наращение по учетной ставке

Если решается задача, обратная банковскому дисконтированию, то для нахождения суммы погашаемого долга пользуются учетной ставкой. Из формул для современной величины получим:

$$FV = PV \cdot (1 - n\,d)^{-1},$$

$$FV = PV \cdot (1 - d)^{-n},$$

$$FV = PV \cdot (1 - f\,/\,m)^{-m\,n}.$$

При непрерывном наращении, если $m \to \infty$, номинальные процентные ставки j и f перестают различаться и справедлива формула

$$FV = PV \cdot e^{\delta n}.$$

3.7 Определение срока ссуды и уровня учетной ставки

Продолжительность срока ссуды или процентная ставка при условии, что остальные параметры фиксированы, находятся из формул современной величины относительно неизвестного параметра.

Пример 3.8. Определить величину учетной ставки, если кредит был выдан 01.01.11 на сумму 870 000 ден. ед. с погашением суммы долга в 1 000 000 ден. ед. через 3 месяца.

Решение. Параметры задачи: FV = 1 000 000 ден. ед., PV = 870 000 ден. ед., t = 90 дней, T = 360. Искомую величину d (учетную ставку) выразим из формулы $PV = FV\left(1 - \frac{t}{T}d\right)$:

$$d = \frac{FV - PV}{FV} \cdot \frac{T}{t} = \frac{1\,000\,000 - 870\,000}{1\,000\,000} \cdot \frac{360}{90} = 0{,}527\,2 \text{ или } 52{,}72\ \%.$$

С помощью функции СКИДКА(дата_согл, дата_погашения, цена, погашение, [базис]) в MS Excel получим

D = СКИДКА("1.01.11";"1.04.11.";870 000;1 000 000;1) = 52,72 %.

Таким образом, учетная ставка 52,72 % обеспечит дисконт

D = 1 000 000 – 870 000 = 130 000 ден. ед.

3.8 Расчет доходности по вексельным операциям

Вексель представляет собой разновидность письменного долгового обязательства векселедателя об оплате суммы, указанной на векселе, его владельцу (векселедержателю) при наступлении срока платежа или по его предъявлению.

Предположим, что вексель продан через некоторое время после его покупки до наступления срока его погашения. Эффективность этой операции может быть измерена с помощью простых или сложных процентов. При этом финансовая результативность зависит от разности цен купли-продажи, которая определяется уровнем учетных ставок и сроками до погашения векселя. Дисконтирование может производиться по простой или сложной учетным ставкам.

Пусть номинал векселя равен FV. Вексель был куплен по учетной ставке d_1 за t_1 дней до наступления срока. Временная база учета для вексельных операций, как правило, $T = 360$ дней. И пусть дисконтирование производится по простой учетной ставке d_1 за t_1 дней до срока погашения. Цена векселя в момент покупки составила

$$PV_1 = FV\left(1 - \frac{t_1}{T} \cdot d_1\right),$$

за t_2 дней до погашения вексель был продан по ставке d_2 по цене

$$PV_2 = FV\left(1 - \frac{t_2}{T} \cdot d_2\right).$$

Для средне- и долгосрочных операций с векселями, как правило, применяется сложная учетная ставка. Тогда цена векселя в момент покупки за n_1 лет до погашения составила: $PV_1 = FV(1 - d_1)^{n_1}$. За n_2 лет до погашения вексель был продан по ставке d_2 по цене

$$PV_2 = FV(1 - d_2)^{n_2}.$$

Доходность операций с векселями оценивается с помощью простой или сложной процентных ставок.

Доходность, оцененная в виде простой процентной ставки, равна

$$i = \frac{PV_2 - PV_1}{PV_1(n_1 - n_2)}.$$

Доходность, оцененная в виде сложной процентной ставки, равна

$$i = \sqrt[n_1 - n_2]{\frac{PV_2}{PV_1}} - 1.$$

Векселя могут выпускаться и в виде ценной бумаги с фиксированным доходом, выплачиваемым по ставке g в срок погашения. Современная стоимость такого векселя при учете будет равна

$$FV = PV \cdot \left[1 + \frac{t}{T} \cdot g\right] \cdot \left[1 - \frac{t_1}{T} \cdot d\right],$$

где t – срок векселя;

t_1 – число дней до погашения;

d – учетная ставка банка.

Пример 3.9. Долговое обязательство в сумме 200 000 ден. ед. должно быть погашено через 90 дней с процентами 10,5 % годовых. Владелец обязательства учел его в банке по учетной ставке 12,5 % за 15 дней до наступления срока. Чему равны наращенная сумма и прибыль банка?

Решение. Параметры задачи: PV = 200 000 ден. ед., t = 90 дней, g = 10,5 %, t_1 = 15 дней, d = 12,5 %.

Полученная после учета сумма составила

$$FV = 200\ 000 \cdot \left[1 + \frac{90}{360} \cdot 0{,}105\right] \cdot \left[1 - \frac{15}{360} \cdot 0{,}125\right] = 204\ 180 \text{ ден. ед.}$$

Процентные деньги равны

$$D = 200\ 000 \cdot 0{,}105 \cdot \frac{90}{360} - 204\ 180 = 1\ 070 \text{ ден. ед.}$$

Таким образом, дисконт банка составил 1 070 ден. ед.

3.9 Задачи для самостоятельного решения

1 Вексель выдан на сумму 1 000 000 ден. ед. с уплатой 17 ноября. Владелец векселя учел его в банке 23 сентября по учетной ставке 20 %. Определите полученную при учете сумму и дисконт.

2 Задолженность по договору одного предприятия перед другим составляет 10 000 000 ден. ед. Согласно условиям договора задолженность погашается векселем на данную сумму. Срок обращения данного векселя – 1 год с момента его получения предприятием. Через полгода вексель был учтен по простой ставке 3 % годовых. Определите полученную сумму.

3 Вексель учтен в банке по учетной ставке 18 % годовых за 150 дней до его погашения. Владелец векселя получил 925 000 ден. ед. Определите номинал векселя.

4 Найдите величину дисконта от суммы задолженности в размере 50 000 ден. ед. за полгода по простой учетной ставке 1,5 % в месяц.

5 Ценная бумага на сумму 500 000 ден. ед. учтена за 3 года до срока погашения по сложной учетной ставке 15 % годовых. Какова сумма дисконта? Как изменится дисконт при ежемесячном дисконтировании?

6 Вексель номинальной стоимостью 1 000 ден. ед. и сроком обращения 2 года учтен за 2 месяца до окончания срока обращения по сложной учетной ставке 10 % годовых. Найдите стоимость векселя на момент его учета.

7 Кредит в размере 350 000 ден. ед. выдан на 2,5 года. По условиям договора начисление процентов производится по сложной учетной ставке 12 % годовых. Определить наращенную сумму, если проценты начисляются: а) ежегодно; б) по полугодиям; в) ежемесячно; г) непрерывно?

8 Вексель номинальной стоимостью 5 000 ден. ед. и сроком обращения один год учтен за 6 месяцев до окончания срока его обращения по номинальной учетной ставке 10 % годовых. Найти стоимость векселя на момент его учета, если операция учета производится ежемесячно.

9 Ценная бумага на сумму 500 000 ден. ед., срок платежа по которой наступает через 3 года, продана с дисконтом по номинальной учетной ставке 12 % при помесячном дисконтировании. Определите сумму дисконта и эффективную учетную ставку.

10 Вексель номиналом 100 000 ден. ед. куплен за 150 дней до его погашения, простая учетная ставка – 15 %.Через 30 дней его реализовали по простой учетной ставке 12 %. Оцените эффективность финансовой операции в виде простой процентной ставки.

11 Вексель номиналом 200 000 рублей куплен за 5 лет до срока погашения. Сложная учетная ставка – 10 %. Через 3 года его продали по сложной учетной ставке 8 %. Оцените эффективность этой финансовой операции в виде сложной учетной ставки.

4 Эквивалентность ставок

4.1 Принцип финансовой эквивалентности обязательств

В финансовой практике часто возникают ситуации, когда необходимо заменить одно обязательство другим, например с более отдаленным сроком платежа, досрочно погасить задолженность, объединить несколько платежей в один, изменить схему начисления процентов и т. п. Изменение условий контракта основывается на *принципе финансовой эквивалентности обязательств*, который позволяет сохранить баланс интересов сторон контракта. Этот принцип предполагает неизменность финансовых отношений до и после изменения условий контракта. При изменении способов начисления процентов необходимо учитывать взаимозаменяемость между различными видами процентных ставок. *Эквивалентными* называются *процентные ставки*, которые при замене одной на другую приводят к одинаковым финансовым результатам, т. е. отношения сторон не изменяются в рамках одной финансовой операции. При изменении условий платежей также необходимо учитывать разновременность платежей, которые производятся в ходе выполнения условий контракта до и после его изменения. *Эквивалентными* считаются такие *платежи*, которые оказываются равными после их приведения по заданной процентной ставке к одному моменту времени, либо после приведения одного из них к моменту наступления другого по заданной процентной ставке.

4.2 Эквивалентность процентных ставок

Для нахождения значений эквивалентных процентных ставок следует составлять уравнение эквивалентности.

Эквивалентность простой процентной и простой учетной ставок. Исходные уравнения для вывода эквивалентности $FV = PV\,(1 + n \cdot i)$ и $FV = PV\,(1 - n \cdot d)^{-1}$. Если результаты наращения равны, то получаем уравнение $PV\,(1 + n \cdot i) = PV\,(1 - n \cdot d)^{-1}$. Отсюда $i = d/(1 - n \cdot d)^{-1}$ и $d = i/(1 + n \cdot i)^{-1}$. Для одних и тех же параметров ссуды условие эквивалентности приводит к тому, что $d < i$. При этом с ростом срока финансовой операции различие между ставками увеличивается.

Пример 4.1. Определить простую учетную ставку, эквивалентную ставке обычных процентов 12 % годовых, при наращении за 2 года.

Решение. Параметры задачи: n = 2 года, i = 12 %. Тогда

$$d = 0{,}12/(1 + 2 \cdot 0{,}12i)^{-1} = 0{,}096\,8 \text{ или } 9{,}7\ \%.$$

Следовательно, операция, в которой принята учетная ставка 9,7 %, дает тот же финансовый результат для 2-годичного периода, что и простая ставка 12 % годовых.

Эквивалентность простой и сложной процентных ставок. Наращенные суммы по простой и сложной процентным ставкам равны $FV = PV(1 + n \cdot i_п)$ и $FV = PV(1 + i_c)^n$. Если равны результаты наращения, то уравнение эквивалентности $1 + n \cdot i_п = (1 + i_c)^n$. Отсюда $i_п = ((1 + i_c)^n - 1)/n$ и $i_c = \sqrt[n]{1 + i_п} - 1$. При начислении процентов m раз в году аналогично рассуждая, получим:

$$i_п = \frac{1}{n}\left(\left(1 + \frac{j_c}{m}\right)^{mn} - 1\right) \text{ и } i_C = m\left(\sqrt[mn]{1 + \frac{j_C}{m}} - 1\right).$$

Пример 4.2. Предполагается поместить капитал на 4 года либо под сложную процентную ставку 20 % годовых с полугодовым начислением процентов, либо под простую процентную ставку 26 % годовых. Найти оптимальный вариант.

<u>Решение</u>. Параметры задачи: n = 4 года, m = 2, $i_с$ = 20 %, $i_п$ = 26 %. Находим для сложной процентной ставки эквивалентную простую ставку:

$$i_{п} = \frac{1}{4}\left(\left(1+\frac{0{,}2}{2}\right)^{2\cdot 4}-1\right) = 0{,}285\,9 \text{ или } 28{,}59\ \%.$$

Таким образом, эквивалентная сложной ставке, по первому варианту, простая процентная ставка составляет 28,59 % годовых, что выше предлагаемой простой ставки в 26 % годовых по второму варианту. Следовательно, выгоднее разместить капитал по первому варианту, т. е. под 20 % годовых с полугодовым начислением процентов.

Пример 4.3. По трёхмесячному депозиту назначена ставка 10,2 % годовых. Какую ставку годовых процентов следует назначить на ежемесячные депозиты, чтобы последовательное переоформление этих депозитов привело к такому же результату, что и использование трёхмесячного депозита, если пренебречь двумя днями, которые теряются при переоформлении депозитов (T = 360)?

<u>Решение</u>. Приравняем соответствующие множители наращения:

$$1+0{,}102/4 = (1+i/12)^3.$$

Отсюда получаем, что i = 0,101 1 или 10,11 %.

Эквивалентность сложной процентов и сложной учетной ставок. Исходные соотношения есть $FV = PV(1+i_c)^n$ и $FV = PV(1-d_c)^{-n}$. Аналогично рассуждая, получим $i_c = d_c(1-d_c)^{-1}$ и $d_c = i_c(1+i_c)^{-1}$.

Эквивалентность интенсивности процентов в единицу времени и ставок процентов. Интенсивность процентов δ в единицу времени удобно использовать в теоретических расчетах и обоснованиях финансовых решений. Из соотношений эквивалентности, можно перейти от непрерывного начисления процентов к дискретному, что более приемлемо на практике. Чаще возникает необходимость в соотношениях эквивалентности непрерывной и сложной ставок. Для эквивалентных сложных ставок δ, i и d имеем: $(1+i)^n = e^{n\delta} = (1-d)^{-n}$. Отсюда

$$i = e^{\delta}-1 \text{ и } \delta = \ln(1+i);$$

$$d = 1-e^{-\delta} \text{ и } \delta = -\ln(1-d).$$

Средние величины в финансовых расчетах. Для нескольких процентных ставок их среднее значение есть эквивалентная величина.

Схема простых процентов. Пусть за периоды n_1, n_2, …, n_k начисляются простые проценты по ставкам i_1, i_2, …, i_k. Тогда за весь срок наращения $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ средняя ставка простых процентов получается из уравнения эквивалентности $1+n\cdot\bar{i} = 1+n_1\cdot i_1 + n_2\cdot i_2 + \ldots + n_k\cdot i_k$. Откуда

$$\bar{i} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{k} n_t \cdot i_t \,.$$

Если же за время финансовой операции изменяется и величина *PV*, то средняя ставка простых процентов равна

$$\bar{i} = \frac{\sum_{t=1}^{k} n_t \cdot i_t \cdot PV_t}{\sum_{t=1}^{k} n_t \cdot PV_t}\,.$$

Аналогично средняя простая учетная ставка равна

$$\bar{d} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{k} n_t \cdot d_t \,.$$

Средняя ставка $\bar{i}$ ($\bar{d}$) – это взвешенная средняя арифметическая величина, дающая такое наращение, которое эквивалентно наращению с применением ряда разных по значению процентных ставок, применяемых на различных интервалах времени.

Схема сложных процентов. Пусть доходность операции с дискретно изменяющейся процентной ставкой на каждом интервале начисления была выражена через сложный процент. Уравнение эквивалентности для определения средней процентной ставки, которая равноценна последовательности ставок за весь период финансовой операции, есть

$$(1+\bar{i})^{n} = (1+i_1)^{n_1} \cdot (1+i_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot (1+i_k)^{n_k}\,.$$

Отсюда

$$\bar{i} = \sqrt[n]{(1+i_1)^{n_1} \cdot (1+i_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot (1+i_k)^{n_k}} - 1\,.$$

Следовательно, средняя сложная процентная ставка рассчитывается по формуле средней геометрической взвешенной.

Аналогично средняя сложная учетная ставка равна

$$\bar{d} = 1 - \sqrt[n]{(1-d_1)^{n_1} \cdot (1-d_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot (1-d_k)^{n_k}} - 1\,.$$

Пример 4.4. Долгосрочный кредит предоставлен на 6 лет на следующих условиях: первые два года под 5 % (сложные проценты), в следующие три года ставка возрастает на 2 %, а в последний год – еще на 1 %. Определить среднюю сложную процентную ставку.

<u>*Решение*</u>. Параметры задачи: n_1 = 2 года, i_1 = 5 %, n_2 = 3 года, i_2 = 7 %, n_3 = 1 год, i_3 = 8 %. Срок финансовой операции равен

$$n = n_1 + n_2 + n_3 = 2 + 3 + 1 = 6 \text{ лет.}$$

Средняя ставка сложных процентов равна

$$\bar{i} = \sqrt[6]{(1+0{,}05)^{2} \cdot (1+0{,}07)^{3} \cdot (1+0{,}08)^{1}} - 1 = 0{,}064\,9 \text{ или } 6{,}49\ \%.$$

Таким образом, средняя процентная ставка по кредиту равна 6,49 %.

4.3 Замена и консолидация платежей

Эквивалентными считаются такие платежи, которые, будучи «приведены» к одному моменту времени, оказываются равными. Приведение осуществляется путем дисконтирования к более ранней дате или, наоборот, наращения суммы платежа, если эта дата относится к будущему. Две суммы денег FV_1 и FV_2, выплачиваемые в разные моменты времени, считаются *эквивалентными*, если их современные (или наращенные) величины, рассчитанные по одной и той же процентной ставке и на один момент времени, одинаковы. Общий метод решения задач подобного рода заключается в разработке уравнения эквивалентности, в котором сумма заменяемых платежей, приведенных к некоторому моменту времени, приравнивается к сумме платежей по новому обязательству, приведенных к той же дате. Для краткосрочных контрактов процесс приведения, как правило, реализуется на основе простых ставок, для среднесрочных и долгосрочных – на основе сложных.

Наиболее распространенным способом изменения условий контрактов является *консолидация* (объединение) и *пролонгация* (продление) финансовых обязательств. Соответственно решаются две задачи:

1) при известных суммах платежей и их сроках, известном сроке консолидированного платежа, находится его сумма;

2) при известных суммах платежей и их сроках, известной сумме консолидированного платежа, находится срок его выплаты.

Простая процентная ставка. Для краткосрочных контрактов консолидация осуществляется на основе простых ставок. В случае консолидирования нескольких платежей в один сумма заменяемых платежей, приведенных к одной и той же дате, приравнивается к новому обязательству:

$$FV_0 = \sum_m FV_m \left[1 + (n_0 - n_m) \cdot i\right] + \sum_q FV_q \left[1 + (n_q - n_0) \cdot i\right]^{-1},$$

где FV_0, n_0 – сумма и срок консолидированного платежа;

FV_m – сумма объединенных платежей, сроки погашения которых меньше нового срока $n_m < n_0$;

FV_q – сумма объединенных платежей, сроки погашения которых превышают новый срок $n_q > n_0$.

Пример 4.5. Фирма в погашение задолженности банку за предоставленный кредит 1 января 2011 под 15 % годовых (простые проценты), должна произвести три платежа – 200 ден. ед., 270 ден. ед, 330 ден. ед. в сроки 20.04.11, 25.05.11, 15.06.11. Фирма предложила объединить все платежи в один и погасить его 01.06.11. Определить величину консолидированного платежа.

<u>*Решение*</u>. С учетом порядковых дней года (приложение 1) имеем

$$FV_0 = 200 \cdot \left(1 + \frac{152-110}{365} \cdot 0{,}15\right) + 270 \cdot \left(1 + \frac{152-145}{365} \cdot 0{,}15\right) +$$

$$+ 330 \cdot \left(1 + \frac{166-152}{365} \cdot 0{,}15\right)^{-1} = 802 \text{ ден. ед.}$$

Итак, величина консолидированного платежа равна 802 ден. ед.

Простая учетная ставка. При консолидации векселей по простой учетной ставке d консолидированный платеж FV_0 находится по формуле:

$$FV_0 = \sum_m FV_m \left(1-(n_0-n_m)\cdot d\right)^{-1} + \sum_q FV_q \left(1-(n_q-n_0)\cdot d\right).$$

Пример 4.6. Три векселя со сроками уплаты 15.03.11 (500 ден. ед.), 10.04.11 (88 ден. ед.) и 01.06.11 (900 ден. ед.) заменяются одним со сроком погашения 15.05.11. При консолидации используется простая учетная ставка 9 %. Определить величину консолидированного векселя.

Решение. Имеем

$$FV_0 = 500 \cdot \left(1 - \frac{135-74}{360} \cdot 0{,}09\right)^{-1} + 800 \cdot \left(1 + \frac{135-100}{360} \cdot 0{,}09\right)^{-1} +$$

$$+ 900 \cdot \left(1 + \frac{152-135}{360} \cdot 0{,}09\right) = 2\,211 \text{ ден. ед.}$$

Величина консолидированного векселя равна 2 211 ден. ед.

Сложная процентная ставка. При консолидации векселей в расчетах по сложной процентной ставке расчет консолидированного платежа производится по формуле

$$FV_0 = \sum_m FV_m (1+i)^{n_0-n_m} + \sum_q FV_q (1+i)^{-(n_q-n_0)}.$$

Сложная учетная ставка. При консолидации векселей в расчетах по сложной учетной ставке d консолидированный платеж FV_0 находится по формуле

$$FV_0 = \sum_m FV_m (1-d)^{-(n_0-n_m)} + \sum_q FV_q (1-d)^{n_q-n_0}.$$

Определение срока оплаты консолидированного платежа. Если требуется определить время n_0 оплаты консолидированного платежа FV_0, то составляется уравнение эквивалентности, выбрав в качестве базисной даты начало отсчета. Срок оплаты n_0 есть решение соответствующего уравнения.

Пример 4.7. Платежи в сумме 8 250 ден. ед., 10 050 ден. ед. и 25 450 ден. ед. со сроками оплаты соответственно через 2; 3,5 и 4 года должны быть заменены одним платежом, содержащим целое число тысяч ден. ед. Замена производится на основе сложной ставки 8,75 % годовых.

Чему равна минимальная допустимая сумма платежа, и через какой срок он должен быть оплачен?

Решение. Обозначим через FV сумму заменяемого платежа, через n – срок оплаты этой суммы. Запишем уравнение эквивалентности, выводя все платежи на начало отсчёта:

$$8\,250 \cdot 1{,}087\,5^{-2} + 10\,050 \cdot 1{,}087\,5^{-3{,}5} + 25\,450 \cdot 1{,}087\,5^{-4} = FV \cdot 1{,}087\,5^{-n}.$$

Логарифмируя обе части уравнения и выражая n, получим

$$n = \frac{\ln FV - \ln 32\,664}{\ln 1{,}087\,5}.$$

Формула имеет смысл только тогда, когда $FV > 32\,664$ ден. ед. Следовательно, требуемая сумма $FV = 33\,000$ ден. ед. Подставляя это значение в формулу, имеем $n = 0{,}122$ года или 43 дня.

Замечание. Есть различные возможности изменения условий финансового соглашения, и в соответствии с этим существует многообразие уравнений эквивалентности. Готовыми формулами невозможно охватить все случаи, возникающие в практической деятельности, но в каждой конкретной ситуации при замене платежей уравнение эквивалентности составляется аналогичным образом.

4.4 Задачи для самостоятельного решения

1 Срок до погашения векселя 100 дней. Операция учета векселя должна принести 20 % годовых в виде обычных точных процентов. Какую следует назначить учетную ставку?

2 Кредит предоставлен под 20 % простых годовых на 2 года. Определите доходность в виде сложной годовой процентной ставки.

3 Выясните, являются ли равноценными два обязательства, если по одному из них должно быть выплачено 2 000 000 ден. ед. через 2 года, а по второму – 2 500 000 ден. ед. через 3 года. Для сравнения примените сложную процентную ставку 15 % годовых.

4 Согласно контракту предприятие должно выплатить 200, 300 и 500 ден. ед. соответственно через 1,5 года, 2 и 4 года. Предприятие предлагает пересмотреть контракт и вернуть долг одним платежом через 3,5 года. Найдите величину консолидированного платежа, если применяется сложная процентная ставка 18 % годовых.

5 Кредит предоставлен с начислением на первоначальную сумму 25 % сложных годовых. Какова должна быть эквивалентная ставка простых процентов при сроке кредита: а) 3 года; б) 3 месяца?

6 Банк 1 предлагает следующие условия для размещения капитала: 6 % годовых с ежемесячным начислением сложных процентов. Условия банка 2 – простая процентная ставка 9 % годовых. Определить, какие условия выгоднее для вкладчика, если срок вклада равен 2 года.

7 Банк начисляет сложные проценты на вклады по годовой ставке 25 % годовых. Определите доходность вклада в виде годовой ставки простых процентов, если проценты начисляются ежемесячно.

8 Определите номинальную процентную ставку с ежемесячным начислением сложных процентов, которая эквивалентна силе роста, равной 4 % при начислении непрерывных процентов в течение года.

9 Четыре векселя номинальной стоимостью 2 000, 4 000, 6 000, 8 000 ден. ед. со сроками погашения 120, 80, 90 и 150 дней нужно объединить в один со сроком погашения 140 дней. Консолидация происходит по простой ставке 15 % годовых. Определите стоимость объединенного векселя для процентной и учетной ставок.

10 Фирма просит векселедержателя переписать четыре векселя номинальной стоимостью 800, 320, 450, 600 ден. ед. со сроками погашения соответственно через 2, 2,5, 3,5 и 4 года в один вексель со сроком погашения через 3 года. При этом используется ставка сложных процентов 20 % годовых. Определите стоимость консолидированного векселя.

11 Платеж 1 000 ден. ед. и со сроком уплаты через 3 года заменяется платежом 1 500 ден. ед. с использованием сложной процентной ставки 20 % годовых. Определите срок нового платежа?

12 Три платежа в 400, 500 и 600 ден. ед. со сроками выплат соответственно через 2, 2,5 и 4 года заменяются одним платежом, выплачиваемым через 3 года, при этом используется сложная учетная ставка 20 % годовых. Найдите величину консолидированного платежа.

5 Оценка эффективности финансовых операций

5.1 Доходность финансовых операций

Финансовой называется операция, начало и конец которой характеризуются денежными суммами $P(0)$ и $P(n)$ соответственно, а цель которой – наращение суммы вложенных средств $P(0)$. Под $P(0)$ понимается реально вложенные средства в момент $t = 0$, под $P(n)$ – реально вырученные денежные средства в результате операции, срок которой n единиц времени ($t = n$). Эффект от вложения измеряется в виде процентной ставки (простой или сложной) наращения, которая называется *доходностью*.

Среднегодовой доходностью финансовой операции называется положительное число $\bar{r}$, удовлетворяющее одному из равенств:

$$P(0)\cdot(1+\bar{r}\,n) = P(n) \text{ или } P(0)\cdot(1+\bar{r})^n = P(n),$$

где n измеряется в годах.

Отсюда среднегодовая доходность в виде простой и сложной процентных ставок соответственно равна

$$\bar{r} = \frac{P(n)-P(0)}{nP(0)} \text{ и } \bar{r} = \sqrt[n]{\frac{P(n)}{P(0)}} - 1.$$

Таким образом, финансовой операции ставится в соответствие эквивалентная операция по ставке $\bar{r}$ наращения суммы $P(0)$ в течение времени n. Такой подход позволяет сравнить полученное значение доходности с доходностями по альтернативным вложениям средств.

Доходностью за весь срок $[0, n]$ называется положительное число r, удовлетворяющее равенству $P(0)(1 + r) = P(n)$. Отсюда

$$r = \frac{P(n)-P(0)}{P(0)}.$$

Ставка r показывает эффект от вложения, приходящийся на одну единицу вложенных средств. Налоги и инфляция заметно влияют на эффективность финансовой операции.

5.2 Учет налогов

Налог начисляется, как правило, на проценты, получаемые при размещении денежной суммы в рост. Предположим, на сумму PV в течение времени n начислялись проценты по ставке i. И пусть g – ставка налога на проценты. Тогда величина процентов $I = FV - PV$, а сумма налога $G = g\,I$. Наращенная сумма после выплаты налога составляет $P(n) = FV - G$.

Так как $P(n) < FV$, то учет налогов фактически сокращает ставку наращения. Итак,

$$P(n) = FV - G = FV - g\cdot I = FV - g\cdot(FV - PV) = FV\cdot(1-g) + g\cdot PV.$$

В зависимости от схемы начисления процентов возможны варианты.

1 *Простая процентная ставка*. Наращенная сумма вычисляется по формуле $FV = PV\cdot(1 + n\cdot i)$, и доходность есть

$$P(n) = PV\cdot(1 + i\cdot(1-g)\cdot n);$$

Фактически здесь наращение производится по ставке $i\cdot(1-g) < i$.

2 *Сложная процентная ставка.* Наращенная сумма вычисляется по формуле $FV = PV\cdot(1 + i)^n$. Возможны два варианта расчета налогов:

– определение налога за весь срок сразу, когда налоговая ставка в пределах облагаемого налогом периода остается неизменной:

$$P(n) = PV \cdot [(1-g) \cdot (1+i)^n + g)];$$

– расчет процентов за каждый год в отдельности, когда налоговая ставка из года в год меняется. В этом случае сумма процентов из года в год возрастает, и соответственно изменяется сумма налога. Сумма налога в момент времени t определяется из рекуррентного соотношения

$$G_t = I_t \cdot g_t = (FV_t - FV_{t-1}) \cdot g_t = PV \cdot [(1+i)^t - (1+i)^{t-1}] \cdot g_t.$$

Если налоговая ставка постоянна, то сумма налогов за весь срок, рассчитанная первым способом, равна сумме налогов, рассчитанных за соответствующие годы вторым способом.

Пример 5.1. При выдаче кредита на два года под годовую сложную процентную ставку 8 % кредитор удерживает комиссионные в размере 0,5 % от суммы кредита. Ставка налога на проценты 10 %. Определить среднегодовую доходность операции для кредитора?

Решение. Параметры задачи: $i = 0{,}08$, $n = 2$, $g = 0{,}1$, $c = 0{,}005$. Если PV – сумма кредита, а FV – сумма погашаемого долга, то $FV = PV\,(1+i)^n$. Сумма комиссионных равна $c \cdot PV$. Тогда сумма, фактически выданная в долг, составит $P(0) = PV(1-c)$. После выплаты налога у кредитора останется

$$P(n) = PV \cdot ((1-g)\,(1+i)^n + g).$$

Уравнение доходности имеет вид

$$P(n) = P(0)(1+\bar{r})^n.$$

Разрешая это уравнение относительно $\bar{r}$, получим

$$\bar{r} = \left(\frac{P(n)}{P(0)}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 = \left(\frac{(1+i)^n(1-g)+g}{1-c}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 = 0{,}074\,96 \text{ или } 7{,}5\ \%.$$

Заметим, что без учета налога ($g = 0$) доходность операции равна 0,083 или 8,3 %.

5.3 Учет инфляции в финансовых расчетах

Темп и индекс инфляции. Инфляция характеризуется снижением покупательной способности денег и повышением цен. Пусть S – стоимость «потребительской корзины» в данный момент; S_T – стоимость «потребительской корзины» через некоторое время T. Вследствие инфляции $S_T > S$ и $S_T = S + \Delta S$, где ΔS – некоторая сумма денег, которая добавляется к сумме S для сохранения стоимости.

Темпом (уровнем) инфляции называется величина

$$\tau = \frac{S_T - S}{S} = \frac{\Delta S}{S},$$

которая выражается в долях единицы или в процентах ($\tau \cdot 100$ %).

Индексом инфляции (индекс цен) называется величина

$$J = 1 + \tau.$$

Коэффициент падения покупательной способности денег (*индекс покупательной способности денег*) за время T определяется как величина, обратная индексу инфляции, т. е. $I_{\text{пс}}=1/J$.

Пусть за периоды $n_1, n_2, \ldots, n_k$ темп инфляции составил $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$. Тогда за весь срок $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ индекс инфляции J равен

$$J_n = \prod_{t=1}^{k} (1 + \tau_t),$$

т. е. индекс цен вычисляется так же, как коэффициент наращения за n периодов по переменным ставкам по схеме сложных процентов. Это объясняется тем, что цены в текущем периоде повышаются на $\tau \cdot 100$ % относительно уровня предыдущего периода. Если темп инфляции в каждом периоде постоянный, $\tau_t = \text{const} = \tau$, то значение индекса цен за n периодов вычисляется по формуле

$$J_n = (1 + \tau)^n.$$

Пример 5.2. Ежемесячный темп инфляции равен 2,5 %. Определить ожидаемый темп инфляции за год.

<u>*Решение*</u>. Индекс инфляции за месяц равен

$$J_{\frac{1}{12}} = 1 + \tau = 1 + 0{,}025 = 1{,}025.$$

Индекс инфляции за год, т. е. за 12 месяцев есть

$$J_{\frac{12}{12}} = (1 + \tau)^{12} = 1{,}025^{12} = 1{,}344\ 8.$$

Темп инфляции за год равен $\tau = J_{\frac{12}{12}} - 1 = 1{,}344\ 8 - 1 = 0{,}344\ 8$.

Итак, ожидаемый квартальный уровень инфляции составит 34,48 %. Коэффициент падения покупательной способности денег за год равен

$$I_{\text{пс}} = 1/J = 1/1{,}344\ 8 = 0{,}743\ 5.$$

Таким образом, стоимость одной денежной единицы через год составит 0,743 5.

Определение реальной стоимости денег. Вследствие начисления процентов происходит увеличение денежных сумм, но их стоимость под влиянием инфляции уменьшается. Наращенная сумма с учетом инфляции определяется по формуле $FV_\tau = FV/J$. Ставка доходности i является фактором роста денег, поэтому она находится в числителе формулы, а темп инфляции τ является фактором их обесценивания, поэтому он находится в знаменателе формулы.

Пусть на сумму PV начисляются простые или сложные проценты по ставке i в течение времени n, индекс инфляции за это время равен J_n. Тогда, учитывая обесценение денег, соответственно получим:

$$FV_\tau = \frac{PV(1+ni)}{J_n} \text{ или } FV_\tau = \frac{PV(1+i)^n}{J_n}.$$

Отсюда:

– если индекс инфляции равен множителю наращения ($J_n = 1 + n \cdot i$ или $J_n = (1 + i)^n$), то реального роста денежных сумм не будет, так как наращение будет полностью поглощаться инфляцией;

– если индекс инфляции выше множителя наращения ($J_n > 1 + n \cdot i$ или $J_n > (1 + i)^n$), то происходит «эрозия» капитала, и реальная наращенная сумма будет меньше первоначальной денежной суммы;

– если индекс инфляции ниже множителя наращения ($J_n < 1 + n \cdot i$ или $J_n < (1+i)^n$), то рост реальной денежной суммы присутствует.

Определение реальной процентной ставки. *Реальная процентная ставка* показывает доходность с учетом инфляции, характеризующейся снижением покупательной способности денег.

Реальное наращение первоначального капитала с учетом инфляции будет происходить только в том случае, если $J_n < 1+n \cdot i$ (простая процентная ставка) или $J_n < (1+i)^n$ (сложная процентная ставка). Если $J_n = 1 + n \cdot i$ или $J_n = (1 + i)^n$, то наращение только компенсирует негативное действие инфляции. С учетом этого получим

$$i^* = \frac{J_n - 1}{n} \text{ или } i^* = \sqrt[n]{J_n} - 1.$$

Ставка i^* является минимально допустимой процентной ставкой, при которой не происходит реального уменьшения (эрозии) капитала, несмотря на начисление процентов, и называется *реальной*. Ставка, превышающая i^*, называется *положительной процентной ставкой*, так как только в этом случае будет происходить реальное увеличение капитала. Если же полученная наращенная сумма не компенсирует потерю покупательной способности капитала в результате инфляции, то такая банковская ставка называется *отрицательной.*

Методы учета инфляции. *Брутто-ставка* i_τ – это процентная ставка с поправкой на инфляцию τ, обеспечивающая заданную доходность i. Для обеспечения полной компенсации негативного действия инфляции и получения доходности i (нетто-ставка) определяется размер брутто-ставки i_τ из равенств:

а) простые проценты

$$\frac{PV(1+n \cdot i_\tau)}{J_n} = PV(1+n \cdot i) \Rightarrow i_\tau = \frac{(1+n \cdot i_\tau)J_n - 1}{n};$$

б) сложные проценты

$$\frac{PV(1+i_\tau)^n}{J_n} = PV(1+i)^n \Rightarrow i_\tau = (1+i) \cdot \sqrt[n]{J_n} - 1.$$

В частности, если известен годовой темп инфляции τ, то для сложных процентов получим

$$i_\tau = (1+i)\cdot(1+\tau) - 1 \text{ или } i_\tau = 1 + \tau + i\cdot\tau .$$

В практических расчетах при малом значении $i\cdot\tau$ пользуются приближенной формулой $i_\tau \approx i + \tau$, что допустимо при малом темпе инфляции τ и невысокой процентной ставке i.

Замечание. Аналогично определяются учетные ставки с поправкой на инфляцию.

Пример 5.3. Определить реальные результаты депозитной операции для суммы 5 000 ден. ед, размещенной на 0,5 года под 40 % годовых (простые проценты), если ежемесячный темп инфляции равен 2 %. Какова наименьшая положительная ставка, при которой происходит увеличение капитала? Определить брутто-ставку (простую), обеспечивающую доходность 40 % годовых.

Решение. Параметры задачи: PV = 5 000 ден.ед, n = 0,5 года, i = 40 %, $\tau_{1/12}$= 2 %.

Номинальная наращенная сумма

$$FV = PV\,(1 + n\, i) = 5\,000\cdot(1 + 0{,}5\; 0{,}4) = 6\,000 \text{ ден. ед.}$$

Индекс цен за полгода составит

$$J_\tau = (1 + 0{,}02)^6 = 1{,}126.$$

Реальная наращенная сумма

$$P(1/2) = FV_\tau = FV / J_\tau = 6\,000 / 1{,}126 = 5\,329 \text{ ден. ед.}$$

Реальная доходность финансовой операции:

$$r = \frac{P(1/2) - P(0)}{P(0)} = \frac{5\,329 - 5\,000}{5\,000} = 0{,}065\,6 \text{ или } 6{,}56\ \%.$$

Наименьшая положительная ставка, при которой происходит увеличение капитала, равна

$$i^* = \frac{1{,}126 - 1}{1/2} = 0{,}252\,2 \text{ или } 25{,}22\ \%.$$

Следовательно, при данном росте цен реальное наращение капитала будет происходить только при ставке, превышающей 25,22 %.

Значение брутто-ставки, компенсирующей потери от инфляции, если банк желает обеспечить реальную доходность, определяемую простой учетной ставкой в 40 % годовых, равно

$$i_\tau = \frac{(1 + 1/2\cdot 0{,}4)\cdot 1{,}126 - 1}{1/2} = 0{,}702\,4 \text{ или } 70{,}24\ \%.$$

Таким образом, чтобы обеспечить доходность в размере 40 % годовых, ставка по депозиту с учетом инфляции должна соответствовать 70,24 % годовых.

Пример 5.4. Ожидаемый годовой темп инфляции первых двух лет вклада составляет 3 %, а следующих трех – 4 %. Какую минимальную годовую ставку сложных процентов должен предложить банк клиенту, чтобы реальная годовая доходность вклада была не меньше 8 % ?

<u>*Решение*</u>. Пусть $t = 0$ – момент размещения вклада, 1 год – единица измерения времени, срок вклада $n = 5$ лет, $\tau_1 = 0{,}03$ и $\tau_2 = 0{,}04$ – среднегодовые темпы инфляции на временных отрезках [0,2], [2,5]. Для доходности по вкладу r должно быть выполнено условие: $r \geq 0{,}8$. Пусть i – годовая сложная процентная ставка, под которую размещена сумма PV. Тогда наращенная сумма вклада через n лет $FV = PV\,(1 + i)^n$. С учетом инфляции реальная сумма вклада составит

$$P(n) = \frac{FV}{J_n},$$

где индекс инфляции равен $J_n = (1 + \tau_1)^2(1 + \tau_2)^3$.

Уравнение доходности есть $P(n) = PV\,(1 + r)^n$.

Разрешая это уравнение относительно r и учитывая требуемое условие для доходности, получим:

$$r = \frac{1+i}{(1+\tau_1)^{2/5}(1+\tau_2)^{3/5}} - 1 \geq 0{,}08.$$

Отсюда $i \geq 0{,}1189$ или $i \geq 11{,}89$ %. Значит, минимальная процентная ставка размещения вклада равна 11,89 % против 8 % без учета инфляции.

5.4 Наращение и конверсия валюты

Если имеются свободные денежные средства в рублях или СКВ, то можно нарастить их, разместив на депозит. При возможности свободного обмена рублевых средств на СКВ и наоборот это можно сделать двояким образом: непосредственно разместить денежные средства на депозит или разместить их на депозит, обменяв на другую валюту. Возможно следующие варианты наращения процентов.

1 *Без конверсии*: валютные средства или рублевая масса размещаются в качестве депозита, наращение первоначальной суммы производится по валютной ставке путем прямого применения формул наращения.

2 *С конверсией:* исходные валютные средства конвертируются в рубли, наращение идет по рублевой ставке; в конце операции рублевая сумма конвертируется в исходную валюту или рублевая сумма конвертируется в какую-либо конкретную валюту, которая инвестируется в валютный депозит, проценты начисляются по валютной ставке, и наращенная сумма в конце операции конвертируется в рубли.

Рассмотрим наращение без учета инфляции для варианта

$$\text{СКВ} \rightarrow \text{Руб} \rightarrow \text{Руб} \rightarrow \text{СКВ}.$$

Пусть n – срок депозита; C_0 – курс обмена в начале операции; C_1 – курс обмена в конце операции; i – ставка процентов для рублевой массы; j – ставка простых процентов для конкретного вида СКВ.

При двойном конвертировании (обмен валюты на рубли, наращение процентов на эту сумму и конвертирование в исходную валюту) наращенная сумма в валюте будет равна

$$FV_{\text{скв}} = PV_{\text{скв}} \cdot C_0 \cdot k_{\text{н.руб}} \cdot \frac{1}{C_1},$$

где $k_{\text{н.руб}}$ – коэффициент наращения рублевой массы.

При прямом помещении валюты на депозит получаем

$$FV_{1\text{скв}} = PV_{\text{скв}} \cdot k_{\text{н.скв}},$$

где $k_{\text{н.скв}}$ – коэффициент наращения валюты.

«Барьерное» значение $\overline{C}_1$ обменного курса C_1, при котором оба способа наращения эквивалентны, $FV_{\text{свк}} = FV_{1\text{скв}}$, определяется как

$$\overline{C}_1 = C_0 \frac{k_{\text{н.руб}}}{k_{\text{н.скв}}}.$$

Если ожидаемый курс обмена $C_1 < \overline{C}_1$, то двойное конвертирование валюты выгоднее, чем прямое помещение валюты на депозит. Для $C_1 > \overline{C}_1$, то ситуация будет противоположной.

Замечание. Если курс обмена заранее неизвестен, то его можно спрогнозировать, опираясь на динамику обменного курса в предыдущие периоды.

Пример 5.5. Планируется поместить на 3-месячный депозит 2 000 \$ на рублёвый или валютный вклад. Вначале депозитной операции обменный пункт продавал 1\$ за 1 600 руб., а скупал по 1 500 руб. Годовые простые процентные ставки по 3-месячным депозитам составляли 30 % по рублёвым вкладам и 6 % по валютным. Какая форма помещения денежных средств предпочтительнее, если ожидается, что за 3 месяца курс покупки 1\$ в обменном пункте возрастёт на 13,8 %?

Решение. Обменный курс в начале операции $C_0 = 1\,500$ руб., в конце $C_1 = 1\,600 \cdot 1{,}138 = 1\,820{,}8$ руб. Наращенная сумма депозита при двойной конверсии валюты равна

$$FV = 2\,000 \cdot 1500 \cdot \left(1 + \frac{3}{12} \cdot 0{,}3\right) \cdot \frac{1}{1820{,}8} = 1\,771\ \$.$$

При использовании валютного депозита

$$FV = 2\,000 \cdot \left(1 + \frac{3}{12} \cdot 0{,}06\right) = 2\,030\ \$.$$

Очевидно, выгоднее не применять двойную конверсию валюты.

Замечание. Вариант Руб → СКВ → СКВ → Руб и наращение по сложным процентам рассматриваются аналогично.

5.5 Задачи для самостоятельного решения

1 Ссуда в размере 2 500 000 ден. ед. выдана под простые проценты на 2 года, с условием возвратить в конце срока 3 500 000 ден. ед. Определите доходность в виде простой и сложной процентных ставок.

2 Ссуда 100 000 ден. ед. выдана на 240 дней под 12 % годовых (простые проценты, 360/360). При выдаче ссуды удержаны комиссионные в размере 1 000 ден. ед. Определите полную доходность финансовой операции в виде простой процентной ставки.

3 Цены на товары и услуги в отчетном периоде возросли на 5 %. Как изменилась покупательная способность денег?

4 Два вклада по 100 000 ден. ед. были размещены на 3 года под 12 % годовых. Причем один вклад был размещен под простые проценты, а другой – под сложные. За этот период цены на товары и услуги вследствие инфляции выросли на 15 %. Определите реальные наращенные суммы по каждому из вкладов.

5 Первоначальная сумма вклада составляет 6 000 ден. ед. Вклад размещен на 3 года под 14 % годовых с ежемесячной капитализацией. В течение срока вклада ожидается средний годовой темп инфляции на уровне 7 %. Определите наращенную сумму денег с учетом инфляции.

6 Ежемесячный темп инфляции составляет 2 %. Определите реально наращенную стоимость вклада в 200 000 ден. ед., хранящегося на счете до востребования в банке в течение 7 месяцев по ставке 10 % простых процентов. Определите брутто-ставку, обеспечивающую заданную доходность.

7 Определите целесообразность помещения средств на год под 20 % годовых, если прогнозируемый темп инфляции 15 %.

8 Кредит в 300 000 ден. ед. выдается на 2 года. Прогнозируемый темп инфляции на этот период 8 % в год. Какую сложную процентную ставку должен назначить банк, чтобы обеспечить реальную доходность кредитной операции 10 % годовых. Определите наращенную сумму долга.

9 Определено, что доходность коммерческого банка по вкладам «до востребования» должна быть 5 % годовых. Известно, что годовой темп инфляции составляет 11 % годовых. Определите процентную ставку по данным вкладам.

10 Банк выдал кредит на 3 месяца в размере 6 000 ден. ед. Ожидаемый месячный темп инфляции – 2 %, требуемая реальная доходность операции

– 12 % годовых. Определите ставку процентов по кредиту с учетом инфляции, величину наращенной суммы.

11 Ссуда в размере 1 000 ден. ед. получена предприятием на срок 5 лет. Проценты начисляются по сложной ставке, равной 18 % годовых. Расчетный темп инфляции 11 % в год. Определите реальную доходность инвестора по данной операции, а также его реальный доход.

12 Ожидаемый годовой темп инфляции первых двух лет вклада составляет 3 %, а следующих трех – 4 %. Какую минимальную годовую ставку сложных процентов должен предложить банк клиенту, чтобы реальная годовая доходность вклада была не меньше 8 % ?

13 Ссуда в размере 1 000 ден. ед. выдана банком на срок 5 лет. Реальная желаемая доходность банка по данной операции 7 % годовых. Расчетный темп инфляции 11 % в год. Определите ставку процентов с учетом инфляции при выдаче ссуды, а также доход банка.

14 Ссуда предоставлена на 2 года в сумме 500 000 ден. ед. с условием возврата 700 000 ден. ед. Определите реальную процентную ставку по данной операции, если темп инфляции составляет 1 % в месяц.

15 Коммерческий банк предоставил кредит строительной организации в размере 15 млн руб. на 3 года. Прогнозируется ежегодный рост цен в 1,2 раза. Определите ставку процентов при выдаче кредита и наращенную сумму долга, если реальная доходность данной операции должна составлять 10 % годовых по ставке сложных процентов.

16 Планируется поместить на 3-месячный депозит 2 000 000 руб. на рублёвый либо валютный вклад. В начале депозитной операции обменный пункт продавал 1$ за 8 500 руб., а скупал по 8 610 руб. Годовые процентные ставки по 3-месячным депозитам составляли 40 % по рублёвым вкладам и 6 % по валютным с ежемесячной капитализацией. Какая форма помещения денежных средств предпочтительнее, если ожидается, что за 3 месяца курс покупки/продажи 1 $ в обменном пункте возрастёт на: а) 3 %, б) 15 %?

Список использованных источников

1 Бочаров, П. П. Финансовая математика: учеб. / П. П. Бочаров, Ю. Ф. Касимов. – М.: Гардарики, 2002. – 624 с.

2 Капитоненко, В. В. Финансовая математика и ее приложения: учеб.-практ. пособие / В. В. Капитоненко. – М.: ПРИОР,1998. – 144 с.

3 Кирлица, В. П. Финансовая математика: учеб. пособие / В. П. Кирлица. – Мн. : ТетраСистемс, 2005. – 162 с.

4 Ковалев, В. В. Курс финансовых вычислений: учеб. / В. В. Ковалев, В. А. Уланов. – 2-е изд. – М.: Финансы и статистика, 2005. – 560 с.

5 Лукасевич, И. Я. Анализ финансовых операций. Методы, модели, техника вычислений: учеб. пособие / И. Я. Лукасевич. – М.: Финансы, ЮНИТИ, 1998. – 400 с.

6 Малыхин, В. И. Финансовая математика: учеб. пособие / В. И. Малыхин. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2003. – 247 с.

7 Мелкумов, Я. С. Финансовые вычисления. Теория и практика: учеб.-справочное пособие / Я. С. Мелкумов. – М.:ИНФРА-М, 2002. – 383 с.

8 Четыркин, Е. М. Методы финансовых и коммерческих расчетов / Е. М. Четыркин. – М.: «Дело», 2005. – 400 с.

Приложение А
(обязательное)
Порядковые номера дней в году

Таблица А1 – Порядковые номера дней в году

День	Месяц											
	Январь	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь	Июль	Август	Сентябрь	Октябрь	Ноябрь	Декабрь
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
6	6	37	65	96	126	157	187	217	249	279	310	340
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
13	13	44	72	103	133	164	194	213	256	286	317	347
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
29	29		88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
30	30		89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
31	31		90		151		212	243		304		365

Производственно-практическое издание

Марченко Лариса Николаевна,
Федосенко Людмила Васильевна,
Боярович Юлия Сигизмундовна

ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА
НАРАЩЕНИЕ И ДИСКОНТИРОВАНИЕ

Практическое руководство

для студентов специальности
1-25 01 04 «Финансы и кредит»

Редактор *В. И. Шкредова*
Корректор *В. В. Калугина*

Подписано в печать 13.02.2014. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Ризография. Усл. печ. л. 2,6.
Уч.-изд. л. 2,8. Тираж 25 экз. Заказ 81.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/87 от 18.11.2013.
Специальное разрешение (лицензия) № 02330 / 450 от 18.12.2013.
Ул. Советская, 104, 246019, Гомель.