МАТЕМАТИКА

УДК 512.542 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_3_52_72
EDN: GHELYE

О ПЕРЕСЕЧЕНИИ ФУНКТОРНЫХ НЕ $\mathfrak{F}$-ПОДГРУПП В ГРУППАХ С ОПЕРАТОРАМИ

Р.В. Бородич

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

ON THE INTERSECTION OF FUNCTORIAL NON-$\mathfrak{F}$-SUBGROUPS IN GROUPS WITH OPERATORS

R.V. Borodich

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. В работе рассматривается строение подгруппы, связанной с пересечением ядер максимальных *A*-допустимых подгрупп, которые одновременно не принадлежат формации $\mathfrak{F}$ и не содержат $\mathfrak{F}$-корадикал, индексы которых имеют определенные ограничения. Установлены основные свойства соответствующей обобщенной подгруппы Фраттини.

Ключевые слова: *конечная группа*, *формация*, $\mathfrak{F}$*-корадикал.*

Для цитирования: *Бородич*, *Р.В.* О пересечении функторных не $\mathfrak{F}$-подгрупп в группах с операторами / Р.В. Бородич // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 3 (52). – С. 72–75. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_3_52_72. – EDN: GHELYE

Abstract. The paper considers the structure of the subgroup associated with the intersection of kernels maximal *A*-admissible subgroups that do not simultaneously belong to the formation $\mathfrak{F}$ and do not contain $\mathfrak{F}$-residuals whose indices have certain restrictions. The main properties of the corresponding generalized Frattini subgroup are established.

Keywords: *finite group*, *formation*, $\mathfrak{F}$ *-residual.*

For citation: *Borodich*, *R.V.* On the intersection of functorial non-$\mathfrak{F}$-subgroups in groups with operators / R.V. Borodich // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2022. – № 3 (52). – P. 72–75. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_3_52_72 (in Russian). – EDN: GHELYE

Введение

Группы, которые будут рассмотрены в статье, полагаются конечными. Максимальные подгруппы в теории групп, как и любые экстремально расположенные объекты, всегда вызывали немалый интерес в связи с их возможным влиянием на строение самой группы. Рассматривают, как правило, не только сами максимальные подгруппы и взаимодействия между ними, а и пересечения некоторого множества подгрупп, связанных определенными свойствами. История этого направления берет истоки от работы Г. Фраттини [1]. Подгруппа, которая была названа его именем, определила целое направление в исследовании групп, относительно строения подгрупп, равных пересечению некоторого семейства максимальных подгрупп (см. монографии [2], [3], [9]).

Представленная работа является продолжением исследований, начатых в работах [4], [10], и рассматривает пересечения близких к максимальным подгрупп в группах с операторами.

1 Определения и обозначения

Объекты и определения, используемые в работе, являются классическими. Ознакомиться ближе с ними можно в работах, указанных выше.

Пусть $\mathfrak{F}$ – произвольная формация.

Символом $D^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi}(G,A)$ $\left(\bar{D}^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi}(G,A)\right)$ обозначим пересечение ядер всех максимальных *A*-допустимых θ-подгрупп группы *G*, не содержащих $\mathfrak{F}$-корадикал группы *G* (и не принадлежащих формации $\mathfrak{F}$), индексы которых делятся на простые числа из π.

При отсутствии подгрупп с определенными свойствами в указанных пересечениях, будем полагать, что эти пересечения совпадают с группой *G*.

Следует отметить, что не каждая максимальная подгруппа обязана быть одновременно максимальной *A*-допустимой подгруппой. С другой стороны, не всякая максимальная из *A*-допустимых подгрупп группы будет одновременно максимальной подгруппой в обычном смысле [10].

2 Основной результат

***Теорема* 2.1.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация и $G^{\mathfrak{F}}$ – π-разрешимая подгруппа группы G, группа G обладает группой операторов A, такой, что $(|G|,|A|)=1$ и θ – абнормально полный подгрупповой функтор. Если индекс любой максимальной A-допустимой θ-подгруппы группы G, которая не содержит $\mathfrak{F}$-корадикал, есть π-число, то $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}$ является π-подгруппой.*

Доказательство. Положим G – группа наименьшего порядка, для которой, при выполнении всех условий, теорема не верна. Если допустить, что пересечение множеств $\pi \cap \pi(G) = \varnothing$, то, очевидно, что в группе G все максимальные A-допустимые θ-подгруппы обязаны содержать $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}$. По условию теоремы формация $\mathfrak{F}$ – насыщенная, то $G \in \mathfrak{F}$. Откуда следует, что $G^{\mathfrak{F}} = 1$ и он принадлежит к π-группам. Следовательно, $\pi \cap \pi(G) \neq \varnothing$ и $G^{\mathfrak{F}} \neq 1$.

Заметим, что условия теоремы будут верны для факторгрупп. Если предположить, что в группе G найдется нормальная π-подгруппа $L \neq 1$, то по допущенному выше $G^{\mathfrak{F}}L/L$ – π-подгруппа, а это означает, что и $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}$ обязан являться π-группой, что, как не сложно заметить, противоречит предположению.

Далее в рассуждениях будем полагать, что нормальных неединичных π-подгрупп в группе G не существует.

Отметим, что $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}$ π'-подгруппой являться не может. Так как из условий, что $G^{\mathfrak{F}}$ не содержится в $\Phi_\theta(G,A)$ и $G^{\mathfrak{F}}$ – π'-группа будет следовать, что индексы всех максимальных A-допустимых θ-подгрупп из G, не содержащих $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}$, будут π'-числами, но это будет противоречить условию теоремы.

Пусть K – минимальная нормальная в G подгруппа, отличная от самой группы, содержащаяся в $\mathfrak{F}$-корадикале $G^{\mathfrak{F}}$. Так как $G^{\mathfrak{F}}$ – π-разрешимая подгруппа группы G, которая к тому же не π'-группа, то K – собственная π'-подгруппа из $\mathfrak{F}$-корадикала $G^{\mathfrak{F}}$. Так как по предположению для всех групп с порядком меньше, чем порядок $|G|$, заключение теоремы справедливо, то в факторгруппе G/K $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}/K$ – π-группа. Подгруппа K содержится в $\Phi_\theta(G,A)$, так как K – π'-группа. Следовательно, $K \subseteq D^{\mathfrak{F}}(G,A) \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq \Phi_\theta(G,A)$ и, очевидно, $G^{\mathfrak{F}}/G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi_\theta(G,A)$ – π-группа. Откуда вытекает, что порядок $\mathfrak{F}$-корадикала $G^{\mathfrak{F}}$ будет одновременно делится на простые числа из множеств π и π'. Учитывая результат работы [4], получаем, что $G^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}}_{\pi} \times G^{\mathfrak{F}}_{\pi'}$, а это означает, что в группе G будет существовать нормальная π-подгруппа, которая отлична от единицы. Полученные в ходе рассуждений противоречия с предположением доказывают теорему. □

В случае, если группа операторов $A = 1$ тривиальна, то из теоремы 2.1 следуют ряд результатов из работ В.В. Шлыка [5] и М.В. Селькина [3].

***Теорема* 2.2.** *Пусть группа G обладает группой операторов A, такой, что $(|G|,|A|)=1$ и подгрупповой функтор θ является абнормально полным. В группе G будет всегда выполнятся условие*

$$G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi^{\mathfrak{F}}_\theta(G,A) = G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi_\theta(G,A),$$

причем, или

$$\pi(G^{\mathfrak{F}}) = \pi(G^{\mathfrak{F}}/G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi_\theta(G,A)),$$

или все максимальные A-допустимые θ-подгруппы, не содержащие $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}$, не будут принадлежать насыщенному гомоморфу $\mathfrak{F}$.

Доказательство. Если допустить тот факт, что все максимальные A-допустимые θ-подгруппы группы G будут содержать $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}$, то $G^{\mathfrak{F}} \subseteq \Phi_\theta(G,A)$ и $G^{\mathfrak{F}}/G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi_\theta(G,A)$ будет являться единичной подгруппой. В таком случае получим, что

$$\pi(G^{\mathfrak{F}}) = \pi(G^{\mathfrak{F}}/G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi_\theta(G,A)).$$

Предположим, что в группе G может найтись как минимум одна максимальная A-допустимая θ-подгруппа K, которая будет принадлежать гомоморфу $\mathfrak{F}$ и одновременно не содержать $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}$. Покажем, что

$$\pi(G^{\mathfrak{F}}) = \pi(G^{\mathfrak{F}}/G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi_\theta(G,A)).$$

Предположим, что может существовать простое число p, которое делит $|G^{\mathfrak{F}}|$ и одновременно не делит порядок $G^{\mathfrak{F}}/G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi_\theta(G,A)$. Тогда факторгруппу $G^{\mathfrak{F}}/G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi_\theta(G,A)$ можно отнести к p-замкнутой и p'-замкнутой. Принимая во внимание результат работы [4], получим $G^{\mathfrak{F}}F = G^{\mathfrak{F}}_p \times G^{\mathfrak{F}}_{p'}$, к тому же, в виду выбора простого числа p $G^{\mathfrak{F}}_p \subseteq \Phi_\theta(G,A)$. Так как K – максимальная A-допустимая θ-подгруппа, не содержащая $\mathfrak{F}$-корадикал, то

$$G = KG^{\mathfrak{F}} = K(G^{\mathfrak{F}}_p \times G^{\mathfrak{F}}_{p'}) = KG^{\mathfrak{F}}_{p'}.$$

Но $K \in \mathfrak{F}$. Значит, $G/G^{\mathfrak{F}}_{p'} \in \mathfrak{F}$ и $G^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}}_{p'}$, а это противоречит выбору числа p. Остаётся заключить, что не существует такого простого числа p, делящего $|G^{\mathfrak{F}}|$, которое бы не делило $|G^{\mathfrak{F}}/G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi_\theta(G,A)|$. Следовательно,

$$\pi(G^{\mathfrak{F}}) = \pi(G^{\mathfrak{F}} / G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi_{\theta}(G, A)).$$

Покажем, что

$$G^{\mathfrak{F}} \cap D^{\mathfrak{F}}(G, A) = G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi_{\theta}(G, A).$$

Из того факта, что любая максимальная A-допустимая θ-подгруппа L группы G, которая не содержит $D^{\mathfrak{F}}(G, A)$, обязана содержать $\mathfrak{F}$-корадикал, то с учетом результата работы [4] $G^{\mathfrak{F}} \cap D^{\mathfrak{F}}(G, A) \subseteq \Phi_{\theta}(G, A)$. Значит,

$$G^{\mathfrak{F}} \cap D^{\mathfrak{F}}(G, A) \subseteq G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi_{\theta}(G, A).$$

Но $\Phi_{\theta}(G, A) \subseteq D^{\mathfrak{F}}(G, A)$. Поэтому

$$G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi_{\theta}(G, A) \subseteq G^{\mathfrak{F}} \cap D^{\mathfrak{F}}(G, A),$$

а следовательно, и

$$G^{\mathfrak{F}} \cap D^{\mathfrak{F}}(G, A) = G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi_{\theta}(G, A). \qquad \square$$

В случае тривиальности группы операторов A из теоремы 2.2 будет следовать результат работы [3].

***Теорема* 2.3.** *Пусть группа G обладает группой операторов A, такой, что $(|G|, |A|) = 1$, подгрупповой функтор θ является абнормально полным, $\mathfrak{F}$ – S_n-замкнутая локальная формация, содержащая все нильпотентные группы, $\bar{D}^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi}(G, A)$ является π-разрешимой подгруппой, тогда или $D^{\mathfrak{F}}_{\pi}(G, A) \in \mathfrak{F}$ и $\pi(G^{\mathfrak{F}}) = \pi(G^{\mathfrak{F}} / G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi_{\theta}(G, A))$, или в $\bar{D}^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi}(G, A)$ найдется p'-подгруппа V, являющаяся нормальной в G, причем такая, что $\bar{D}^{\mathfrak{F}}_{\pi}(G, A) / V \in \mathfrak{F}$.*

Доказательство. Рассмотрим такую группу G наименьшего порядка для которой, при выполнении всех условий, теорема не верна.

Если допустить, что все максимальные A-допустимые θ-подгруппы группы G не содержат $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}$, то будет выполняться включение $G^{\mathfrak{F}} \subseteq \Phi_{\theta}(G, A)$. Так как по условию $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация, содержащая все нильпотентные группы, то на основании результата работы [4] получаем, что группа G принадлежит $\mathfrak{F}$. Это влечет выполнение равенства $\bar{D}^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi}(G, A) = G$ и в качестве искомой p'-подгруппы V достаточно выбрать единичную подгруппу.

Из сказанного будет следовать, что в группе G обязаны существовать такие максимальные A-допустимые θ-подгруппы, которые не содержат $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}$. Предположим, что любая максимальная A-допустимая θ-подгруппа из G, не содержащая $\mathfrak{F}$-корадикал, будет одновременно принадлежать формации $\mathfrak{F}$. Тогда из равенства $\bar{D}^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi}(G, A) = G$ следует, что G – π-разрешимая группа. На основании теоремы 2.1

$$\pi(G^{\mathfrak{F}}) = \pi(G^{\mathfrak{F}} / G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi_{\theta}(G, A)),$$

где $G^{\mathfrak{F}} / G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi_{\theta}(G, A)$ будет являться главным фактором группы G. Так как группа G – π-разрешима, то $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}$ обязан быть или π'-группой, или p-группа, где $p \in \pi$. Первый случай приводит к

$$G / G^{\mathfrak{F}} = \bar{D}^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi}(G, A) / G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F},$$

что, как видно, противоречит предположению. Второй означает, что всякая максимальная A-допустимая θ-подгруппа, не содержащая $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}$, обязана иметь в группе G своим индексом только числа из π-числа. Значит, $D^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi}(G, A) = D^{\mathfrak{F}}_{\Phi_\theta}(G, A)$. На основании работы [4] получим, что $D^{\mathfrak{F}}(G, A) \in \mathfrak{F}$, а это противоречит предположению.

Из приведённого выше следует, что в группе G могут существовать максимальные A-допустимые θ-подгруппы, одновременно не принадлежащие формации $\mathfrak{F}$ и не содержащие $\mathfrak{F}$-корадикал. Предположим, что все такие подгруппы имеют своими индексами в группе G числа не из множества π. Отсюда следует, что $\bar{D}^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi}(G, A) = G$ является π-разрешимой группой. Из того, что в π-разрешимой группе все максимальные A-допустимые θ-подгруппы будут иметь своим индексом либо π-число, либо π'-число следует, что все максимальные A-допустимые θ-подгруппы группы G, которые одновременно не принадлежат формации $\mathfrak{F}$ и не содержат $\mathfrak{F}$-корадикал, будут иметь своим индексом в группе G π'-число.

Если предположить, что в группе G все максимальные A-допустимые θ-подгруппы, которые одновременно не содержат $\mathfrak{F}$-корадикал и принадлежат формации $\mathfrak{F}$, будут иметь в группе G своим индексом π'-число, то по теореме 2.1 $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}$ будет являться π'-подгруппой. В данном случае теорема оказывается верна.

Если предположить, что в группе G найдется максимальная A-допустимая θ-подгруппа, которая не содержит $\mathfrak{F}$-корадикал, имеет в группе G своим индексом π-число и принадлежит формации $\mathfrak{F}$, то в этом случае подгруппа $D^{\mathfrak{F}}_{\theta_\pi}(G, A)$ принадлежит формации $\mathfrak{F}$, так как формация $\mathfrak{F}$ по условию замкнута относительно нормальных подгрупп. На основании выводов теоремы 2.2, заключаем,

$$\pi(G^{\mathfrak{F}}) = \pi(G^{\mathfrak{F}} / G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi_{\theta}(G, A)),$$

что противоречит допущению.

Значит, можно предположить, что в группе G не может существовать максимальных A-допустимых θ-подгрупп, которые одновременно не содержат $\mathfrak{F}$-корадикал и принадлежат формации $\mathfrak{F}$. Используя теорему 2.1, получим, что

$G^{\mathfrak{F}}$ – π'-подгруппа. Из этого вытекает, что $\bar{D}_{\theta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A)/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$, а это противоречит допущению.

Следовательно, далее будем предполагать, что в группе G может существовать как минимум одна максимальная A-допустимая θ-подгруппа, которая одновременно не содержит $\mathfrak{F}$-корадикал и не принадлежит формации $\mathfrak{F}$, индекс которой в группе G есть π-число. Используя результат работы [4], заключаем, что в подгруппе $\bar{D}_{\theta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A)$ существует такая π'-подгруппа V, нормальная в G, что $\bar{D}_{\theta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A)/V \in \mathfrak{F}$. Что окончательно доказывает теорему. □

Заметим, что

$$VD_{\theta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A)/V \cong D_{\theta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A)/V \cap D_{\theta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) \in \mathfrak{F},$$

и $D_{\theta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) \subseteq \bar{D}_{\theta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A)$, так как формация $\mathfrak{F}$ замкнута относительно нормальных подгрупп и $V \cap D_{\theta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A)$ является π'-подгруппой, то в случае тривиальности группы операторов A из теоремы 2.3 следуют результаты работ [3], [5], [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Frattini*, *G*. Intorno alla generasione dei gruppi di operazioni / G. Frattini // Atti Acad. Dei Lincei. – 1885. – Vol. 1. – P. 281–285.

2. *Шеметков*, *Л.А*. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – Москва: Наука, 1978. – 267 с.

3. *Селькин*, *М.В*. Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп / М.В. Селькин. – Минск: Беларуская навука, 1997. – 144 с.

4. *Бородич*, *Р.В*. О пересечении не $\mathfrak{F}$-подгрупп, выделяемых подгрупповым функтором, в группах с операторами / Р.В. Бородич // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – № 4 (49). – С. 64–68.

5. *Шлык*, *В.В*. О пересечении максимальных подгрупп в конечных группах / В.В. Шлык // Математические заметки. – 1973. – Т. 14, № 3. – С. 429–439.

6. *Шидов*, *Л.И*. О максимальных подгруппах конечных групп / Л.И. Шидов // Сибирский математический журанал. – 1971. – Т. 12, № 3. – С. 682–683.

7. *Ведерников*, *В.А*. Об обобщённой подгруппе Фраттини конечной группы / В.А. Ведерников, Т.Т. Огарков // IV Всесоюз. симпозиум по теории групп. – Новосибирск. – 1973. – С. 22–23.

8. *Ведерников*, *В.А*. Конечные группы с обобщённой подгруппой Фраттини / В.А. Ведерников, Н.Г. Дука // IX Всесоюзный алгебраический коллоквиум. – Гомель. – 1968. – С. 44.

9. *Скиба*, *А.Н*. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск: Беларуская навука, 1997. – 240 с.

10. *Бородич*, *Р.В*. О пересечении максимальных подгрупп конечных групп / Р.В. Бородич // Украинский математический журнал. – 2019. – Т. 71, № 11. – С. 1455–1465.

Поступила в редакцию 27.04.2022.

Информация об авторах

Бородич Руслан Викторович – к.ф.-м.н., доцент