



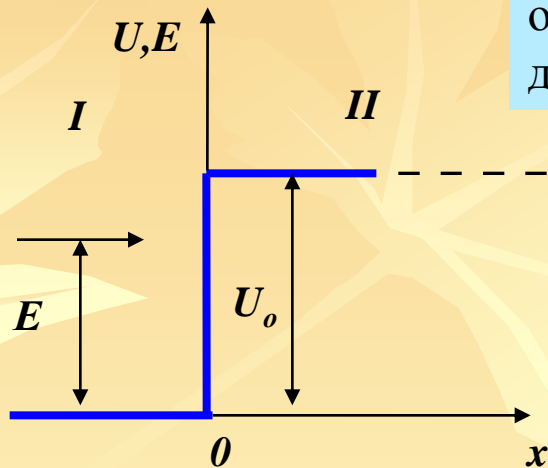
**Добро пожаловать  
в «Физику атома  
и атомных явлений»!**

## Тема 8 Простейшие одномерные задачи квантовой механики: прямоугольный потенциальный барьер

- 1. Частица на бесконечно широком потенциальном барьере. Постановка задачи*
- 2. Решение уравнения Шредингера и его анализ*
- 3. Определение коэффициентов отражения и прозрачности потенциального барьера конечной ширины*
- 4. Прозрачность барьера произвольной формы.*
- 5. Туннельный эффект в реальных физических системах*

# 1. Частица на бесконечно широком потенциальном барьере.

## Постановка задачи



Потенциальный барьер – ограниченная в пространстве область, в которой потенциальная энергия частицы, движущейся в силовом поле, больше, чем вне её.

**Цель:** определить коэффициент отражения **R** и коэффициент прохождения **D**, имеющие смысл вероятности указанных явлений для частицы

$$R + D = 1$$

### Алгоритм решения:

1. Записать и найти общие решения Ст УШ в области I  $\Psi_I$  и области II  $\Psi_{II}$ ;
2. Удовлетворить требованиям конечности, непрерывности  $\Psi$

$$\Psi_I(0) = \Psi_{II}(0)$$

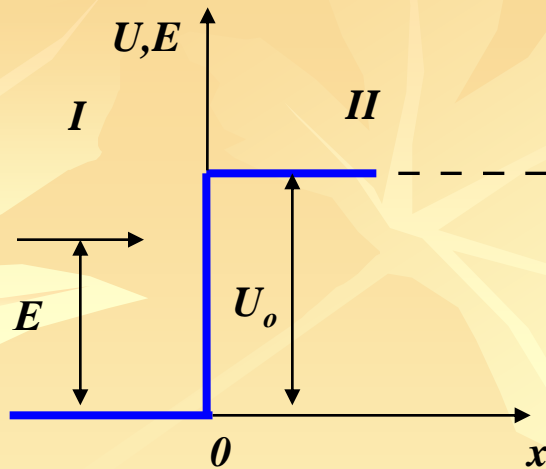
3. Удовлетворить требованию непрерывности первой производной  $\Psi$  по координате

$$\frac{d\Psi_I}{dx} /_{x=0} = \frac{d\Psi_{II}}{dx} /_{x=0}$$

4. Из условий 2 и 3 найти коэффициенты решений  $\Psi_I$  и  $\Psi_{II}$

5. Из условия 4 найти вероятности отражения **R** и прохождения **D** частицы

## 2. Решение уравнения Шредингера и его анализ



**I** 
$$\frac{-\hbar^2}{2m_0} \frac{d^2\Psi_I(x)}{dx^2} = E\Psi_I(x),$$
 
$$\frac{1}{\hbar} \sqrt{2m_0 E} = k_1$$

$$\frac{d^2\Psi_I}{dx^2} + \kappa_1^2\Psi_I = 0$$

$$\Psi_I = a_1 e^{ik_1 x} + b_1 e^{-ik_1 x}$$

**II** 
$$\frac{-\hbar^2}{2m_0} \frac{d^2\Psi_{II}(x)}{dx^2} + U_0\Psi_{II}(x) = E\Psi_{II}(x).$$

$$\frac{1}{\hbar} \sqrt{2m_0(E - U_0)} = k_2$$

$$\frac{d^2\Psi_{II}(x)}{dx^2} + k_2^2\Psi_{II} = 0$$

$$R = \frac{|b_1|^2}{|a_1|^2}$$

$$D = \frac{|a_2|^2}{|a_1|^2} \cdot \frac{k_2}{k_1} = |a_2|^2 \frac{k_2}{k_1}$$

$$|a_1| = 1$$

$$\mathbf{A) } E \geq U_0$$

$$\Psi_{II} = a_2 e^{ik_2 x}$$

$$\Psi_I = a_1 e^{ik_1 x} + b_1 e^{-ik_1 x}$$

условия непрерывности

$\Psi(x)$  и  $\frac{d\Psi(x)}{dx}$

$$\Psi_I(x=0) = \Psi_{II}(x=0)$$

$$\Psi_I'(x=0) = \Psi_{II}'(x=0)$$

$$1 + b_1 = a_2$$

$$k_1 - k_1 b_1 = k_2 a_2$$

$$b_1 = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}, \quad a_2 = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}$$

$$E = U_0 \rightarrow R = 1$$

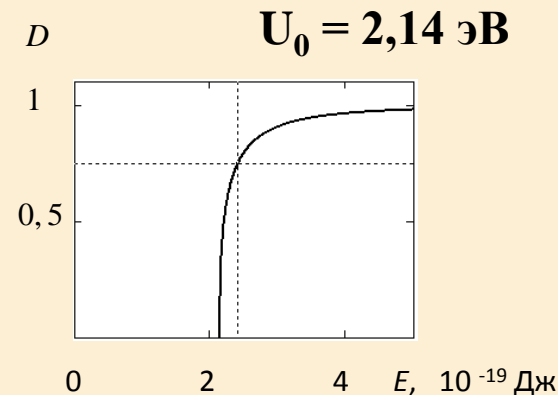
$$R = \frac{|b_1|^2}{|a_1|^2}$$

$$a_1 = 1$$

$$R = |b_1|^2 = \left( \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2$$

$$D = \frac{|a_2|^2 k_2}{|a_1|^2 k_1} = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2}$$

Коэффициент прозрачности барьера-ступеньки зависит от полной энергии микрочастицы



По классической теории  $R=0, D=1$

**Б)  $E < U_0$**

$$\Psi_{II} = a_2 e^{ik_2 x}$$

$$ik = k_2, \quad k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m_0(U_0 - E)}$$

$$\Psi_{II} = a_2' e^{-kx}$$

$$R = |b_1|^2 = \left( \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2$$

$$R = \left| \frac{k_1 - ik}{k_1 + ik} \right|^2 = 1$$

$a_2'$  и  $b_1$  комплексны

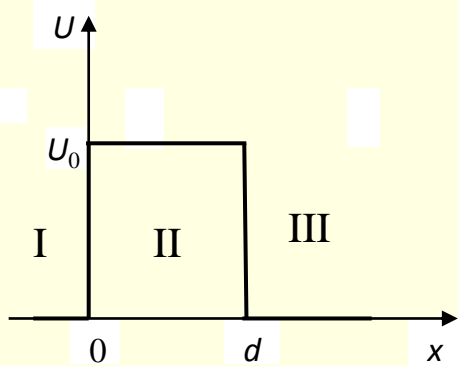
$$D = 1 - R = 0$$

**Но !**

$$|\Psi_{II}|^2 = |a_2'|^2 e^{-2kx} \neq 0$$

Существует некоторая вероятность проникновения частицы внутрь потенциального барьера, что противоречит классической теории

## 2 Одномерный прямоугольный потенциальный барьер конечной ширины



$$\frac{d^2\Psi_{\text{I}}}{dx^2} + \kappa_1^2\Psi_{\text{I}} = 0 \quad \kappa_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \equiv \kappa$$

$$\frac{d^2\Psi_{\text{II}}}{dx^2} - \kappa_2^2\Psi_{\text{II}} = 0 \quad \kappa_2 = \frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar}$$

$$\frac{d^2\Psi_{\text{III}}}{dx^2} + \kappa_3^2\Psi_{\text{III}} = 0 \quad \kappa_3 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \equiv \kappa$$

$$U(-\infty < x \leq 0) = U(a \leq x < \infty) = 0$$

$$0 < x < a \rightarrow U = U_0 > 0$$

$$E < U_0$$

$R - ? \quad D - ?$

$$\Psi_{\text{I}} = A_1 e^{i\kappa x} + B_1 e^{-i\kappa x}$$

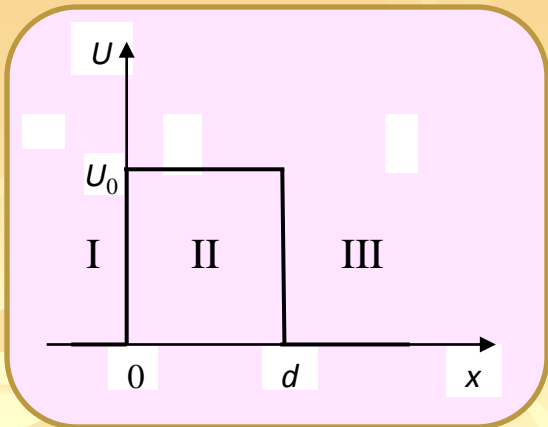
$$\Psi_{\text{II}} = A_2 e^{-\kappa_2 x} + B_2 e^{\kappa_2 x}$$

$$\Psi_{\text{III}} = A_3 e^{i\kappa(x-d)}$$

*В области III  
нет частиц,  
движущихся  
справа налево*

$$R = \frac{|B_1|^2}{|A_1|^2}$$

$$D = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2}$$



$$A_2 = \frac{1-in}{2} e^{\kappa_2 d} A_3$$

$$B_2 = \frac{1+in}{2} e^{-\kappa_2 d} A_3$$

$$n = \frac{\kappa}{\kappa_2} = \left( \frac{E}{U_0 - E} \right)^{1/2}$$

$$|1-in| = |1+in|$$

**Условия непрерывности**

$$A_1 + B_1 = A_2 + B_2$$

$$A_2 e^{-\kappa_2 d} + B_2 e^{\kappa_2 d} = A_3$$

$$i\kappa(A_1 - B_1) = \kappa_2(B_2 - A_2)$$

$$\kappa_2(B_2 e^{\kappa_2 d} - A_2 e^{-\kappa_2 d}) = i\kappa A_3$$

$$|A_2| \gg |B_2|$$

$$B_2 = 0$$

Если  $\kappa_2 d = \frac{d\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar}$  порядка нескольких единиц, то  $e^{\kappa_2 d} \gg 1$ ;  $e^{-\kappa_2 d} \ll 1$

$$A_1 = \frac{(1-in)(i+n)}{2n} e^{\kappa_2 d} A_3$$

$$B_1 = \frac{(1-in)(n-i)}{2n} e^{\kappa_2 d} A_3$$

$$\underline{\kappa_2 d = 3}$$

$$e^{\kappa_2 d} \approx 20$$

$$e^{-\kappa_2 d} \approx 0,05$$

$$A_2 / B_2 \approx 400$$

$$R = \frac{|B_1|^2}{|A_1|^2}$$

$$D = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2}$$



$$D = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2} = \frac{16n^2}{(1+n^2)^2} \exp(-2\kappa_2 d) = \frac{16n^2}{(1+n^2)^2} \exp\left\{-\frac{d\sqrt{8m(U_0 - E)}}{\hbar}\right\}$$

Применимо, если

$$\exp\left\{-\frac{d\sqrt{8m(U_0 - E)}}{\hbar}\right\} \ll 1$$

$\frac{16n^2}{(1+n^2)^2}$  порядка  
единицы в  
широком  
интервале  
значений  $n$

$$D \approx \exp\left\{-\frac{d\sqrt{8m(U_0 - E)}}{\hbar}\right\}$$

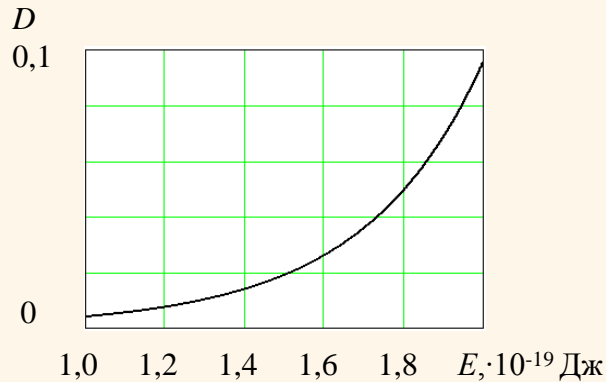
При  $\left\{\frac{d\sqrt{8m(U_0 - E)}}{\hbar}\right\}$   
порядка нескольких единиц  
туннельный эффект  
наблюдаем

Для электрона при  $U_0 - E = 1$  эВ и  $d = 0,3$  нм  
 $\left\{\frac{d\sqrt{8m(U_0 - E)}}{\hbar}\right\} \approx 3$  и  $D \approx 0,05$ ; туннельный  
эффект экспериментально наблюдаем.

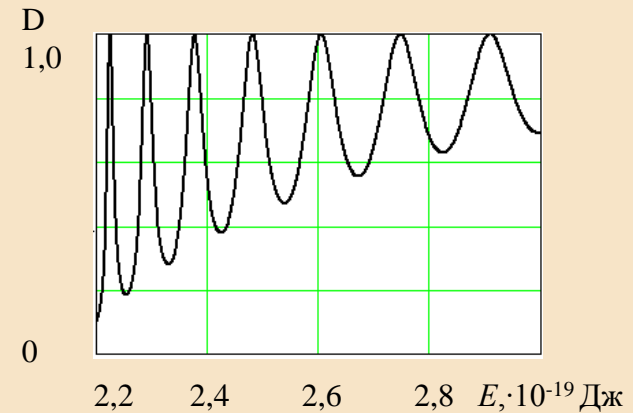
$$U_0 = 2,1 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$$
$$d = 5 \cdot 10^{-9} \text{ м}$$

$$R + D = 1$$

$$U_0 = 2,1 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$$
$$d = 5 \cdot 10^{-9} \text{ м}$$



**Зависимость коэффициента прозрачности прямоугольного потенциального барьера от полной энергии электрона ( $E < U_0$ )**



**Зависимость коэффициента прозрачности прямоугольного потенциального барьера от полной энергии электрона ( $E > U_0$ )**

## Экспериментальная проверка

Результаты теоретического анализа проверяют в экспериментах с потоками частиц.

Плотность потока – величина, определяемая числом частиц, проходящих за единицу времени через поперечное сечение единичной площади.

При этом коэффициент отражения  $R$  определяют как отношение плотности потока частиц, отражённых от барьера, к плотности потока частиц, движущихся к барьеру:

$$R = j_{\text{отр}} / j_0$$

Коэффициент прохождения равен

$$D = j_{\text{пр}} / j_0$$

$j_{\text{пр}}$  – плотность потока частиц, прошедших сквозь барьер

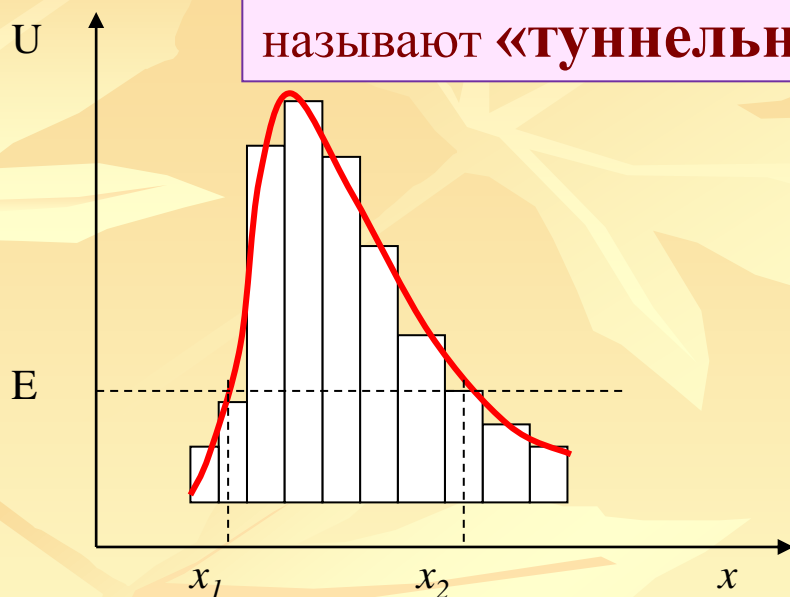
**Экспериментально доказано:**

- ❖ при  $E < U_0$  вероятность прохождения частицей барьера  $D \neq 0$ ;
- ❖ при  $E > U_0$  (надбарьерное прохождение) :  $R > 0$  ,  $D < 1$

При  $E \gg U_0$  результаты квантовой механики согласуются с результатами классической механики (выполняется принцип соответствия)

## 4. Прозрачность барьера произвольной формы. Туннельный эффект

Прохождение частицы через потенциальный барьер при  $E < U_0$  называют «**туннельным**» эффектом



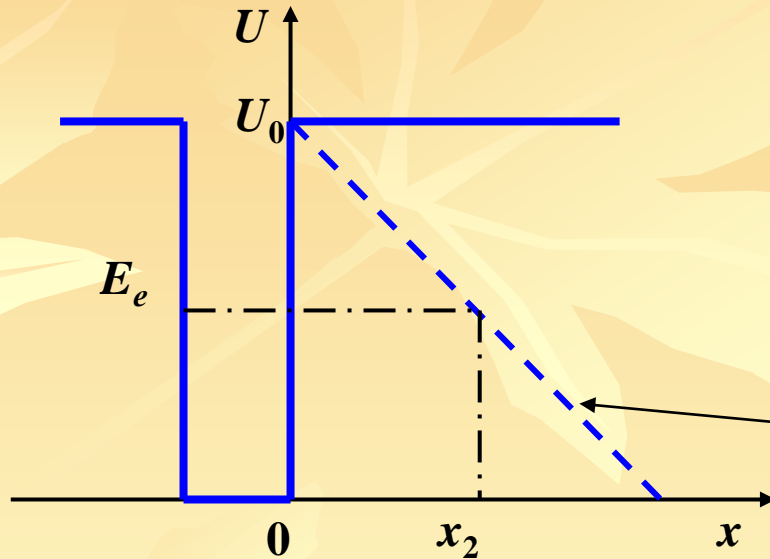
Потенциальный барьер произвольной формы

$$D = D_0 \exp \left\{ -\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m[U(x) - E]} dx \right\}$$

Примеры проявления туннельного эффекта:

- ❖ автоионизация – ионизация атомов и молекул газа в сильных электрических полях;
- ❖ холодная эмиссия электронов из металла;
- ❖ контактные явления на границе двух полупроводников;
- ❖ эффект Джозефсона – протекание сверхпроводящего тока через тонкий слой диэлектрика, разделяющий два сверхпроводника, и возникновение при этом электромагнитных колебаний определенной частоты;
- ❖ альфа-распад ядер;
- ❖ термоядерные реакции и др.

Пример проявления туннельного эффекта:  
холодная эмиссия электронов



Вблизи  
поверхности  $\varepsilon \approx 10^8 \text{ В/м}$

$$D = \exp \left\{ -\frac{2}{\hbar} \int_0^{x_2} \sqrt{2m[U(x) - E_e]} dx \right\}$$

$$U(x) = U_0 - e \varepsilon x$$

$$U(x_2) = E_e$$

К объяснению холодной эмиссии электронов

$$D = \exp \left( -\frac{4\sqrt{2m}}{3e\varepsilon\hbar} (U_0 - E_e)^{3/2} \right) = \exp \left( -\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right),$$

$$\varepsilon_0 = \frac{4\sqrt{2m}}{3e\hbar} (U_0 - E_e)^{3/2} \approx 10^8 \text{ В/м}$$

$$j = j_0 \exp \left( -\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right)$$

Зависимость  
подтверждена  
экспериментально

# Задания

## Тема 8

1. Воспроизведите решение Ст УШ для бесконечно широкого одномерного прямоугольного барьера при  $E \geq U_0$
2. Воспроизведите решение Ст УШ для бесконечно широкого одномерного прямоугольного барьера при  $E < U_0$
3. Выразите формулы для коэффициентов отражения и прохождения частицей прямоугольного бесконечно широкого барьера через величины  $E$  и  $U_0$
4. Во сколько раз изменится вероятность прохождения частицей прямоугольного потенциального барьера при уменьшении его ширины в два раза?
5. Во сколько раз изменится вероятность прохождения частицей прямоугольного потенциального П-образного барьера при увеличении его высоты в полтора раза?
6. Сформулируйте принципиально важный вывод по изученной теме

*Оноре де Бальзак, франц.  
писатель:*

«Если не верить в самого себя,  
нельзя быть гением»

«Ключом ко всякой науке  
является вопросительный  
знак»

*Иоганн Кристоф Фридрих  
Шиллер, нем. поэт, драматург,  
философ-эстетик:*

«Человек вырастает по мере того,  
как растут его цели»

«Глупец тот, кто бросает дело  
на полдороге и смотрит,  
разинув рот, со стороны, что из  
всего этого выйдет»

*Франклин Бенджамин, амер.  
философ, ученый, журналист,  
издатель, политик :*

«Лень, как ржавчина, разъедает  
быстрее, чем труд изнашивает»

**Высоких Вам  
целей,  
хороших  
попутчиков,  
веры в себя,  
трудолюбия  
и успехов!**