УДК 535.42.01

РАСЧЕТ ДИФРАКЦИИ СВЕТА НА АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЕ СЛОЖНОГО СПЕКТРАЛЬНОГО СОСТАВА В АКУСТООПТИЧЕСКОМ ПРОЦЕССОРЕ

А. А. Сташкевич

Методом возмущений решается обобщенное уравнение Рамана—Ната для спектра дифрагированной световой волны в случае акустического возмущения сложного спектрального состава. С помощью ЭВМ рассчитываются нелинейные дифракционные явления применительно к режиму работы акустооптических процессоров.

Теории дифракции света на ультразвуке посвящено много работ. Детально изучен случай дифракции на одной и двух акустических гармонических волнах [1, 2]. Развиты теоретические методы решения задачи в более общей постановке [3, 4]. Однако расчетов дифракционных явлений для случая взаимодействия света с акустической волной, имеющей сложный спектральный состав, до настоящего времени не производилось. Численная оценка этих явлений необходима для понимания работы акустооптических процессоров. Этому вопросу и посвящена данная статья.

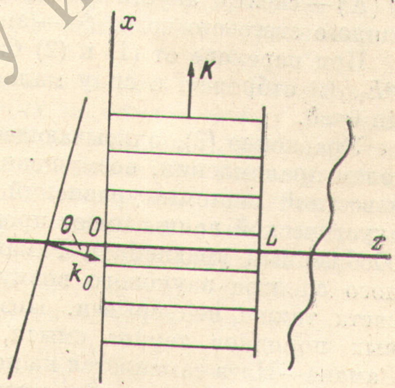

Рис. 1.

Решение задачи построено по методу возмущений. При выборе метода были приняты во внимание следующие соображения. Теория строилась применительно к работе акустооптических процессоров, т. е. устройств, работающих в линейном и слабонелинейном режимах дифракции. В этом случае ряд по степеням возмущения сходится быстро и определяется двумя членами: линейным и первым нелинейным. Приближения высших порядков можно не учитывать, что позволит существенно сократить объем вычислений при численной оценке дифракционных явлений. Кроме того, решение в виде ряда возмущений одинаково справедливо в широком диапазоне изменения параметров взаимодействия: в области дифракции Рамана—Ната, Брэгга и в промежуточной области. С другой стороны, метод возмущений позволяет рассматривать дифракцию света на ультразвуке как процесс многократного рассеяния и наглядно иллюстрируется диаграммами многократных переходов [5, 6].

Предварительно обобщим систему уравнений Рамана—Ната на случай, когда спектр акустического возмущения имеет произвольный вид. Геометрия дифракции света на ультразвуковом столбе толщиной L поясняется рис. 1. Световая волна падает наклонно под углом θ к фронту акустической волны, распространяющейся вдоль оси x.

В скалярное волновое уравнение, описывающее распространение света в пространственно-неоднородной среде

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + k_0^2 [\mu_0^2 + 2\mu_0\mu_1(x)] E = 0, \tag{1}$$

где E — амплитуда напряженности электрического поля световой волны, k_0 — волновое число света в вакууме, μ_0 — значение показателя преломления в невозмущенной среде, $\mu_1(x)$ — изменение величины показателя преломления, пропорциональное акустическому давлению, подставляем в виде

$$E = E_0 \exp(-i\mathbf{k}_0\mathbf{r}),$$

где $E_0(x, z)$ — некоторая функция, медленно изменяющаяся относительно переменной z, $\mathbf{k}_0 = (k_0 \sin\theta,\ k_0 \cos\theta)$ — волновой вектор падающей световой волны, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор.

Полученное таким образом уравнение для E_0

$$\frac{\partial^2 E_0}{\partial x^2} + 2ik_0\mu_0\theta \frac{\partial E_0}{\partial x} + 2ik_0\mu_0 \frac{\partial E_0}{\partial z} + 2k_0^2\mu_0\mu_1(x) E_0 = 0 \tag{2}$$

переведем в частотную область

$$\frac{\partial \Phi(z, K)}{\partial z} + ik_0 [\Phi(z, K) \otimes \tilde{M}(K)] = i\frac{Q(K)}{2L}(1 - 2\alpha(K))\,\Phi(z, K). \tag{3}$$

Граничное условие

$$\Phi(0, K) = \delta(K). \tag{4}$$

В уравнениях (3), (4) использованы следующие обозначения:

$$\tilde{M}(K) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu_1(x) \exp(-iKx)\, dx, \qquad \Phi(z, K) = \int_{-\infty}^{\infty} E_0(x, z) \exp(-iKx)\, dx,$$

$$Q(K) = \frac{K^2 L}{k_0\mu_0}, \qquad \alpha(K) = \frac{k_0\mu_0}{K}\theta,$$

$\tilde{M}(K)$ — спектр акустического возмущения, $\Phi(z, k)$ — спектр дифрагированного светового поля, $\otimes$ — знак операции свертки.

При переходе от (1) к (2) были сделаны обычные допущения: 1) член $\partial^2 E_0/\partial z^2$ отброшен в силу малости, 2) считается, что θ мало, и $\cos\theta \approx 1$; $\sin\theta \approx \theta$.

Уравнение (3), описывающее распространение света в среде с показателем преломления, возмущенном по закону $\mu_1(x)$, является обобщением известной системы уравнений Рамана—Ната на случай, когда спектр акустической волны имеет произвольный вид. Далее будем называть его обобщенным уравнением Рамана—Ната. В случае непрерывного частотного спектра звукового возмущения угловой спектр дифрагированного света также непрерывен. Поэтому понятие спектральных дифракционных порядков теряет смысл, и дискретный индекс n в уравнениях Рамана—Ната заменяется на непрерывную переменную K в уравнении (3).

Решение (3) ищем в виде ряда по степеням $\mu_{1\max}/\mu_0$, предварительно перейдя от (3) к его изображению по Лапласу и используя граничное условие (4)

$$pS(p, K) - \delta(K) + ik_0 [S(p, K) \otimes \tilde{M}(K)] = i\Gamma(K), \tag{5}$$

где $S(p, K) = L[\Phi(z, K)]$ — изображение по Лапласу $\Phi(z, K)$, $\Gamma(K) = \frac{Q(K)}{2L}[1 - 2\alpha(K)]$.

В результате подстановки ряда

$$S(p, K) = \sum_{m=0}^{\infty} S^m(p, K) \tag{6}$$

в уравнение (5) и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях $\mu_{1\max}/\mu_0$ получаем для S^1 и S^3

$$S^1(p, K) = \frac{-ik_0}{p(p - i\Gamma_1)} \tilde{M}(K), \tag{7}$$

$$S^3(p, K) = \frac{ik_0}{p(p - i\Gamma_1)} \iint \frac{\tilde{M}(K_1)\tilde{M}(K_2)\tilde{M}(K - K_1 - K_2)}{(p - i\Gamma_2)(p - i\Gamma_3)}\, dK_1 dK_2, \tag{8}$$

$$\Gamma_1 = \Gamma(K), \quad \Gamma_2 = \Gamma(K - K_1), \quad \Gamma_3 = \Gamma(K - K_1 - K_2).$$

Переход из области p в область z с помощью обратного преобразования Лапласа и теоремы о вычетах не связан с принципиальными затруднениями. В результате первое и третье приближения ряда возмущений окончательно получаются в виде

$$\Phi^1(z,\ K) = \frac{k_0}{\Gamma_1}\,[1 - \exp(i\Gamma_1 z)]\,\tilde{M}(K), \tag{9}$$

$$\Phi^3(z,\ K) = k_0^3 \iint \left[\frac{1}{\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3} - \frac{\exp(i\Gamma_1 z)}{\Gamma_1\Gamma_{12}\Gamma_{13}} + \frac{\exp(i\Gamma_2 z)}{\Gamma_2\Gamma_{12}\Gamma_{23}} - \frac{\exp(i\Gamma_3 z)}{\Gamma_3\Gamma_{13}\Gamma_{23}}\right] \times$$
$$\times\,\tilde{M}(K_1)\,\tilde{M}(K_2)\,\tilde{M}(K - K_1 - K_2)\,dK_1 dK_2, \tag{10}$$
$$\Gamma_{12} = \Gamma_1 - \Gamma_2,\ \ \Gamma_{13} = \Gamma_1 - \Gamma_3,\ \ \Gamma_{23} = \Gamma_2 - \Gamma_3.$$

Условия $K = K_1$; $K_1 = -K_2$ соответствует появлению в (8) полюсов второго порядка, что не учитывается формулой (10). При численных расчетах для этих точек строятся специальные формулы, либо эти точки обходятся.

Дифракция на акустической волне из одной и двух гармонических составляющих

В случае чисто гармонической акустической волны с волновым числом K_0 спектр возмущения имеет вид

$$\tilde{M}(K) = \frac{1}{2}\mu_1\,[\delta(K - K_0) + \delta(K + K_0)]. \tag{11}$$

Подстановка (11) в уравнение (3) и учет граничного условия (4) показывает, что обобщенное уравнение Рамана—Ната имеет смысл лишь для дискретного набора значений аргумента $K_n = nK_0$ и для этих K_n сводится к известной системе разностно-дифференциальных уравнений Рамана—Ната.

Известно, что механизм рассеяния света на акустической волне может рассматриваться как система многократных переходов между разрешенными уровнями [5, 6] (рис. 2, *а*). В первый дифракционный порядок (первый разрешенный уровень) вносят вклад парциальные волны кратности $2m+1$. Для режима дифракции, близкого к линейному, достаточно учесть две парциальные волны: первая определяет линейный режим (однократный переход $\hat{0}\hat{1}$), вторая — нелинейные добавки (трехкратные переходы $\hat{0}\hat{1}\hat{2}\hat{1}$, $\hat{0}\hat{1}\hat{0}\hat{1}$, $\hat{0}-\hat{1}\hat{0}\hat{1}$). Соответствующее выражение для линейного члена в первом дифракционном порядке получается из (9) и имеет вид

$$\Phi_1^1 = -i\,\frac{k_0\mu_1}{2}\,\exp\left[i\,\frac{Q(K_0)\,(1 - 2\alpha(K_0))}{4}\right]\frac{\sin[Q(K_0)\,(1 - 2\alpha(K_0))]}{Q(K_0)\,[1 - 2\alpha(K_0)]}. \tag{12}$$

Формула (12) совпадает с аналогичными выражениями в работах [7, 8] при условии $\alpha \approx 1/2$ и $k_0\mu_1 L < 1$. Выражение для Φ_1^3 было численно проанализировано с помощью ЭВМ.

При наличии двух акустических гармоник с волновыми числами K_{01} и $K_{02} = K_{01} + \Delta K_0$ система дифракционных порядков и переходов усложняется (рис. 2, *б*). Помимо основных уровней вида $K_n = nK_{01}$, $K_m = mK_{02}$ появляются подуровни, обусловленные поочередным рассеянием на обеих гармониках $K_{nm} = nK_{01} + mK_{02}$.

Линейные однократные переходы дают вклад в два основных первых уровня K_{01} и K_{02}. Нелинейные трехкратные переходы переносят энергию на основные уровни K_{01} и K_{02} за счет рассеяния на одной из акустических гармоник: переходы $\hat{0}\hat{1}_1\hat{2}_1\hat{1}_1$, $\hat{0}\hat{1}_1\hat{0}\hat{1}_1$, $\hat{0}-\hat{1}_1\hat{0}\hat{1}_1$ для уровня K_{01} и переходы $\hat{0}\hat{1}_2\hat{2}_2\hat{1}_2$, $\hat{0}\hat{1}_2\hat{0}\hat{1}_2$, $\hat{0}-\hat{1}_2\hat{0}\hat{1}_2$ для уровня K_{02}; на основные уровни K_{01} и K_{02} за счет поочередного рассеяния на обеих гармониках: например, переход $\hat{0}\hat{1}_2\hat{2}_0\hat{1}_1$ для уровня K_{01} и переход $\hat{0}-\hat{1}_1\hat{0}\hat{1}_2$ для уровня K_{02}; на подуровни $K_{01} - \Delta K_0$ и $K_{02} + \Delta K_0$ за счет поочередного рассеяния на обеих гармониках: например, переход $\hat{0}\hat{1}_1\hat{2}_1\hat{1}_3$ для подуровня $K_{01}-\Delta K_0$ и переход $\hat{0}\hat{1}_2\hat{2}_2\hat{1}_4$ для подуровня $K_{02}+\Delta K_0$.

На рис. 3 приведены угловые зависимости Φ_1^3 при различных Q. При расчетах амплитуды гармоник считались одинаковыми. В качестве аргумента взят нормированный угол α. Значения Φ_1^3 отложены в логариф-

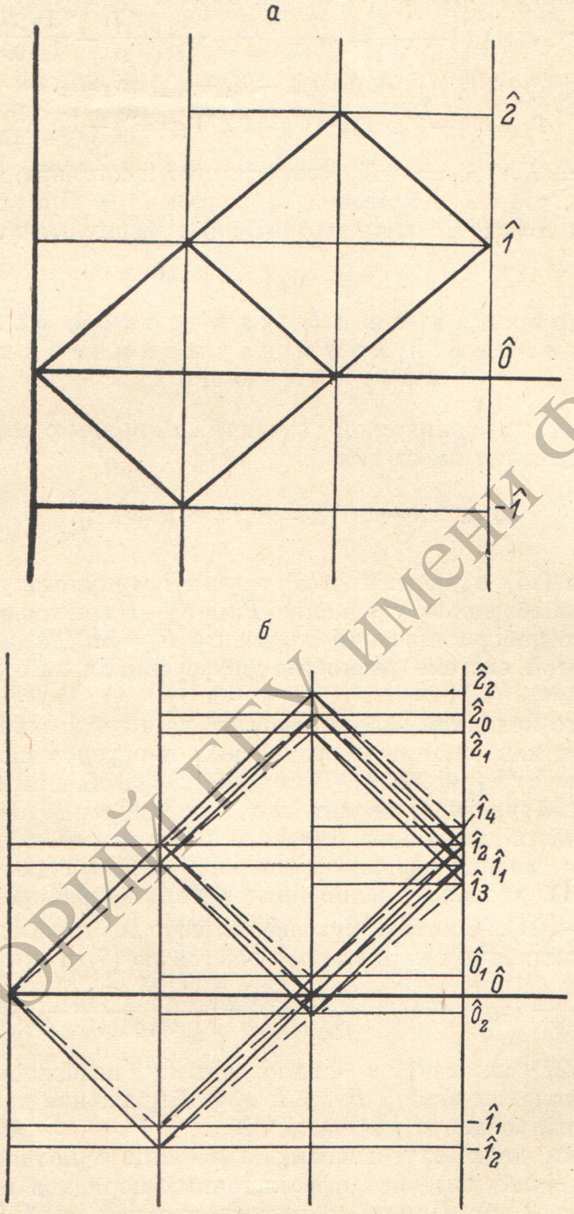

Рис. 2. Диаграммы многократных переходов.

а — дифракция на гармонической акустической волне, *б* — дифракция на акустической волне из двух гармоник.

мическом масштабе. Из приведенных зависимостей видно, что с ростом Q угловая характеристика обостряется, а величина Φ_1^3 уменьшается. На рис. 4, *а* и *б* отдельно в логарифмическом масштабе приведены зависимости величины Φ_1^3 от Q для брэгговского угла падения ($\alpha=1/2$). Видно, что эти зависимости одинаковы для обоих рассматриваемых случаев: $N=1$ и $N=2$. При малых Q ($Q\ll 1$) и больших Q ($Q\gg 1$) величина Φ_1^3 стремится к предельным значениям, которые в случае дифракции на чисто гармонической волне составляют 16.0 и 6.5 дБ соответственно или в амплитудных значениях 0.0630 и 0.0211.

Как известно, условие $Q \ll 1$ определяет низкочастотную дифракцию Рамана—Ната, а $Q \gg 1$ — высокочастотную дифракцию Брэгга. Это по-

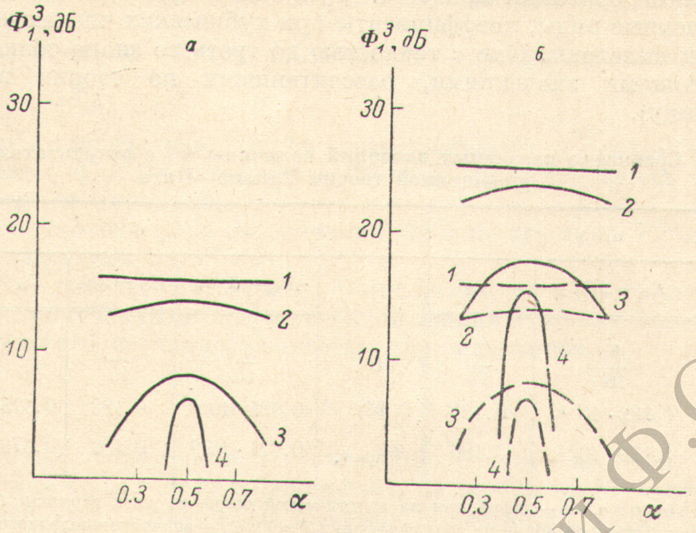

Рис. 3. Угловые зависимости Φ_1^3.

а — для случая одной акустической гармоники ($N=1$), *б* — для случая двух акустических гармоник ($N=2$). *1* — $Q=0.2$, *2* — $Q=0.6$, *3* — $Q=2.7$, *4* — $Q=20$; сплошная линия — уровень K_{01}, штриховая — подуровень $K_{01}-\Delta K_0$.

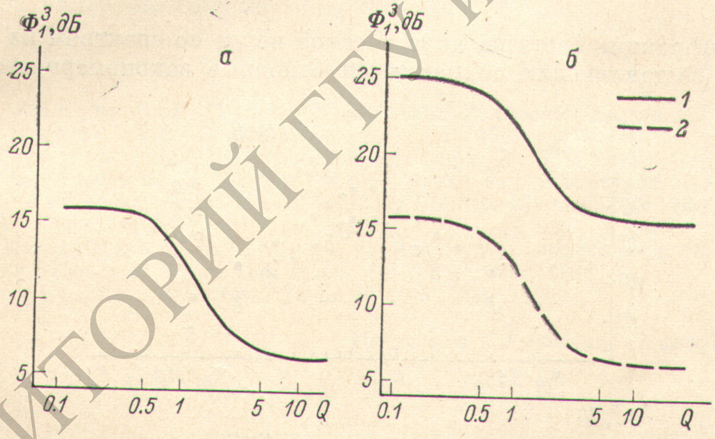

Рис. 4. Зависимость величины Φ_1^3 от параметра Q.

а — для случая одной акустической гармоники ($N=1$), *б* — для случая двух акустических гармоник ($N=2$); *1* — уровень K_{01}, *2* — подуровень $K_{01}-\Delta K_0$.

зволяет сравнить полученные результаты с известными теориями для этих предельных случаев. Амплитуда первого порядка в случае дифракции Рамана—Ната определяется выражением

$$\Phi_{1\text{РН}} = J_1(k_0\mu_1 L) = \frac{k_0\mu_1 L}{2} - \frac{(k_0\mu_1 L)^3}{16} + \ldots, \tag{13}$$

в случае дифракции Брэгга

$$\Phi_{1\text{Бр}} = \sin\left(\frac{k_0\mu L}{2}\right) = \frac{k_0\mu_1 L}{2} - \frac{(k_0\mu_1 L)^3}{48} + \ldots. \tag{14}$$

Как видно, расчетные величины совпадают с численными коэффициентами при кубических членах в (13) и (14): $1/16=0.0625 \approx 0.0630$, $1/48=$

$=0.0208 \approx 0.0211$. Упрощенную теорию Рамана—Ната можно использовать для проверки расчетных значений и в случае дифракции на двух акустических гармонических волнах. Наличие двух акустических гармоник приводит к перемножению двух рядов по функциям Бесселя при математическом описании процесса. Функции Бесселя были представлены через степенные ряды, коэффициенты при кубических членах полученного ряда были выделены. Они с точностью до третьего знака совпадают с соответствующими значениями, рассчитанными по теории возмущений (см. таблицу).

Сравнение расчетных значений величины Φ_1^3 с результатами упрощенной теории Рамана—Ната

	а			*б*			
	$K_{01} - \Delta K_0$	K_{01}		$K_{01} - 2\Delta K_0$	$K_{01} - \Delta K_0$	K_{01}	$K_{01} + \Delta K_0$
C_1^3	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	C_1^3	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{7}{16}$
Φ_{1C}^3	$0.625 \cdot 10^{-1}$	0.188	Φ_{1C}^3	$0.625 \cdot 10^{-1}$	0.188	0.375	0.437
$\Phi_{1\,\text{расч.}}^3$	$0.620 \cdot 10^{-1}$	0.186	$\Phi_{1\,\text{расч.}}^3$	$0.621 \cdot 10^{-1}$	0.186	0.376	0.439

Примечание. *а* — дифракция на акустической волне из двух гармоник ($N=2$); *б* — дифракция на акустической волне из трех гармоник ($N=3$); C_1^3 — значение численного коэффициента, полученное из ряда по функциям Бесселя; Φ_{1C}^3 — десятичное значение, соответствующее величине C_1^3; $\Phi_{1\,\text{расч.}}^3$ — значение Φ_1^3, рассчитанное по методу возмущений.

Дифракция на акустической волне из N гармоник

При дифракции света на акустической волне со спектром из N гармонических составляющих сохраняются основные закономерности, харак-

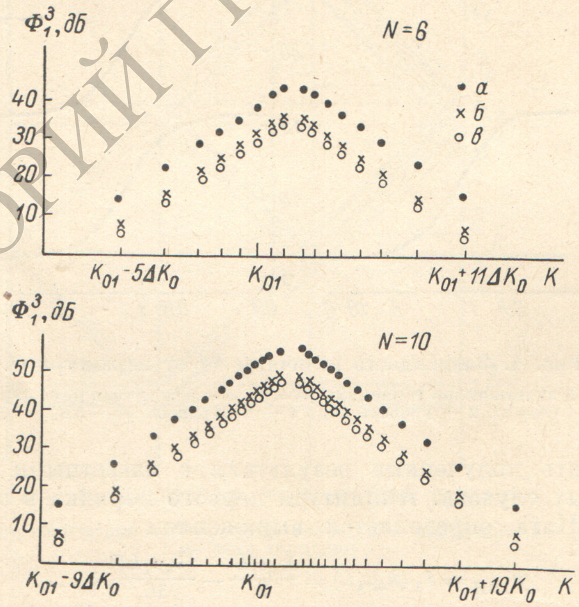

Рис. 5. Распределение Φ_1^3 в дифракционном спектре для $N=6$ и $N=10$.
а — режим Рамана—Ната ($Q=0.1$), *б* — промежуточный режим ($Q=3$), *в* — режим Брэгга ($Q=10$).

терные для предыдущих случаев. В то же время увеличение числа N приводит к росту величины Φ_1^3, для уровней K_{01}, $K_{01}+\Delta K_0$, . . ., $K_{01}+(N-1)\,\Delta K_{01}$ и образованию новых подуровней $K_{01}-(N-1)\,\Delta K_0$, $K_{01}-$

$-(N-2)\,\Delta K_0,\ \ldots,\ K_{01}-\Delta K_0$ и $K_{01}+N\Delta K_0,\ K_{01}+(N+1)\,\Delta K_0,\ \ldots,\ K_{01}+$ $+2\,(N-1)\,\Delta K_0$. На ЭВМ были рассчитаны значения Φ_1^3 при различных Q для N от 3 до 20. Для наглядности амплитуды гармоник считались одинаковыми по величине. На рис. 5 в логарифмическом масштабе приводятся результаты расчетов для $N=6$, 10. Для полученных результатов характерно следующее:

1) дифракционный спектр симметричен относительно значения $K=$ $=K_{01}+\frac{N-1}{2}\Delta K_0$;

2) форма распределения Φ_1^3 по дифракционным порядкам одинакова для различных N и Q; зависимость Φ_1^3 от K, представленная на рис. 5, приближается к линейной;

3) независимо от числа N значения Φ_1^3 для режимов Рамана—Ната и Брэгга отличаются на 9.5 дБ.

Для $N=3$ результаты расчетов были сравнены с соответствующими значениями, полученными из упрощенной теории Рамана—Ната (см. таблицу). Результаты совпали с точностью до третьего знака.

Заключение

Построенная теория позволяет численно оценить величину нелинейных искажений Φ_1^3 за счет дифракции света на акустической волне со сложным спектральным составом. Из расчетов, в частности, следует, что низкий уровень Φ_1^3, характерный для брэгговской дифракции ($Q \gg 1$), сохраняется для режимов дифракции со значением Q вплоть до 3.0, обычно считаемых промежуточными. Расширение угловых характеристик дифракционного процесса за счет уменьшения Q при сохранении низкого уровня нелинейных искажений позволит оптимизировать режим работы некоторых типов акустооптических процессоров.

Литература

[1] W. R. Klein, B. D. Cook. IEEE Trans. Son. and Ultrason., *14*, 123, 1967.
[2] Н. А. Бродович. Опт. и спектр., *33*, 748, 1972.
[3] А. М. Мартынов. Радиотехн. и электрон., *22*, 533, 1977.
[4] В. Н. Парыгин, Л. Е. Чирков. Радиотехн. и электрон., *18*, 703, 1973.
[5] M. V. Berry. The Diffraction of Light by Ultrasound. Academic Press, N. Y.—L., 1966.
[6] А. М. Мартынов, И. С. Мирер. Изв. вузов, радиофизика, *18*, 1845, 1975.
[7] P. Phariseau. Proc. Ind. Acad. Sci., *A44*, 165, 1956.
[8] H. Kogelnik. Bell Syst. Techn. J., *48*, 2909, 1969.

Поступило в Редакцию 13 февраля 1978 г.