УДК 539.12.01

А. В. Павленко

РЕШЕНИЕ ПАРЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЛОГУНОВА – ТАВХЕЛИДЗЕ ДЛЯ ДВУХ ЧАСТИЦ РАЗНОЙ МАССЫ С ДВУМЕРНЫМ СЕПАРАБЕЛЬНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

В работе получено решение парциального уравнения Логунова – Тавхелидзе для двух скалярных частиц разной массы в случае двумерного потенциала, имеющего вид «δ–окружности». Построены графики условий квантования энергии и волновых функций двухчастичной системы для различных значений параметров константы связи и координаты, при которой дельта-функция отлична от нуля. Показано, что для потенциала «δ–окружность» существует только одно связанное состояние.

В данной работе рассмотрено решение уравнения Логунова – Тавхелидзе для двух скалярных частиц разной массы m_1 и m_2 в двумерном импульсном представлении

$$(M-\sqrt{m_1^2+p^2}-\sqrt{m_2^2+p^2})\,\psi(\mathbf{p})=\frac{1}{(2\pi)^2}\int V(\mathbf{p},\mathbf{k})\psi(\mathbf{k})d\mathbf{k}^2\,,\qquad p=|\mathbf{p}|,\tag{1}$$

где $\mathbf{p}$ – относительный импульс в системе центра масс, M – энергия двухчастичной системы, $\psi(\mathbf{p})$ – волновая функция, $V(\mathbf{p},\mathbf{k})$ – релятивистский потенциал.

В полярных координатах представим искомую волновую функцию $\psi(\mathbf{p})$ и потенциал $V(\mathbf{p},\mathbf{k})$ в форме [1, с. 1248]

$$\psi(\mathbf{p})=\frac{1}{\sqrt{p}}\sum_{\mu=-\infty}^{\infty}\psi_\mu(p)\exp(i\mu\varphi),\; V(\mathbf{p},\mathbf{k})=\sum_{\mu=-\infty}^{\infty}V_\mu(p,k)\exp(i\mu\gamma),\tag{2}$$

где $\psi_\mu(p)$ – парциальная волновая функция, $V_\mu(p,k)$ – парциальный потенциал, φ – угол в полярной системе координат, γ – угол между векторами $\mathbf{p}$ и $\mathbf{k}$. Подстановка рядов (2) в (1) приводит к интегральному уравнению для парциальной волновой функции

$$(M-\sqrt{m_1^2+p^2}-\sqrt{m_2^2+p^2})\,\psi_\mu(p)=\frac{\sqrt{p}}{2\pi}\int_0^\infty\sqrt{k}\,V_\mu(p,k)\psi_\mu(\mathrm{k})\,dk\,.\tag{3}$$

Парциальный потенциал в импульсном представлении связан с двумерным радиально-симметричным потенциалом в координатном представлении $V(\rho)$ следующим интегральным соотношением [2, с. 379]:

$$V_\mu(p,k)=2\pi\int_0^\infty\rho J_\mu(p\rho)V(\rho)J_\mu(k\rho)\,d\rho\,,\tag{4}$$

где $J_\mu(p\rho)$ – функция Бесселя [3, с. 644]. В данной работе мы рассматриваем потенциал, который в координатном представлении имеет вид

$$V(\rho) = -\lambda\delta(\rho - a), \tag{5}$$

где $\lambda > 0$ – константа связи, $\delta(\rho - a)$ – дельта-функция, отличная от нуля при $\rho = a$. Подставляя (5) в (4), получим парциальный потенциал в импульсном представлении:

$$V_\mu(p,k) = -2\pi a\lambda J_\mu(pa) J_\mu(ka), \tag{6}$$

который является сепарабельным. Далее мы будем обсуждать случай $\mu = 0$. Подстановка (6) в (3) при $\mu = 0$ позволяет преобразовать интегральное уравнение к выражению:

$$\psi_0(p) = C\lambda a\sqrt{p}\,\frac{J_0(pa)}{\sqrt{m_1^2 + p^2} + \sqrt{m_2^2 + p^2} - M}, \tag{7}$$

в котором введено обозначение

$$C = \int_0^\infty \sqrt{k}\,J_0(ka)\psi_0(k)\,dk\,. \tag{8}$$

Умножим (7) на выражение $\sqrt{p}J_0(pa)$ и проинтегрируем его на полубесконечном интервале $p \in [0, \infty)$. В результате получим равенство

$$1 = \lambda a\int_0^\infty p\frac{J_0^2(pa)}{\sqrt{m_1^2 + p^2} + \sqrt{m_2^2 + p^2} - M}dp\,, \tag{9}$$

которое, является условием квантования энергии двухчастичной системы.

На рисунке 1 (а) приведена зависимость волновых функций от переменной p при различных значениях параметров $a,\ \lambda$. Отметим, что с ростом параметра a максимумы и минимумы волновых функций смещаются влево вдоль оси op. Для нормировки волновых функций мы использовали нерелятивистское выражение

$$\int_0^\infty \psi_0^2(p)dp = 1. \tag{10}$$

На рисунке 1 (б) приведены графики зависимости энергий связанных состояний от величины λ для трех различных значений параметра a. В ходе выполнения вычислений мы полагали, что $m_1 = 1$ и $m_2 = 2$.

На рисунке 1 (б) видно, что для двумерного дельта-потенциала существует только одно связанное состояния системы.

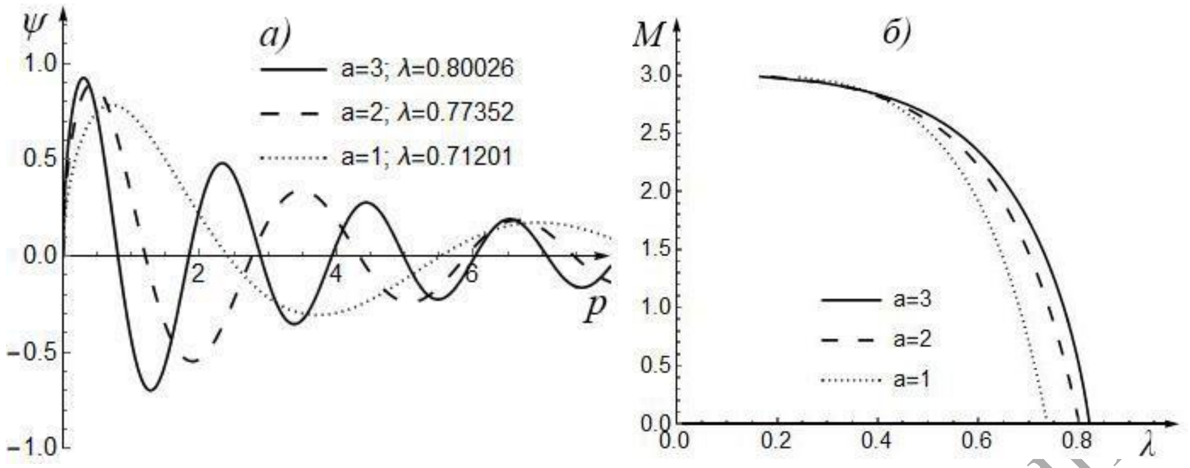

Рисунок 1 – а) – зависимость волновых функций от переменной p , б) – зависимости энергий связанных состояний от величины λ

Литература

1 Ктиторов, С. А., Электронные состояния в однослойном графене с короткодействующими дефектами. Сепарабельный в импульсном представлении потенциал / С. А. Ктиторов, Ю. И. Кузьмин, Н. Е. Фирсова // Физика и техника полупроводников. – 2011. – Т. 45. – Вып. 9. – С. 1246–1251.

2 Ктиторов, С. А., Рассеяние электронов в монослойном графене: модель кольцеобразной ямы / С. А. Ктиторов., Н. Е. Фирсова // Физика твердого тела. – 2011. – Т. 53. – Вып. 2. – С. 384–388.

3 Arfken, G. Mathematical methods for physicists / G. Arfken, H. Weber, F. Harris – 7-th ed. – San Diego : Academic Press, 2012. – 1205 p.