

С. В. Киргинцева

РЕАЛИЗАЦИЯ РАСЧЕТА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННЫХ СОСТОЯНИЙ УПРУГИХ ТЕЛ ИЗ КОМПОЗИТОВ С ПОКРЫТИЯМИ

В работе рассматривается слоистая система упругих тел при плоском напряженном состоянии, элементами которой являются ортотропное основание и изотропное покрытие, на верхней границе которой действует нагрузка, как нормальная, так и касательная. Решается задача создания автоматизированной методики расчета напряженно-деформированного состояния указанного вида слоистых систем и разработки программного продукта.

Введение. В современной практике машиностроения одной из актуальных задач является создание и использование покрытий оснований, которые отличались бы своей износостойкостью и, как следствие, долговечностью в использовании, что, в свою очередь, влияет на экономическую составляющую изготовления и использования элементов конструкций.

Следует отметить, что в настоящее время недостаточно внимания уделяется разработке современных математических моделей расчета деформированного и напряженного состояний в покрытиях и основаниях, которые адекватно отражали бы экспериментальные исследования. Одной из задач математического моделирования является численная реализация расчета напряженно-деформированных состояний покрытий из композиционных материалов. В качестве математической модели принималась схема расчета изотропного покрытия на упругом ортотропном основании. Основные элементы, касающиеся расчета, заложены в [1–3]. Но современные условия создания новых покрытий из хрома, железа и других материалов требуют разработки более детального подхода к новым алгоритмам расчета [4], базирующихся на современном программном обеспечении, которое позволит выбрать оптимальные свойства материала и толщину покрытий, даст визуальное представление основных результатов в виде графических зависимостей, таблиц и других приложений, а также оценку точности расчета на основании математических моделей [1–3].

Постановка задачи. Рассмотрим волокнистый композиционный материал (здесь и далее композит моделируется в виде ортотропного тела) с изотропным покрытием, на верхней границе которого действует нагрузка, оказываемая цилиндрическим индентором. Волокна в основании могут быть расположены продольным, нормальным и поперечным способами.

Возможны несколько вариантов закрепления покрытия на основании: жесткое скрепление и свободное расположение без трения. Отличаясь условиями закрепления, эти задачи имеют различные условия на границе покрытие – основание. Считаем, что в зоне контакта нормальное давление распределяется по эллиптическому закону

$$p(x) = P_0 \sqrt{a^2 - x^2},$$

где $P_0 = \frac{2P}{\pi a}$;

а также действуют и касательные усилия.

Ставится задача программной реализации расчета напряженно-деформированного состояния сложной слоистой системы, состоящей из ортотропного материала и однородного покрытия.

Методика построения математической модели.

Математическая модель граничных задач для слоистой системы строится в напряжениях, и рассматривается ортотропный случай анизотропии основания и изотропного покрытия. Напряжения, возникающие в слоистой системе под действием нормальной нагрузки, определяются следующими выражениями [2]:

– напряжения в покрытии:

$$\sigma_{x(1)} = \int_0^{\infty} \left[A_1 ch(\alpha y) + B_1 sh(\alpha y) \pm \frac{2}{\alpha} C sh(\alpha y) + y C ch(\alpha y) \pm \frac{2}{\alpha} D ch(\alpha y) + y D sh(\alpha y) \right] \cdot \cos(\alpha x) d\alpha,$$

$$\sigma_{y(1)} = - \int_0^{\infty} \left[A ch(\alpha y) + B sh(\alpha y) + y C ch(\alpha y) + y D sh(\alpha y) \right] \cdot \cos(\alpha x) d\alpha,$$

$$\tau_{xy(1)} = \int_0^{\infty} \left[A sh(\alpha y) + B ch(\alpha y) + \frac{C}{\alpha} ch(\alpha y) + y C sh(\alpha y) + \frac{D}{\alpha} sh(\alpha y) + y D ch(\alpha y) \right] \cdot \sin(\alpha x) d\alpha;$$

– напряжения в основании:

$$\sigma_{x(2)} = \int_0^{\infty} \left[\frac{A}{\beta_1} e^{-\alpha y} + \frac{B}{\beta_2} e^{-\alpha y} \right] \cdot \cos(\alpha x) d\alpha,$$

$$\sigma_{y(2)} = - \int_0^{\infty} \left[A_2 e^{-\alpha y} + B_2 e^{-\alpha y} \right] \cdot \cos(\alpha x) d\alpha,$$

$$\tau_{xy(2)} = - \int_0^{\infty} \left[\frac{A}{\beta_1} e^{-\alpha y} + \frac{B}{\beta_2} e^{-\alpha y} \right] \cdot \sin(\alpha x) d\alpha,$$

где E, ν – модуль упругости (Юнга) и коэффициент Пуассона упругого покрытия.

Таким образом, задача сводится к нахождению коэффициентов $A_1(\alpha), B_1(\alpha), C(\alpha), D(\alpha), A_2(\alpha), B_2(\alpha)$.

С учетом граничных условий получаем систему линейных алгебраических уравнений:

$$M \times (A_1 \ B_1 \ C \ D \ A_2 \ B_2)^T = (\tilde{p} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T,$$

матрица которой (M) для задачи при условии, что покрытие жестко скреплено с основанием, имеет следующий вид [2]:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/\alpha & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & s_1 & hc_1 & hs_1 & -e_1 & -e_2 \\ s & c & c/\alpha + hs & s/\alpha + hc & e/\beta & e/\beta \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ c_1 & s_1 & 2s_1/(\alpha(1+\nu) + hc_1) & 2c_1/(\alpha(1+\nu) + hs_1) & e_1 R_1 \delta & e_2 R_2 \delta \\ s_1 & c_1 & (\alpha hs_1 - c_1) + 2c_1 \nu/\alpha & (\alpha hc_1 - s_1) + 2s_1 \nu/\alpha & e_1 Q_1 \delta \beta & e_2 Q_2 \delta \beta \end{bmatrix},$$

где $c_i = ch(\alpha h)$, $s_i = sh(\alpha h)$; $e_i = e^{-\frac{\rho x}{\beta_i}}$; $R_i = S_{12} - \frac{S_{11}}{\beta_i^2}$; $Q_i = S_{22} - \frac{S_{21}}{\beta_i^2}$; $i = 1, 2$; $\delta = \frac{1+\nu}{E}$;
 $\rho = \frac{2}{E}$ – для ПНС, $\rho = \frac{2(1-\nu^2)}{E}$ – для случая плоской деформации.

В случае действия граничной касательной нагрузки методика аналогична, только в правой части системы добавляется касательная нагрузка q и \cos меняется на \sin (см. [2]).

В правой части системы используется интегральное преобразование Фурье функции нагрузки $p(x)$. Интегралы с бесконечными верхними пределами заменяются «усеченными» интегралами с конечными пределами $A = const$. Систему функциональных уравнений ($Mx = b$) в связи с тем, что порядок системы небольшой, как показывает практика, эффективно решать известным методом Крамера.

В данной работе разработан алгоритм расчета напряженно-деформированного состояния как внутри изотропного покрытия, так и в ортотропном основании. Произведена реализация алгоритма в виде программы на языке Delphi и решен ряд тестовых примеров, позволяющий сделать оценку точности расчета.

Заключение. Следует отметить, что задача разработки программного продукта для расчета напряженно-деформированных состояний покрытий на ортотропных основаниях с учетом трения является актуальной, и результаты решения применяются для инженерных расчетов зубчатых колес из композитов, имеющих твердое покрытие зубьев (в качестве твердой смазки). В то же время численное получение компонентов тензора напряжений и тензора деформаций, а также компонентов перемещений в зависимости от действия граничных усилий и физико-механических характеристик материала покрытий и оснований (например, по методам конечных и граничных элементов) представляет собой трудоемкий процесс, который требует больших затрат.

Литература

- 1 Можаровский, В. В. Прикладная механика слоистых тел из композитов / В. В. Можаровский, В. Е. Старжинский. – Минск : Наука, 1988. – 280 с.
- 2 Можаровский, В. В. Напряженное состояние упругого ортотропного основания с однородным покрытием с учетом трения / В. В. Можаровский, Н. А. Рогачева // Трение и износ. – 1999. – Т. 20, № 5. – С. 471–479.
- 3 Можаровский, В. В. Математическое моделирование взаимодействия цилиндрического индентора с волокнистым композиционным материалом / В. В. Можаровский, И. В. Смотровенко // Трение и износ. – 1996. – № 5. – С. 738–746.
- 4 Закономерности изнашивания упрочненной ионами азота аустенитной стали 12X18H10T / В. А. Кукареко, В. В. Можаровский, А. В. Кушнеров, С. А. Марьин // Проблемы физики, математики и техники. – 2020. – № 4(39) – С. 37–42.

УДК 004.413:616.314

Д. Е. Киселев

РАЗРАБОТКА ДЕКСТОП-ПРИЛОЖЕНИЯ ДЛЯ СТОМАТОЛОГИЧЕСКОЙ КЛИНИКИ

Статья посвящена использованию таких технологий, как MICROSOFT VISUAL STUDIO и MICROSOFT SQL SERVER 2017. Решена задача по реализации приложения,