УДК 539.184.52.01

К РАСЧЕТУ ВЫСВЕЧИВАНИЯ КОНЕЧНОГО ОБЪЕМА ГАЗА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ КОНФИГУРАЦИИ

А. Е. Булышев, Н. Г. Преображенский и *А. Е. Суворов*

Предложен способ расчета эффективного времени высвечивания конечного цилиндрического объема газа с произвольным отношением радиуса к высоте. Способ основан на свойстве автомодельности известной задачи Бибермана—Холстейна, справедливом при не слишком малых значениях оптической толщины слоя. Структура выражений для эффективного времени высвечивания остается холстейновской, но входящие в них постоянные множители заменяются некоторыми поправочными «конфигурационными» функциями. Последние найдены с помощью метода прямого статистического моделирования.

Как известно, процесс девозбуждения двухуровневой газовой среды в простейшем случае описывается с помощью уравнения Бибермана—Холстейна [1, 2]

$$\frac{\partial n(\mathbf{r},\, t)}{\partial t} + \gamma n(\mathbf{r},\, t) - \gamma \int\limits_V G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\, n(\mathbf{r}',\, t)\, d\mathbf{r}' = 0, \tag{1}$$

где

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = (4\pi H\, |r - r'|^2)^{-1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varkappa^2(u) \exp\left[-\varkappa(u)\, |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|\right] du. \tag{2}$$

Здесь $n(\mathbf{r}, t)$ — концентрация возбужденных атомов в окрестности точки $\mathbf{r}$ в момент времени t, $\mathbf{r}, \mathbf{r}' \in V$, γ — вероятность спонтанного испускания, $\varkappa(u)$ — коэффициент поглощения,

$$H = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varkappa(u)\, du,$$

частота u отсчитывается от центра контура линии поглощения и измеряется в единицах полуширины последней. Способы решения уравнения (1) при произвольных начальных условиях рассматривались в [3, 4]. Как следует из этих работ, при $t > t_1 > t_0$ полное число $N(t)$ атомов в объеме V, еще не успевших высветиться, уменьшается по экспоненте

$$N(t) \sim \exp(-\beta t), \tag{3}$$

причем время t_1 практически не чувствительно к форме распределения $n(\mathbf{r}, t_0)$, имевшего место в момент t_0 прекращения внешнего возбуждения.

Применительно к (3), допплеровскому и дисперсионному профилям $\varkappa(u)$, а также двум чисто модельным одномерным конфигурациям (плоскопараллельный слой и бесконечно длинный цилиндр) Холстейном [2] были найдены явные аналитические выражения для показателя скорости распада β. Именно

$$\beta = g\gamma F(\varkappa_0 l), \tag{4}$$

где $\varkappa_0 = \varkappa(0)$, l — толщина слоя либо радиус цилиндра, вид функции F зависит от $\varkappa(u)$, а различие в геометрии задачи определяется только множителем g, который в [2] является постоянным.

С точки зрения многочисленных приложений естественный интерес представляет решение задачи о высвечивании конечного цилиндрического объема газа, для которого мы далее введем характерный размер $L = Rh/(R+h)$ и отношение $\xi = R/h$ (R — радиус, $2h$ — высота цилиндра). Покажем, что в этом случае β можно представить в виде

$$\beta = g(\xi)\,\gamma F(\varkappa_0 L), \tag{5}$$

если только оптическая толщина $\varkappa_0 L$ не слишком мала; при $\xi \to 0$ (бесконечный цилиндр) и $\xi \to \infty$ (плоскопараллельный слой) функция $g(\xi)$ вырождается в соответствующие холстейновские константы.

Введем в рассмотрение малый параметр α в соответствии с неравенством

$$(\varkappa_0 L)^{-1} \ll \alpha \ll 1 \tag{6}$$

и определим частоту $\tilde{u}$ из условия

$$\varkappa^{-1}(\tilde{u}) = \alpha L. \tag{7}$$

Если учесть, что в условиях заметного пленения фотонов вклад в перенос излучения от «центральных» частот $|u| < |\tilde{u}|$ пренебрежимо мал, иными словами,

$$\frac{\varkappa(u)}{4\pi}\,\frac{\exp\left[-\varkappa(u)\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\right]}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} \simeq \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'), \tag{8}$$

то уравнения (1) и (2) легко преобразуются к виду

$$\frac{\partial n(\mathbf{r},t)}{\partial t} - \frac{\gamma}{2\pi H}\int\limits_V \frac{n(\mathbf{r}',t)\,d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}\int\limits_{\tilde{u}}^{\infty} \varkappa^2(u)\exp\left[-\varkappa(u)\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\right]du + \frac{2\gamma}{H}\int\limits_{\tilde{u}}^{\infty}\varkappa(u)\,du = 0. \tag{9}$$

Профиль $\varkappa(u)$ для простоты принят симметричным.

Рассмотрим далее по отдельности допплеровский и дисперсионный профили линии поглощения.

Допплеровский профиль $\varkappa(u) = \varkappa_0 \exp(-u^2)$.

Введем новую частоту $x = u - \tilde{u}$, где, согласно (7),

$$\tilde{u} = (\ln \alpha\varkappa_0 L)^{1/2} \gg 1 \tag{10}$$

и

$$\varkappa(x) \simeq \varkappa_0 \exp(-\tilde{u}^2 - 2\tilde{u}x) = (\alpha L)^{-1}\exp(-2\tilde{u}x). \tag{11}$$

Подставляя (11) в (9) и учитывая, что в соответствии с (6) $\ln\alpha\varkappa_0 L \simeq \ln\varkappa_0 L$, находим

$$\frac{\alpha}{\gamma}\varkappa_0 L\,(\pi\ln\varkappa_0 L)^{1/2}\frac{\partial n(\mathbf{r},t)}{\partial t} + n(\mathbf{r},t) - (4\pi H)^{-1}\int\limits_V \frac{n(\mathbf{r}',t)\,dr'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}\int\limits_0^{\infty}\frac{e^{-2x}}{(\alpha L)^2}\exp\left[-\frac{e^{-x}}{\alpha L}\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\right]dx = 0. \tag{12}$$

Сравнивая (12) и (1), убеждаемся в идентичности формы обоих уравнений, если ввести новые «время высвечивания» $\tilde{\gamma}$ и «коэффициент поглощения» $\tilde{\varkappa}(x)$, согласно формулам,

$$\tilde{\gamma} = \gamma\left(\alpha\varkappa_0 L\sqrt{\pi\ln\varkappa_0 L}\right)^{-1},$$
$$\tilde{\varkappa}(x) = (\alpha L)^{-1}\exp(-x) = \tilde{H}\exp(-x), \quad x > 0. \tag{13}$$

Обратим внимание, что отношение $\tilde{\gamma}/\gamma$ есть не что иное, как вероятность прохождения квантом расстояния αL без единого акта поглощения; эта величина играет существенную роль в теории Холстейна [2].

Таким образом, основной результат проделанных выкладок сводится к тому, что в рамках приближения (8) удается обнаружить важное свойство автомодельности задачи Бибермана—Холстейна и тем самым выделить в явном виде зависимость от оптической толщины слоя $\varkappa_0 L$ через соотношения (13). Не представляет также труда показать, что приближение (8) полностью эквивалентно тем допущениям, которые были сделаны Холстейном [2], преобразовывавшим уравнение (1) к форме, удобной для решения задачи вариационным методом Ритца.

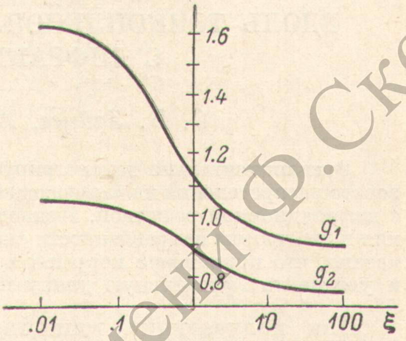
Дисперсионный профиль $\varkappa(u) = \varkappa_0 (1 + u^2)^{-1}$.

В данном случае удобно перейти к переменной $y = u/\tilde{u}$, где с учетом (7)

$$\tilde{u} = (\alpha \varkappa_0 L)^{1/2} \gg 1. \tag{14}$$

Выполняя преобразования, совершенно аналогичные предыдущим, вновь убеждаемся в автомодельности задачи, причем теперь

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\gamma} &= \gamma \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\alpha \varkappa_0 L} \right)^{-1}, \\ \tilde{\varkappa}(y) &= (\alpha L)^{-1} y^{-2}, \quad y > 1. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$



Возвращаясь к формуле (5) и учитывая явный вид холстейновской функции $F(\varkappa_0 L)$ [2] для допплеровского и дисперсионного профилей $\varkappa(u)$, получаем:

допплеровский профиль

$$\beta = \frac{2\gamma}{\pi \sqrt{\varkappa_0 L}} g_2(\xi) = \sqrt{\alpha}\, \tilde{\gamma} g_2(\xi); \tag{16}$$

дисперсионный профиль

$$\beta = \frac{\gamma}{\varkappa_0 L \sqrt{\pi \ln \varkappa_0 L}} g_1(\xi) = \alpha \tilde{\gamma} g_1(\xi). \tag{17}$$

Задача сводится теперь к нахождению поправочных функций $g_1(\xi)$ и $g_2(\xi)$, описывающих влияние конечных размеров цилиндра на процесс высвечивания.

Для расчета этих функций удобно воспользоваться методом прямого статистического моделирования [5]. Время высвечивания, по истечении которого возбужденный атом излучает квант, «разыгрывается» в соответствии с экспоненциальным законом $\exp(-\tilde{\gamma} t)$. Излучение считается изотропным, приведенные частоты x и y задаются распределением $\varkappa/\tilde{H}$, средняя длина пробега кванта $\lambda = \varkappa^{-1}$ случайная длина свободного пробега ρ моделируется экспоненциальной зависимостью $\exp(-\rho/\lambda)$. Если в точке поглощения квант оказывается внутри объема, то процесс повторяется сначала.

На ЭВМ БЭСМ-6 «разыгрывалось» 10^4 возбужденных атомов, распределенных в начальной момент t_0 по объему цилиндра равномерно. Значения $g_1(\xi)$ и $g_2(\xi)$ находились методом наименьших квадратов для $t > t_1$. Сравнение с асимптотическими формулами Холстейна (4) позволило установить, что значение $\alpha = 2.5 \cdot 10^{-2}$ обеспечивает точность расчета порядка 1%. Результаты вычислений приведены на рисунке.

В заключение отметим, что точность формул (16) и (17) понижается с уменьшением $\varkappa_0 L$, однако при $\varkappa_0 L \simeq 4 \div 5$ погрешность еще не превышает $5 \div 8\%$; автомодельность задачи Бибермана—Холстейна позволяет без существенных трудностей применить метод статистического моделирования и к ситуациям, связанным с высвечиванием конечных объемов газа более сложной конфигурации, нежели цилиндрическая.

Литература

[1] Л. М. Биберман. ЖЭТФ, *17*, 416, 1947.
[2] T. Holstein. Phys. Rev., *72*, 1212, 1947; *83*, 1159, 1951.
[3] Ю. Б. Голубовский, Р. И. Лягущенко. Опт. и спектр., *38*, 1086, 1975.
[4] Н. Г. Преображенский, А. Е. Суворов. ПМТФ, № 2, 3, 1977.
[5] С. М. Ермаков, Г. А. Михайлов. Курс статистического моделирования. «Наука», М., 1976.

Поступило в Редакцию 5 августа 1977 г.