МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_3_52_86
EDN: HJSCLA

НИЛЬПОТЕНТНОСТЬ КОММУТАНТА КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ С ПОЛУСУБНОРМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ ШМИДТА

В.Н. Княгина

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

NILPOTENCY OF THE DERIVED SUBGROUP OF A FINITE GROUP WITH SEMISUBNORMAL SCHMIDT SUBGROUPS

V.N. Kniahina

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Ненильпотентная конечная группа, у которой все собственные подгруппы нильпотентны, называется группой Шмидта. Подгруппа A называется *полунормальной* в группе G, если существует подгруппа B такая, что $G = AB$ и AB_1 – собственная в G подгруппа для каждой собственной подгруппы B_1 из B. Если A либо субнормальна в G, либо полунормальна в G, то подгруппа A называется *полусубнормальной* в группе G. Устанавливается нильпотентность коммутанта группы, у которой все подгруппы Шмидта полусубнормальны.

Ключевые слова: *конечная группа*, *подгруппа Шмидта*, *полунормальная подгруппа*, *субнормальная подгруппа*.

Для цитирования: *Княгина*, *В.Н.* Нильпотентность коммутанта конечной группы с полусубнормальными подгруппами Шмидта / В.Н. Княгина // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 3 (52). – С. 86–89. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_3_52_86. – EDN: HJSCLA

Abstract. A non-nilpotent finite group all of whose proper subgroups are nilpotent is called a Schmidt group. A subgroup A is called *seminormal* in a group G if there exists a subgroup B such that $G = AB$ and AB_1 is a proper subgroup of G for each proper subgroup B_1 of B. If A is either subnormal in G or seminormal in G, then the subgroup A is called *semisubnormal* in G. We establish the nilpotency of the derived subgroup of a group all of whose Schmidt subgroups are semisubnormal.

Keywords: *finite group*, *Schmidt subgroup*, *seminormal subgroup*, *subnormal subgroup.*

For citation: *Kniahina*, *V.N.* Nilpotency of the derived subgroup of a finite group with semisubnormal Schmidt subgroups / V.N. Kniahina // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2022. – № 3 (52). – P. 86–89. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_3_52_86 (in Russian). – EDN: HJSCLA

Введение

В данной статье рассматриваются только конечные группы. Группой Шмидта называется ненильпотентная группа, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Эти группы впервые были рассмотрены О.Ю. Шмидтом [1], который установил бипримарность таких групп, нормальность одной из силовских подгрупп и цикличность другой. Информация о строении и свойствах групп Шмидта, а также об их приложениях в теории конечных групп имеются в [2], [3].

Поскольку каждая ненильпотентная группа содержит группы Шмидта в качестве собственных подгрупп, то эти группы – универсальные подгруппы конечных групп. Следовательно, свойства содержащихся в группе подгрупп Шмидта существенно влияют на строение самой группы. Группы с фиксированными ограничениями на содержащиеся в них подгруппы Шмидта исследовались в ряде работ. Например, в [4]–[6] изучались группы с субнормальными подгруппами Шмидта, а в [7] – группы, у которых все холловы подгруппы есть подгруппы Шмидта.

Подгруппа A группы G называется *полунормальной*, если существует подгруппа B из G такая, что $G = AB$ и AB_1 – собственная подгруппа группы G для каждой собственной подгруппы B_1 из B. Например, полунормальной является подгруппа простого индекса. Квазинормальная подгруппа (подгруппа, перестановочная с любыми собственными подгруппами группы) также полунормальна. В простой специальной линейной группе $SL(2,4)$ подгруппа S, изоморфная знакопеременной группе A_4 – полунормальная подгруппа Шмидта, но S не квазинормальна и не субнормальна.

Отдельные свойства полунормальных подгрупп получены в [8]–[10]. Признаки разрешимости группы с некоторыми полунормальными подгруппами Шмидта установлены в [11].

Введем следующее понятие, которое объединяет субнормальность и полунормальность.

Определение. Подгруппа A называется *полусубнормальной* в группе G, если A либо субнормальна в G, либо полунормальна в G.

В работе [4] нами было установлено, что если все подгруппы Шмидта в группе субнормальны, то фактор-группа этой группы по подгруппе Фиттинга абелева. В.А. Ведерников в работе [5] доказал, что в этих условиях фактор-группа по подгруппе Фиттинга циклическая. В настоящей статье мы доказываем, что если в группе G все подгруппы Шмидта полусубнормальны, то фактор-группа по подгруппе Фиттинга абелева.

Приводится пример, доказывающий, что фактор-группа по подгруппе Фиттинга может быть нециклической.

1 Вспомогательные результаты

Используемая терминология соответствует [12]–[13]. Запись $M \lessdot G$ означает, что M – максимальная подгруппа группы G. Напомним, что $A^G = \langle A^g \mid g \in G \rangle$ – подгруппа, порожденная всеми сопряженными с A подгруппами группы G. Группа с нормальной силовской p-подгруппой называется p-замкнутой. Если π – некоторое множество простых чисел, то группа, порядок которой делится только на простые числа из π, называется π-группой. Как обычно, $\Phi(G)$ и $F(G)$ – подгруппы Фраттини и Фиттинга группы G соответственно, а $O_p(X)$ и $O_{p'}(X)$ – наибольшие нормальные p- и p'-подгруппы группы G соответственно. Условимся называть $S_{<p,q>}$-группой группу Шмидта с нормальной силовской p-подгруп-пой и циклической силовской q-под-группой.

Формации всех абелевых и нильпотентных групп обозначаются через $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{N}$ соответственно. Пусть $\mathfrak{F}$ – формация, G – группа. Пересечение всех нормальных подгрупп группы G, фактор-группы по которым принадлежат $\mathfrak{F}$, обозначается через $G^{\mathfrak{F}}$ и называется $\mathfrak{F}$-корадикалом группы G. Если $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ – наследственные формации, то произведение

$$\mathfrak{X}\mathfrak{F} = \{G \in \mathfrak{E} \mid G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{X}\},$$

является наследственной формацией.

Вспомогательные результаты:

***Лемма* 1.1** [12, 2.41; 2.43; 5.31]. *Пусть H – субнормальная подгруппа группы G.*

(1) Если $U \le G$, то $U \cap H$ – субнормальная подгруппа в U. В частности, если $H \le V \le G$, то H – субнормальная подгруппа в V.

(2) Если N – нормальная подгруппа группы G, то HN/N – субнормальная подгруппа в G/N.

(3) Если K – субнормальная подгруппа группы G, то $H \cap K$ и $\langle H \cup K \rangle$ – субнормальные подгруппы в G.

(4) $\pi(H) = \pi(H^G)$.

(5) Если $\mathfrak{X}$ – класс Фиттинга и $H \in \mathfrak{X}$, то $H^G \in \mathfrak{X}$.

***Лемма* 1.2** [4, Лемма 2]. Если K и D – подгруппы группы G, подгруппа D нормальна в K и K/D – $S_{<p,q>}$-подгруппа, то минимальное добавление L к подгруппе D в K обладает следующими свойствами:

(1) L – p-замкнутая $\{p, q\}$-подгруппа;

(2) все собственные нормальные подгруппы в L нильпотентны;

(3) L содержит $S_{<p,q>}$-подгруппу $[P]Q$ такую, что Q не содержится в D и $L = ([P]Q)^L = Q^L$.

***Лемма* 1.3**. [13, 24.2; 24.3] *Если $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация, G – разрешимая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа, то справедливы следующие утверждения*:

(1) $G^{\mathfrak{F}}$ является p-группой для некоторого $p \in \pi(G)$;

(2) $G^{\mathfrak{F}}/\Phi(G^{\mathfrak{F}})$ – главный фактор группы G;

(3) $G^{\mathfrak{F}}\Phi(G) = F(G)$.

***Лемма* 1.4.** *Пусть G – разрешимая группа, у которой коммутант ненильпотентен, а коммутант каждой собственной подгруппы группы G нильпотентен. Тогда $G/F(G)$ – минимальная неабелева группа.*

Доказательство. Класс $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$ является насыщенной наследственной формацией [13, с. 36] и совпадает с классом всех групп, обладающих нильпотентными коммутантами. Пусть G – разрешимая группа, у которой коммутант ненильпотентен, а коммутант каждой собственной подгруппы группы G нильпотентен. Ясно, что G является минимальной не $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$-группой.

Пусть вначале $\Phi(G) = 1$. Согласно лемме 1.3 (3) подгруппа $G^{\mathfrak{N}\mathfrak{A}} = F(G)$. Поскольку $G^{\mathfrak{N}\mathfrak{A}}$ – p-группа для некоторого $p \in \pi(G)$ по лемме 1.3 (1), то $F(G) = O_p(G)$. Так как $G \notin \mathfrak{N}\mathfrak{A}$, то $G/F(G) \notin \mathfrak{A}$. Пусть $U/F(G)$ – собственная фактор-подгруппы $G/F(G)$. Теперь U' нильпотентна и $U/F(U)$ абелева. Так как G разрешимая группа, $O_p(G) = F(G) \le U$, то

$$C_G(F(G)) = Z(F(G)),\ O_{p'}(U) = 1,$$

$$O_p(G) = F(G) \le F(U) = O_p(U).$$

Пусть $H/F(G) = F(G/F(G))$. Так как $G/F(G) \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}$, то G/H абелева, следовательно

$$UH/H \simeq U/U \cap H$$

абелева. Поскольку $F(U) = O_p(U)$, $U \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}$, то $U/O_p(U)$ абелева. Следовательно

$$U/U \cap H \cap O_p(U) = U/H \cap O_p(U)$$

абелева. Поскольку $H/F(G)$ является p'-подгруппой, то $H \cap O_p(U) = O_p(G) = F(G)$ и $U/F(G)$ абелева. Следовательно, все собственные в

$G/F(G)$ подгруппы абелевы и $G/F(G)$ – минимальная неабелева группа.

Пусть $\Phi(G)\neq 1$. Согласно лемме 1.3 (3) подгруппа $F(G)=G^{\mathfrak{NA}}\Phi(G)$. Поскольку $\mathfrak{NA}$ – насыщенная формация, то фактор-группа $G/\Phi(G)\notin\mathfrak{NA}$ и $G/\Phi(G)$ – минимальная не $\mathfrak{NA}$-группа. По условию группа G разрешима, поэтому $F(G/\Phi(G))=F(G)/\Phi(G)$ по [12, 4.21] и

$$G/F(G)\simeq(G/\Phi(G))/(F(G)/\Phi(G))=$$
$$=(G/\Phi(G))/(F(G/\Phi(G)).$$

Так как $\Phi(G/\Phi(G))=1$, то по доказанному $(G/\Phi(G))/F(G/\Phi(G))$ – минимальная неабелева группа, значит, $G/F(G)$ – минимальная неабелева группа. □

***Пример* 1.1.** В простой группе $SL(2,4)$ все собственные подгруппы метабелевы. Поэтому условие разрешимости группы в лемме 1.4 не является лишним.

***Лемма* 1.5.** (1) *Если H – полусубнормальная подгруппа группы G и $H\leq X\leq G$, то H – полусубнормальная подгруппа подгруппы X.*

(2) *Если H – полусубнормальная подгруппа группы G и N – нормальная подгруппа группы G, то HN полусубнормальна в G и HN/N полусубнормальна в G/N.*

(3) *Если H – полусубнормальная подгруппа группы G, а Y – некоторое непустое множество элементов из G, то подгруппа $H^Y=\langle H^y\mid y\in Y\rangle$ полусубнормальна в G. В частности, подгруппа H^g полусубнормальна в G для любого $g\in G$.*

Доказательство. Предположим, что H субнормальна в G. Тогда из леммы 1.1 следует справедливость утверждений (1)–(3). Если H полунормальна, то утверждения (1)–(3) доказаны в [11, леммы 2, 5]. □

***Лемма* 1.6.** *Предположим, что в группе G все $S_{<p,q>}$-подгруппы полусубнормальны. Тогда*:

(1) *в подгруппе H группы G все $S_{<p,q>}$-подгруппы полусубнормальны*;

(2) *если N – нормальная подгруппа группы G, то в фактор-группе G/N все $S_{<p,q>}$-подгруппы полусубнормальны*.

Доказательство. 1. Первое утверждение следует из леммы 1.5 (1).

2. Пусть N – нормальная подгруппа группы G. Предположим что S/N – $S_{<p,q>}$-подгруппа группы G/N и L – минимальная подгруппа из S, обладающая свойством $S=LN$. По лемме 1.2 в L содержится $S_{<p,q>}$-подгруппа A такая, что $L=A^L$. По условию леммы A полусубнормальна в G, а по лемме 1.5 (3) подгруппа L полусубнормальна в G. Теперь по лемме 1.5 (2) подгруппа $LN/N=S/N$ полусубнормальна в фактор-группе G/N. □

***Лемма* 1.7.** *Пусть в группе все $\{2,3\}$-подгруппы Шмидта и все 5-замкнутые $\{2,5\}$-подгруппы Шмидта полусубнормальны. Тогда группа разрешима*.

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по порядку группы G. Если N – нормальная подгруппа группы G, тогда по лемме 1.6 в N и в фактор-группе G/N все $\{2,3\}$-подгруппы Шмидта и все 5-замкнутые $\{2,5\}$-подгруппы Шмидта полусубнормальны. Если N – собственная неединичная подгруппа группы G, то по индукции и подгруппа N, и фактор-группа G/N разрешимы. Следовательно, группа G также разрешима. Поэтому будем считать, что группа G простая. В частности, группа G не содержит субнормальных подгрупп Шмидта. Значит в группе G все $\{2,3\}$-подгруппы Шмидта и все 5-замкнутые $\{2,5\}$-подгруппы Шмидта полунормальны. Следовательно группа G, в соответствии со следствием из статьи [11], разрешима.

По условию леммы полусубнормальными должны быть три типа подгрупп Шмидта: $S_{<2,3>}$-подгруппы, $S_{<3,2>}$-подгруппы и $S_{<5,2>}$-подгруппы. Мы приводим примеры простых групп, которые показывают, что полусубнормальность каждого их этих типов подгрупп в условии леммы 1.7 необходима.

***Пример* 1.2.** В $PSL(2,3^3)$ нет $S_{<5,2>}$-подгрупп и $S_{<3,2>}$-подгрупп [14], поэтому условие полусубнормальности $S_{<2,3>}$-подгрупп не является лишним.

***Пример* 1.3.** В $SL(2,8)$ нет $S_{<5,2>}$-подгрупп и $S_{<2,3>}$-подгрупп [14], поэтому группы с полусубнормальными $S_{<5,2>}$-подгруппами и $S_{<2,3>}$-подгруппами могут быть неразрешимыми, а условие полусубнормальности $S_{<3,2>}$-подгрупп не является лишним.

***Пример* 1.4.** Группа $Sz(8)$ не содержит $\{2,3\}$-подгрупп [14]. Значит группы с полусубнормальными $\{2,3\}$-подгруппами Шмидта могут быть неразрешимыми. И условие полусубнормальности 5-замкнутых $S_{<5,2>}$-подгрупп является значимым.

2 Основной результат

***Теорема* 2.1.** *Если в группе G все подгруппы Шмидта полусубнормальны, то коммутант G' нильпотентен*.

Доказательство. Группа G разрешима по лемме 1.7. Нильпотентность коммутанта G' равносильна тому, что $G\in\mathfrak{NA}$. Воспользуемся индукцией по порядку группы и докажем, что $G\in\mathfrak{NA}$. Согласно лемме 1.6 в каждой собственной подгруппе группы G все подгруппы Шмидта полусубнормальны. По индукции все собственные подгруппы группы G имеют нильпотентный коммутант. Поэтому G – разрешимая минимальная не $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$-группа. По лемме 1.4 фактор-группа $G/F(G)$ будет минимальной неабелевой группой.

По лемме 1.6 в каждой фактор-группе группы G все подгруппы Шмидта полусубнормальны. По индукции $G/N \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}$ для всех неединичных нормальных подгрупп группы G. Поскольку класс $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$ – насыщенная наследственная формация [13, с. 36], то согласно [15, лемма 8] группа G примитивна:

$$G = [N]M,\ M \lessdot G,$$

$$N = F(G) = O_p(G) = C_G(N),\ p \in \pi(G)$$

и $G/F(G) \simeq M$ – неабелева группа, все собственные подгруппы которой абелевы. Если M непримарна, тогда M является группой Шмидта, и по условию теоремы, M либо субнормальна, либо полунормальная подгруппа группы G. Если M субнормальная подгруппа группы G, то M нормальна в G и $M \le C_G(N) = N$, получили противоречие. Если M полунормальная подгруппа группы G, то $|G:M| = |N| = p$ – простое число по [11, лемма 7]. Следовательно G сверхразрешима, а значит, $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}$.

Пусть M – примарная q-группа. Тогда N – силовская p-подгруппа группы G и G – p-замкнутая $\{p, q\}$-группа. Если в группе G все подгруппы Шмидта субнормальны, то фактор-группа $G/F(G)$ абелева по [4], а значит, $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}$, противоречие. Поэтому в G существует несубнормальная подгруппа Шмидта $S = [P]Q$. По условию она полунормальна в G. Если $P = N$, то S субнормальна в G, противоречие. Значит, p – собственная подгруппа группы N. Из определения полунормальности следует, что $G = SB$ и S перестановочна со всеми собственными подгруппами группы B. Поскольку $G = SB$, то $G_q = QB_q$, где G_q и B_q – некоторые силовские q-подгруппы из групп G и B соответственно. Из полунормальности подгруппы S следует, что $SB_q = B_qS$. Так как группа G p-замкнута, то p нормальна в SB_q. Так как подгруппа N абелева и $P \le N$, то p нормальна в N. Теперь p нормальна в G, противоречие с тем, что $1 \ne P \ne N$, и N – минимальная нормальная в G подгруппа. □

***Пример* 2.1.** Пусть D_n – диэдральная группа порядка n и

$$G = D_6 \times D_{10} = ([\langle x\rangle]\langle a\rangle) \times ([\langle y\rangle]\langle b\rangle),$$

$$|x| = 3,\ |y| = 5,\ |a| = |b| = 2.$$

Ясно, что $F(G) = \langle x\rangle \times \langle y\rangle$ и $G/F(G) = \langle a\rangle \times \langle b\rangle$ – нециклическая группа. В группе G все подгруппы Шмидта полунормальны и есть несубнормальные подгруппы Шмидта $[\langle x\rangle]\langle ab\rangle$, $[\langle y\rangle]\langle ab\rangle$. Поэтому в теореме 2.1 фактор-группа $G/F(G)$ может быть нециклической.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шмидт*, О.Ю. Группы, все подгруппы которых специальные / О.Ю. Шмидт // Математический сборник. – 1924. – Т. 31. – С. 366–372.

2. *Кузенный*, *Н.Ф.* Конечные группы Шмидта и их обобщения / Н.Ф. Кузенный, С.С. Левищенко // Украинский математический журнал. – 1991. – Т. 43, № 7–8. – С. 963–968.

3. *Монахов*, *В.С.* Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения / В.С. Монахов // Украинский математический конгресс: сб. тр. – Киев: Ин-т матем. НАН Украины. – 2002. – С. 81–90.

4. *Княгина*, *В.Н.* О конечных группах с некоторыми субнормальными подгруппами Шмидта / В.Н. Княгина, В.С. Монахов // Сибирский математический журнал. – 2004. – Т. 45, № 6. – С. 1316–1322.

5. *Ведерников*, *В.А.* Конечные группы с субнормальными подгруппами Шмидта / В.А. Ведерников // Алгебра и логика. – 2007. – Т. 44, № 6. – С. 669–687.

6. *Al-Sharo, Kh.A.* On finite groups with σ-subnormal Schmidt subgroups / Kh.A. Al-Sharo, A.N. Skiba // Communications in Algebra. – 2017. – Vol. 45. – P. 4158–4165.

7. *Kniahina*, *V.N.* Finite groups with Hall Schmidt subgroups / В.Н. Княгина, В.С. Монахов // Publicationes Mathematicae Debrecen. – 2012. – Vol. 81, № 3–4. – P. 341–350.

8. *Подгорная*, *В.В.* Полунормальные подгруппы и сверхразрешимость конечных групп / В.В. Подгорная // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.–матэм. навук. – 2000, № 4. – С. 22–25.

9. *Монахов*, *В.С.* Конечные группы с полунормальной холловой подгруппой / В.С. Монахов // Математические заметки. – 2006. – Т. 80, № 4. – С. 573–581.

10. *Guo*, *W.* Finite groups with seminormal Sylow subgroups / W.Guo // Acta Mathematica Sinica. – 2008. – Vol. 24, № 10. – P. 1751–1758.

11. *Княгина*, *В.Н.* Конечные группы с полунормальными подгруппами Шмидта / В.Н. Княгина, В.С. Монахов // Алгебра и логика. – 2007. – Т. 46, № 4. – С. 448–458.

12. *Монахов*, *В.С.* Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов – Минск: Вышэйшая школа, 2006. – 207 с.

13. *Шеметков*, *Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков – Москва: Наука, 1978. – 271 с.

14. *Atlas of finite groups: Maximal Subgroups and Ordinary Characters for Simple Groups* / J.H. Conway [et al.] – Oxford: Clarendon Press, 1985. – 286 p.

15. *Монахов*, *В.С.* Об индексах максимальных подгрупп конечных разрешимых групп / В.С. Монахов // Алгебра и логика. – 2004. – Т. 43, № 4. – С. 411–424.

Поступила в редакцию 06.07.2022.

Информация об авторах

Княгина Виктория Николаевна – к.ф.-м.н., доцент