УДК 517.98:530.145

Д. В. Исаченко

СВОЙСТВА КВАНТОВОГО ОПЕРАТОРА ЧЕЗАРО

Статья посвящена некоторым аспектам квантового исчисления. Квантовое исчисление берет своё начало с работ Л. Эйлера. В дальнейшем оно развивалось Ф. Джексоном и другими математиками. В настоящее время квантовые исчисления с успехом используются в математике (в частности, в теории специальных функций) и физике (см., например, [1, 2]). В статье рассматривается квантовый аналог классического оператора Чезаро, введенный в [3]. В ней будут доказаны ограниченность этого оператора в $L_2(R_+)$, его обратимость и вычислен обратный оператор.

Определение 1[3]**.** *Квантовым оператором Чезаро* называется оператор

$$C_q f(x) := (1-q)\sum_{k=0}^{\infty} q^k f(q^k x)$$

Или в других обозначениях,

$$C_q f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(x) d_q x.$$

Теорема 1. *Квантовый оператор Чезаро обратим, и обратный оператор задаётся формулой*

$$C_q^{-1} g(x) = \frac{g(x) - qg(qx)}{1-q},\ x \in R.$$

Δ Рассмотрим уравнение

$$(1-q)\sum_{k=0}^{\infty} q^k f(q^k x) = g(x). \tag{1}$$

Докажем, что для каждого g оно имеет единственное решение. Уравнение (1) равносильно равенству $\sum_{k=0} q^k f(q^k x) = \frac{g(x)}{1-q}$, т.е при всех $x \in R$

$$f(x) + qf(qx) + q^2 f(q^2 x) + \ldots + q^k f(q^k x) + \ldots = \frac{g(x)}{1-q}. \tag{2}$$

Заменяя в равенстве (2) x на qx и домножая на q, получим:

$$qf(qx) + q^2 f(q^2 x) + q^3 f(q^3 x) + \ldots + q^k f(q^k x) + q^{k+1} f(q^{k+1} x) \ldots = \frac{g(qx)q}{1-q}. \tag{3}$$

Вычитая из равенства (2) равенство (3), получаем

$$f(x) = \frac{g(x) - qg(qx)}{1 - q},$$

что и требовалось доказать. ∎

Теорема 2. *Оператор* C_q *действует в пространстве* $L_2(R_+)$ *, причём он линеен и ограничен, и* $\|C_q\| \le 1 - \sqrt{q}$.

Δ Докажем, что C_q действует в пространстве $L_2(R_+)$, то есть

$$C_q : L_2(R_+) \to L_2(R_+) .$$

Воспользуемся следующей теоремой.

Теорема 3. *Если X банахово пространство и ряд*

$$y_0 + y_1 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} y_k , \tag{4}$$

где y_k *– элементы пространства X, сходится абсолютно (то есть сходится ряд из норм* $\sum_{k=0}^{\infty} \|y_k\|$*), то ряд (4) сходится в пространстве X.*

Применим эту теорему к банахову пространству X= $L_2(R_+)$, где

$$L_2(R_+) := \left\{ f : R_+ \to C : \int_0^{\infty} \left| f(x) \right|^2 dx < \infty \right\}$$

с нормой

$$\| f \|_2 = \left(\int_0^{\infty} | f(x) |^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

и векторам $y_k = q^k f(q^k x) \in L_2(R_+)$. Найдём норму этих функций:

$$\| y_k \| = \left(\int_0^{\infty} \left| q^k f(q^k x) \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\left| q^k \right|^2 \int_0^{\infty} \left| f(q^k x) \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\left| q^k \right|^2}{q^k} \int_0^{\infty} \left| f(q^k x) \right|^2 d(q^k x) \right)^{\frac{1}{2}} = \left[q^k x = t \right] =$$

$$= q^{\frac{k}{2}} \left(\int_0^{\infty} \left| f(t) \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = q^{\frac{k}{2}} \| f \|_2 .$$

Следовательно, $\sum_{k=0}^{\infty} \| y_k \| = \sum_{k=0}^{\infty} q^{\frac{k}{2}} \| f \|_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sqrt{q} \right)^k \| f \| = \left[т.к. |q| < 1 \right] = \frac{\| f \|_2}{1 - \sqrt{q}}$ $\Rightarrow$ ряд

$\sum_{k=0}^{\infty} y_k$ – сходится в пространстве X по теореме 3.

Проверим линейность оператора $C_q f(x) = (1 - q) \sum_{k=0}^{\infty} q^k f(q^k x)$.

Пусть $C_q = (1 - q) \sum_{k=0}^{\infty} q^k f(q^k x)$. Тогда

$$C_q(\alpha f + \beta g) = (1 - q) \sum_{k=0}^{\infty} q^k (\alpha f(q^k x) + \beta g(q^k x)) = (1 - q) \left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k \alpha f(q^k x) + \sum_{k=0}^{\infty} q^k \beta g(q^k x) \right) =$$

$$= (1 - q) \sum_{k=0}^{\infty} q^k \alpha f(q^k x) + (1 - q) \sum_{k=0}^{\infty} q^k \beta g(q^k x) = \alpha (1 - q) \sum_{k=0}^{\infty} q^k f(q^k x) + \beta (1 - q) \sum_{k=0}^{\infty} q^k g(q^k x) = \alpha C_q f + \beta C_q g$$

Таким образом, оператор линеен.

Докажем ограниченность. Напомним, что оператор $C_q : X \to X$ называется *ограниченным*, если $\exists c : \| C_q f \| \le c \| f \|$, причём $\| C_q \| = \min c$, т. е. норма оператора C_q является наименьшей из констант ограниченности.

$$\| C_q f \|_2 = \left\| (1 - q) \sum_{k=0}^{\infty} q^k f(q^k x) \right\|_2 \le (1 - q) \sum_{k=0}^{\infty} \left\| q^k f(q^k x) \right\|_2 .$$

По ранее доказанному при $y_k = q^k f(q^k x)$, $\sum_{k=0}^{\infty} \| y_k \|_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\| f \|_2}{1 - \sqrt{q}}$ получим

$(1-q)\sum^{\infty}$

$k=0$

$q^k f(q^k x)\ \|\ \ \|$

2

$= (1-q)\quad \frac{\|f\|_2}{1-\sqrt{q}}\quad \|_2\quad \|\ \|\quad \sqrt{q}$

∞

$= (1+$

$q)\ )\ f\quad \sqrt{\ }\ \|$

$\Rightarrow c = 1+$

, значит, $\sqrt{q}$

$C_q\ \le 1+\quad \Rightarrow$

оператор C_q

$f(x) = (1-q)\sum_{k=0} q^k f(q^k x)$ ограничен. ∎

Литература

1 Гаспер, Дж. Базисные гипергеометрические ряды / Дж. Гаспер, М. Рахман. – Москва : Мир, 1993. – 348 с.

2 Stankovic, M. S. On q-fractional derivatives of Riemann–Liouville and Caputo type / M. S. Stankovic, P. M. Rajkovic, S. D. Marinković. – arXiv, 2009. – 18 p. – (Preprint / University of Niš ; https://arxiv.org/abs/0909.0387).

3 Mirotin, A. R. On the description of multidimensional normal Hausdorff operators on Lebesgue spaces / A. R. Mirotin // Forum Math. – 2019. – Vol. 32, № 1. – P. 111–119.