

в пользу безинверсионной модели центра 631 нм [10]. Сохранение формы спектра $\Delta K(\nu)$ при $\mathcal{E} \parallel [110]$ в поляризации $E \parallel \mathcal{E}$ и разных направлениях наблюдения $L \parallel [001]$ и $L \parallel [1\bar{1}0]$, слабая зависимость от температуры и существенно большая сила осциллятора в полосе 631 нм по сравнению с запрещенной по четности полосой $\lambda=500$ нм ($d-d$ -переход) изолированного V^{2+} в этих же образцах (см. рисунок, e [2]), свидетельствуют об электрически дипольной природе исследуемого перехода и, следовательно, подтверждают эти предположения. Безинверсионная модель центра 631 нм согласуется с предположением авторов [1] о подобии этих центров Z -центрам в щелочно-галлоидных кристаллах, не обладающим инверсионной симметрией. Изменение 3-го центрального момента $\Delta\sigma_3$ полосы 631 нм свидетельствует о заметном вкладе в $\Delta K(\nu)$ членов $\sim \nu^3 K(\nu)/\nu^3$ [10] и в данном случае, по-видимому, аналогично [3-5] может быть связано с противоположным по знаку изменением ширины полос отдельных Z -подобных центров NaCl-V^{2+} в результате смешивания S - и P -состояний образующих их F -центров в суммарном внутреннем и внешнем электрических полях.³

Более детальные исследования щелочно-галлоидных кристаллов, допированных ионами переходных металлов, различными методами, по-видимому, позволили бы сделать более конкретные заключения и о модели центра 631 нм в NaCl-V^{2+} .

Литература

- [1] K. Polak, A. Bohun, M. Lebl. Z. Phys., 261, 269, 1973.
- [2] H. Pick. Ann. Physik, 35, 73, 1939.
- [3] F. Rosenberger, F. Lüty. Solid State Comm., 7, 249, 1969.
- [4] V. K. Jain, F. Lüty. Phys. Stat. Sol., 49, 355, 1972.
- [5] F. Lüty. Surface Science, 37, 120, 1973.
- [6] A. W. Overhauser, H. Rüdhardt. Phys. Rev., 112, 722, 1958.
- [7] А. А. Каплянский, В. Н. Медведев, А. П. Скворцов. Опт. и спектр., 29, 905, 1970.
- [8] В. А. Крылов, В. Н. Медведев, К. Ю. Фрийдланд. Опт. и спектр., 42, 1111, 1977.
- [9] В. Н. Медведев. Опт. и спектр., 45, 525, 1978.
- [10] В. Н. Медведев. Опт. и спектр., 42, 129, 1977.
- [11] Y. E. Perlín, B. S. Tsukerblat, T. Singh Dod. Phys. Stat. Sol., 80, 703, 1977.

Поступило в Редакцию 31 марта 1978 г.

УДК 621.317.794.05

КУМУЛЯНТЫ ЭНЕРГИИ ИЗЛУЧЕНИЯ С ДОПЛЕРОВСКИМ СПЕКТРОМ

В. Г. Астафуров и Г. Н. Глазов

Как известно [1], при энергочувствительном приеме оптического излучения флуктуации на выходе «точечного» фотодетектора в полуклассическом приближении определяются статистическими характеристиками энергии

$$W(t) = \int_{t-T/2}^{t+T/2} E(t') E^*(t') dt',$$

где E — скалярная составляющая напряженности поля, соответствующая выбранному состоянию поляризации, T — время отбора. Так, распределение числа фотоотсчетов за время T , согласно формуле Мандела [1], зависит от плотности вероятности $f(W)$ энергии.

В важном частном случае, имеющем место, например, при рассеянии излучения, $E(t)$ — стационарный гауссовский процесс. Без ограничения общности можно считать, что $E(t) = 0$. Поскольку вычисление $f(W)$ требует решения задачи на собственные значения интегрального уравнения Фредгольма, ядром которого является корреляционная функция $B(t_1 - t_2)$ процесса $E(t)$, и практически доступны для расчета только асимптотики $T \ll \tau_k$, $T \gg \tau_k$ [τ_k — радиус корреляции процесса $E(t)$], большое значение имеет вычисление моментов или кумулянт k_n величины W . Так, существует простая

³ В спектрах инверсионных центров в поле может наблюдаться, согласно [11], изменение 3-го центрального момента $\Delta\sigma_3 \sim \mathcal{E}^2$, имеющее ян-теллеровскую природу.

связь между моментами и факториальными моментами числа фотоотсчетов, с одной стороны, и моментами и кумулянтами энергии — с другой [1, 2].

Кумулянт n -го порядка k_n энергии W равен [2]

$$k_n = (n-1)! \int_{-T/2}^{T/2} dt_1 \dots \int_{-T/2}^{T/2} dt_n B(t_1 - t_2) B(t_2 - t_3) \dots B(t_{n-1} - t_n) B(t_n - t_1) \quad (1)$$

и при $n > 2$ практически не может быть представлен в замкнутой форме. В данной работе получена приближенная формула для k_n в предположении доплеровского спектра излучения

$$F(\omega) \sim \exp[-a^2(\omega - \omega_0)^2],$$

т. е. корреляционной функции

$$B(\tau) = I \exp[-s^2\tau^2 + i\omega_0\tau], \quad (2)$$

где I — средняя интенсивность излучения, $s=1/2a$.

Эта модель важна при рассеянии лазерного излучения в линиях резонансного, комбинационного и релеевского спектров разреженных газов при экспериментах с вращающимся шероховатым диском [3] и в других случаях. С другой стороны, в рамках более общей модели фойгтовского спектра случай доплеровского спектра в некотором смысле противоположен случаю лорентцовского спектра, для которого вышеназванная задача на собственные значения решена [2].

Подставляя (2) в (1), имеем

$$k_n = (n-1)! I^n \int_{-T/2}^{T/2} dt_1 \dots \int_{-T/2}^{T/2} dt_n \exp[-s^2 Q(t_1, \dots, t_n)], \quad (3)$$

где $Q(t_1, \dots, t_n)$ — квадратичная форма переменных t_1, \dots, t_n с матрицей

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & \dots & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & -1 & \dots & 2 \end{bmatrix}, \quad n \geq 3,$$

являющейся неотрицательно-определенной и циркулянтной. Из известной теоремы [4] следует, что одно из собственных чисел $\{\lambda_k\}$ матрицы A равно нулю.

Изменим правую часть в (3), выполнив ортогональное преобразование, диагоналирующее A , но оставив пределы интегрирования без изменения. Тогда новая величина

$$k'_n = (n-1)! I^n \int_{-T/2}^{T/2} dy_1 \dots \int_{-T/2}^{T/2} dy_n \exp\left[-s^2 \sum_{k=1}^n \lambda_k y_k^2\right] \quad (4)$$

отличается от k_n . С геометрической точки зрения сделано изменение области интегрирования путем такого поворота n -мерного куба, чтобы его ребра стали параллельны собственным векторам A .

Используя циркулянтность A , найдем [5]

$$\lambda_k = 2[1 - \cos(2\pi k/n)], \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (5)$$

Интегрирование (4) и учет особенностей вырождения, вытекающих из (5), дают

$$k'_n = (n-1)! \pi^{\frac{n-1}{2}} p^{-(n-1)} \bar{W}^n \begin{cases} \prod_{k=1}^n \lambda_k^{-1} \Phi^2(p\sqrt{\lambda_k}/2), & n = 3, 5, \dots \\ \frac{1}{2} \Phi(p) \prod_{k=1}^{n/2-1} \lambda_k^{-1} \Phi^2(p\sqrt{\lambda_k}/2), & n = 4, 6, \dots \end{cases} \quad (6)$$

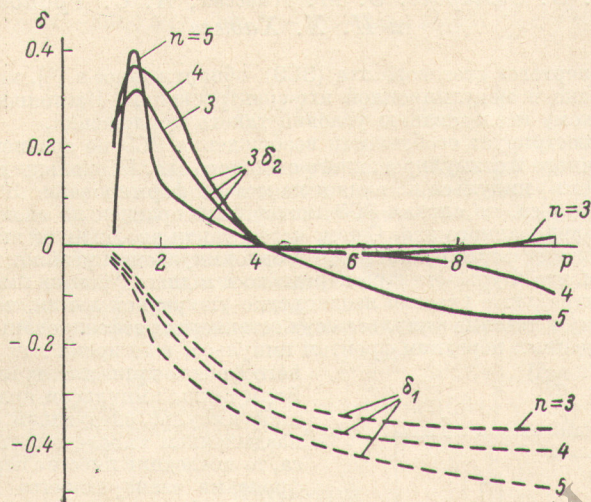
где $\bar{W} = IT$, $p = sT$, $\Phi(x)$ — интеграл вероятности [6].

Рассмотрим относительную ошибку $\delta_1 = (k'_n - k_n)/k_n$. Из геометрических соображений ясно, что $\delta_1 \rightarrow 0$ при $p \rightarrow 0$. С другой стороны, эквиповерхности $Q = \text{const}$ в пространстве $\{t_1, \dots, t_n\}$ есть n -мерные эллипсоиды, которые при $s \rightarrow \infty$ сгущаются около одной из диагоналей n -мерного куба. Поэтому при $p \rightarrow \infty$ отношение k'_n/k_n стремится

к отношению длин ребра и диагонали n -мерного куба, т. е. к $1/\sqrt{n}$, соответственно $\delta_1 \rightarrow 1/\sqrt{n} - 1$. Это подтверждается рисунком, на котором дана δ_1 в зависимости от p для $n=3, 4, 5$, а используемые при этом значения k_n рассчитывались по (3) методом Монте—Карло с относительной среднеквадратичной погрешностью не более 3%.

Естественно попытаться улучшить формулу (6) в области $p > 1$, записав

$$k_n'' = \chi(p, n) k_n' \quad (7)$$



с помощью корректирующего множителя χ , удовлетворяющего условию $\chi(p, n) \rightarrow \sqrt{n}$ при $p \rightarrow \infty$. Использование результатов расчетов методом Монте—Карло позволило найти аппроксимацию

$$\chi(p, n) = 1 + (\sqrt{n} - 1) \Phi(\sqrt{a_n(p-1)}), \quad p \geq 1.$$

Выбор коэффициентов a_n дает степень свободы для закрепления $k_n''(p_*) = k_n'(p_*)$ при некотором p_* . Если принять $p_* = 4$, то $a_3 = 0.108$, $a_4 = 0.078$, $a_5 = 0.063$, а соответствующая погрешность $\delta_2 = (k_n'' - k_n')/k_n'$ дана на рисунке. Рекомендуется при $p < 1.5$ вести расчет по (6), а при $p > 1.5$ — по (7).

Таким образом, получены приближенные формулы (6), (7) для кумулянтов энергии гауссова процесса с доплеровским спектром. Расчет кумулянтов по этим формулам значительно менее трудоемок, чем численное интегрирование по (3), например методом Монте—Карло, особенно при больших n . Кроме того, формулы (6), (7) могут использоваться непосредственно в теории фотоотчетов, теории оптимального приема оптических сигналов и т. д.

Литература

- [1] Э. Вольф, Л. Мандель. Усп. физ. наук, 87, 491, 1965; 88, 347, 1966; 88, 619, 1966.
- [2] С. Л. Мейта. Из: Progress in Optics. University of Rochester N. Y., vol. 8, p. 375, 1970.
- [3] Ф. Арекки, М. Скалли, Г. Хакен, В. Вайдлих. Квантовые флуктуации излучения лазеров. «Мир», М., 1974.
- [4] Г. Крамер. Математические методы статистики. ИЛ, М., 1948.
- [5] Р. Беллман. Введение в теорию матриц. «Наука», М., 1969.
- [6] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. «Наука», М., 1971.

Поступило в Редакцию 6 июня 1978 г.