камп'ютарных дывайсах), самастойна абраць парадак выканання заданняў і вывучэння асобных матэрыялаў, зрабіць адпаведныя высновы, чым слухаць звычайныя будзённыя тлумачэнні настаўніка. У выніку спрацоўвае прынцып нагляднасці і кіравання самастойнай навучальнай дзейнасцю, што актывізуе ўвагу навучэнцаў да прадмета вывучэння.

Такім чынам, зварот да камп'ютарных тэхналогій дапамагае падтрымаць сувязі "школа–універсітэт": студэнты карыстаюцца інавацыйнымі прыёмамі і прымяняюць набытыя веды на практыцы, вучні набываюць матывацыю для лепшага засваення новых тэм. Самастойнае стварэнне электронных падручнікаў або іх фрагментаў актывізуе пошукава-даследчыя амбіцыі студэнтаў за кошт актывізацыі творчых намаганняў, стымулюе імкненне будучых настаўнікаў да саманавучання і пастаяннай працы па самаўдасканаленні ў плане павышэння прафесійнай кваліфікацыі (у тым ліку і з выкарыстаннем Інтэрнэт-рэсурсаў), спрыяе разнастайнасці працэсу навучання ва ўмовах глабальна зменлівых тэхналогій інфармацыйнага грамадства.

А.Д. Цалапова, М.Д. Цалапова
г. Гомель, ГУО «Гимназия им. Я. Купалы»
С.М. Горский
г. Гомель, УО «ГГУ им. Ф. Скорины»

ОТ ШКОЛЬНОЙ ЗАДАЧИ К ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ ПРОБЛЕМЕ

Школьный курс математики даёт слабое представление о методах исследования математики как науки. У обычного ребёнка складывается впечатление, что в математике всё открыто, и новые открытия (во всяком случае, на школьном уровне) невозможны. Работая над исследовательской задачей, ученик получает некоторое представление о реальной работе математика. Результаты бывают неожиданные: небыстрый, но вдумчивый ученик удачно продвигается в исследовании и от этого становится успешнее на уроках.

При решении исследовательской задачи ученик попадает в новый незнакомый мир. Хорошая задача для исследования – та, в которой есть естественный параметр, по которому можно двигаться в исследовании, то есть легко выделяемая последовательность частных случаев, так что в каждый момент ученик сам понимает, что можно делать дальше. И совсем хороша та задача, где и к идее доказательства можно прийти, последовательно двигаясь по этому параметру.

Хорошая задача для опытных исследователей – та, в которой есть большой простор для продвижений, уточнений, вспомогательных задач, обобщений, а при доказательстве используются разнообразные методы. Отлично, если в этой задаче находятся нетрудные «подзадачи» – ребёнку тяжело долго не получать никакого результата; если задача развивает научный вкус и имеет в перспективе выходы на идеи и методы «большой» математики. Пример такой задачи и результаты её исследования, мы приведем ниже.

Мы считаем, что никакой объективной новизны от работы школьника не требуется. Результат должен быть субъективно новым — школьник открывает то, чего не знал. Конечно, сильный школьник при хорошем руководителе и удачно поставленной задаче иногда может получить объективно новый результат. Но это нисколько не умаляет работу тех, кто не достиг таких успехов. Цель исследовательской работы мы видим не в том, чтобы получить чемпионский результат, а в том, чтобы делать математические открытия на уровне, доступном ученику. Более-менее содержательные субъективные открытия доступны почти всем.

На XIV республиканском турнире юных математиков была предложена задача «Перестановки». Приведем частичное условие её второго пункта:

2.1) Найдите такую перестановку $(a_1,...,a_n)$ натуральных чисел от 1 до *n*, чтобы сумма $|a_1-1|+|a_2-2|+...+|a_n-n|$ была наибольшей.

2.2) Найдите такую перестановку $(a_1,...,a_n)$ натуральных чисел от 1 до *n*, чтобы сумма $(a_1-1)^2+(a_2-2)^2+...+(a_n-n)^2$ была наибольшей.

2.3) Найдите такую перестановку $(a_1,...,a_n)$ натуральных чисел от 1 до *n*, чтобы сумма $\sqrt[3]{a_1-1}+\sqrt[3]{a_2-2}+...+\sqrt[3]{a_n-n}$ была наибольшей.

Пункт 2.2 решается совсем просто: после раскрытия скобок получаем, что исходная сумма равна $\sum_{i=1}^{n}a_i^2+\sum_{i=1}^{n}i^2-2\sum_{i=1}^{n}a_i i=2\sum_{i=1}^{n}i^2-2\sum_{i=1}^{n}a_i i$.

Из перестановочного неравенства следует, что сумма будет наибольшей, если $(a_1,a_2,...,a_n)=(n,n-1,...,1)$.

Пункт 2.1 решается намного сложнее. Данный пункт был взят из книжки «Венгерские математические олимпиады» (задача №171), где и приводятся два способа решения данной задачи.

Пункт 2.3 ни одна из команд, участвующих в турнире, не решила.

Пункты 2.1 и 2.2 объединяет тот факт, что в них фигурируют выпуклые функции: в пункте 2.1 участвует функция $f(x)=|x|$, а в пункте 2.2 – $f(x)=x^2$. Исходя из этого, была предпринята попытка доказать данные пункты единым образом, в результате чего была сформулирована:

Теорема 1. Пусть функция f – выпуклая на промежутке I. Тогда для любых a_1, a_2, b_1, $b_2 \in I$, таких что: $a_1 \le a_2$ и $b_1 \le b_2$, выполняется неравенство: $f(a_1+b_1)+f(a_2+b_2) \le f(a_1+b_2)+f(a_2+b_1)$.

Доказательство: Из условия следует, что $a_1+b_1 \le a_1+b_2 \le a_2+b_2$ и $a_1+b_1 \le a_2+b_1 \le a_2+b_2$. То есть a_1+b_1 – крайняя левая точка, а a_2+b_2 – крайняя правая, то точки a_1+b_2 и a_2+b_1 будут находиться между ними.

Пусть точка A имеет координаты: $(a_1+b_2; f(a_1+b_2))$, точка $B(a_2+b_1; f(a_2+b_1))$, точка $C(a_2+b_2; f(a_2+b_2))$, точка $D(a_1+b_1; f(a_1+b_1))$.

Точки $O'\left(\dfrac{a_1+b_2+a_2+b_1}{2}; \dfrac{f(a_1+b_2)+f(a_2+b_1)}{2}\right)$ и

$O''\left(\dfrac{a_1+b_2+a_2+b_1}{2}; \dfrac{f(a_1+b_1)+f(a_2+b_2)}{2}\right)$ – середины отрезков *AB* и *CD*.

Заметим, что O' и O'' имеют одинаковые абсциссы, следовательно, если точка O' будет лежать выше точки O'', то будет выполняться неравенство: $\dfrac{f(a_1+b_1)+f(a_2+b_2)}{2} \le \dfrac{f(a_1+b_2)+f(a_2+b_1)}{2}$ равносильное требуемому неравенству.

Докажем это: так как функция f – выпуклая на промежутке I, то любая точка графика функции f, лежащая между точками *D* и *C*, будет находиться выше отрезка *DC*, следовательно, отрезок *BA* целиком лежит выше отрезка *DC*, то есть и точка O' будет лежать выше точки O''. Что и требовалось доказать.

Следствие: Пусть a_i и b_i – возрастающие последовательности, тогда: $f(a_1+b_1)+\ldots+f(a_n+b_n) \le f(a_1+b_n)+\ldots+f(a_n+b_1)$.

Примечание: Теорема 1 верна так же если функция f – вогнутая на промежутке I. Тогда: $f(a_1+b_1)+\ldots+f(a_n+b_n) \ge f(a_1+b_n)+\ldots+f(a_n+b_1)$.

Используя теорему 1, пункты 2.1 и 2.2 задачи решаются «в одну строчку». Для решения неравенства из пункта 2.3 невозможно применить теорему 1, поскольку функция не является вогнутой или выпуклой.

Работая над обобщением теоремы 1, были получены следующие теоремы, которые приведем без доказательства (по сути, они доказываются аналогично теореме 1).

Теорема 2. Пусть функция f – выпуклая на промежутке I. Тогда для любых a_1, a_2, b_1, $b_2 \in I$, таких что: $a_1 \le a_2$ и $b_1 \le b_2$, выполняется неравенство: $f(a_1b_1) + f(a_2b_2) \le f(a_1b_2) + f(a_2b_1)$.

Примечание: Теорема 2 верна так же если функция f – вогнутая на промежутке I. Тогда: $f(a_1b_1) + f(a_2b_2) \ge f(a_1b_2) + f(a_2b_1)$.

Теорема 3. Пусть функция f – выпуклая на промежутке I и для любого $x \in I$ $f(x) > 0$. Тогда для любых a_1, a_2, b_1, $b_2 \in I$, таких что: $a_1 \le a_2$ и $b_1 \le b_2$, выполняется неравенство: $f(a_1b_1)f(a_2b_2) \le f(a_1b_2)f(a_2b_1)$.

Теоремы 2 и 3 легко обобщаются на случай *n* переменных.

Зададимся вопросом новизны полученных результатов. В процессе работы над задачей учащиеся ознакомились с определениями выпуклой и вогнутой функции и неравенством Йенсена, поэтому для них все три полученные ими теоремы являются новыми. Теорема 1 является следствием из неравенства Караматы. В “A Dictionary of Inequalities” (P. S. Bullen, 1998) присутствует теорема 1, но теоремы 2 и 3 отсутствуют.

Н.В. Цурикова, А.Г. Цуриков
г. Гомель, УО «ГГУ им. Ф. Скорины»

ПО СТРАНИЦАМ КРАСНОЙ КНИГИ: ИГРА-УРОК ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 7 КЛАССОВ

Красная книга Республики Беларусь – это перечень редких видов растений и животных, стоящих перед угрозой исчезновения. Одним из методов сохранения редких видов растений и животных является пропаганда природоохранной деятельности у подрастающего поколения.

Школьная программа предусматривает изучение видов растений, занесенных в Красную книгу (КК), в курсе ботаники и видов животных – в курсе зоологии. Но, как правило, эта информация учащимися воспринимается как дополнительная и зачастую опускается. К тому же, запомнить двойное название растений (лапчатка белая, крестовник приречный, баранец обыкновенный и т.д.) для учащихся сложнее, чем двойное название животных (европейская рысь, болотная черепаха и т.д.). В связи с этим нам представляется актуальным акцентировать