УДК 517.983

Н. С. Костюченко

ОПЕРАТОР ХАУСДОРФА В ПРОСТРАНСТВЕ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

Целью данной работы является получение условий ограниченности оператора Хаусдорфа в пространстве Харди. В работе представлены определения p-нормированного пространства, пространства Харди и оператора Хаусдорфа в пространстве Харди. Также доказано, что пространство Харди H^p является p-нормированным и получены условия ограниченности оператора Хаусдорфа в этом пространстве.

Определение 1. Пусть X – векторное пространство. Функция $\|x\|_p$ называется p-нормой, если:

1) $\|x\|_p \geq 0$, $\|x\|_p = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

2) $\|\alpha x\|_p^p = |\alpha|^p \|x\|_p^p$;

3) $\|x + y\|_p^p \leq \|x\|_p^p + \|y\|_p^p$.

Лемма 1. *Пусть* $0 < p < 1$ *и* X – p*-нормированное пространство. Тогда* $\rho(x, y) = \|x - y\|_p$ *– квазиметрика в* X.

Доказательство. Возведем $\rho(x, y)$ в p-ю степень.

$$\rho(x, y)^p = \|x - y\|_p^p = \|(x - z) + (z - y)\|_p^p.$$

Из третьего свойства p-нормы следует:

$$\|x - y\|_p^p = \|(x - z) + (z - y)\|_p^p \leq \|x - z\|_p^p + \|z - y\|_p^p \leq 2 \max\left\{ \|x - z\|_p^p ; \|z - y\|_p^p \right\}.$$

Вычисляя корень p-й степени получим:

$$\sqrt[p]{2 \max\left\{\|x - z\|_p^p ; \|z - y\|_p^p\right\}} = 2^{\frac{1}{p}} \max\left\{\|x - z\|_p ; \|z - y\|_p\right\} = 2^{\frac{1}{p}} \max\left\{\rho(x, z); \rho(z, y)\right\}.$$

Следовательно $\|x - y\|_p$ – квазиметрика.

Лемма 2. *Пусть* $g(x) \in C_{[a,b]}$ *и* $g(x) > 0$ $\forall x \in [a,b]$, *тогда* $\int_a^b g(x)dx > 0$.

Определение 2 [1]. Пусть $p > 0$. Пространство Харди $H^p(D)$ состоит из функций, аналитических в единичном круге D и удовлетворяющих условию

$$\|f\|_p^p = \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^p d\theta < \infty.$$

Лемма 3. $H^p(D)$ – *p -нормированное пространство.*

Доказательство. Проверим выполнение всех аксиом p -нормы.

1) $\|f\|_p = 0 \sim \forall r \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta = 0 \Rightarrow |f(re^{i\theta})|^p = 0$ п.в. на θ. $f(re^{i\theta}) = 0$ п.в. на θ.

Так как функция f – непрерывна, то $f(re^{i\theta}) = 0 \; \forall\theta$. Неотрицательность следует из леммы 2.

2) $$\|\alpha f\|_p^p = \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\alpha f(re^{i\theta})|^p d\theta = \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\alpha|^p |f(re^{i\theta})|^p d\theta =$$
$$= \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} |\alpha|^p \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta = |\alpha|^p \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta = |\alpha|^p \|f\|_p^p.$$

3) $\|f+g\|_p^p = \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta}) + g(re^{i\theta})|^p d\theta$. Из неравенства $(a+b)^p \le a^p + b^p$, где $0 < p < 1$. Следует, что $\left(|f(re^{i\theta}) + g(re^{i\theta})|\right)^p \le |f(re^{i\theta})|^p + |g(re^{i\theta})|^p$. Тогда

$$\sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta}) + g(re^{i\theta})|^p d\theta = \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta + \int_0^{2\pi} |g(re^{i\theta})|^p d\theta\right) \le$$
$$\le \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta + \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(re^{i\theta})|^p d\theta = \|f\|_p^p + \|g\|_p^p.$$

Так как все три условия выполняются, то из этого следует, что пространство Харди $H^p(D)$ p -нормировано.

Ниже положено $dA(w) = \dfrac{dxdy}{\pi}$, где $w = x + iy$.

Определение 3. Пусть $p > 0$, $a(w) = e^{i\alpha(w)}$, $\alpha(w) \in \mathbb{R}$ и функция k измерима. Оператор Хаусдорфа в пространстве $H^p(D)$ определяется равенством

$$\left(H_{k,a} f\right)(z) = \int_D k(w) f(a(w)z) dA(w).$$

Теорема 1. *Пусть* $p > 1$ *и функция k такова, что интеграл* $\int_D |k(w)|^p dA(w)$ *сходится. Тогда оператор Хаусдорфа* $H_{k,a}$ *ограничен в пространстве* H^p.

Доказательство.

$$\|H_{k,a} f\|_p^p = \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\int_D k(w) f(a(w)r^{i\theta}) dA(w)\right|^p d\theta. \qquad (1)$$

Рассмотрим интеграл, находящийся под знаком sup:

$$\int_0^{2\pi} \left|\int_D k(w) f(a(w)r^{i\theta}) dA(w)\right|^p d\theta. \qquad (2)$$

Воспользуемся интегральным неравенством Минковского:

$$\left(\int_{S_1}\left|\int_{S_2} F(x,y)\mu dx\right|^p \mu dy\right)^{\frac{1}{p}} \le \int_{S_2}\left(\int_{S_1}\left|F(x,y)\right|^p \mu dy\right)^{\frac{1}{p}} \mu dx .$$

Получим:

$$\left(\int_0^{2\pi}\left|\int_D k(w)\, f(a(w)r^{i\theta})dA(w)\right|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} \le \int_D\left(\int_0^{2\pi}\left|k(w)\, f(a(w)r^{i\theta})\right|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} dA(w). \qquad (3)$$

Рассмотрим внутренний интеграл правой части неравенства:

$$\int_0^{2\pi}\left|k(w)\, f(a(w)r^{i\theta})\right|^p d\theta = \left|k(w)\right|^p \int_0^{2\pi}\left|f(a(w)r^{i\theta})\right|^p d\theta = \left|k(w)\right|^p \int_0^{2\pi}\left|f(e^{i\alpha(w)}r^{i\theta})\right|^p d\theta =$$

$$= \left|k(w)\right|^p \int_0^{2\pi}\left|f(e^{i(\alpha(w)+\theta)})\right|^p d\theta = \left[\begin{array}{l}\alpha(w)+\theta = t\\ \theta = t-\alpha(w)\end{array}\right] = \left|k(w)\right|^p \int_{\alpha(w)}^{2\pi+\alpha(w)}\left|f(re^{it})\right|^p dt .$$

Так как $f(re^{it})$ – 2π-периодическая функция, то получим

$$\left|k(w)\right|^p \int_{\alpha(w)}^{2\pi+\alpha(w)}\left|f(re^{it})\right|^p dt = \left|k(w)\right|^p \int_0^{2\pi}\left|f(r^{i\theta})\right|^p d\theta . \qquad (4)$$

Возвращаясь к неравенству (2), имеем:

$$\int_0^{2\pi}\left|\int_D k(w)\, f(a(w)r^{i\theta})dA(w)\right|^p d\theta \le \int_D\left|k(w)\right|^p\left(\int_0^{2\pi}\left|f(re^{i\theta})\right|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} dA(w) = \int_D\left|k(w)\right|^p dA(w)\left\|f\right\|_p . \ (5)$$

Подставляя (5) в (1), получим:

$$\sup_{0<r<1}\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}\left|f(re^{i\theta})\right|^p d\theta\int_D\left|k(w)\right|^p dA(w)\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_D\left|k(w)\right|^p dA(w)\right)\frac{1}{2\pi^{1-\frac{1}{p}}},$$

$$\left(\sup_{0<r<1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(re^{i\theta})\right|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{2\pi^{1-\frac{1}{p}}}\int_D\left|k(w)\right|^p dA(w)\left\|f\right\|_p ,$$

где $\frac{1}{2\pi^{1-\frac{1}{p}}}\int_D\left|k(w)\right|^p dA(w)$ – константа в неравенстве ограниченности оператора. Теорема доказана.

Для доказательства следующей теоремы дадим еще два определения.

Определение 4. *Интегральной суммой функции f будем называть выражение вида*

$$\delta(f, P, T) = \sum_i f(T_i) A(D_i)^p,$$

где $P = \{D_i\}$ – разбиение круга D, $A(D_i)$ – области D_i, а T_i – произвольная точка, взятая в каждой из этих областей.

Определение 5. *p-Интегралом функции f* назовем выражение вида*:*

$$\int_D f(w) dA^p(w) = \lim_{\lambda(P)\to 0} \delta(f, P, T)$$

($\lambda(P)$ – мелкость разбиения *P)*, если предел существует.

Теорема 2. *Пусть* $0 < p < 1$, $a(w) = e^{i\alpha(w)}, \alpha(w) \in \mathbb{R}$, $|a(w)| = 1$, $w = x + iz$ *и существует* $\int_D |k(w)|^p dA^p(w)$. *Тогда оператор Хаусдорфа* $H_{k,a}$ *ограничен в пространстве* H^p.

Доказательство. Представим интеграл как предел интегральной суммы

$$\int_D k(w) f(a(w) r^{i\theta}) dA(w) = \lim_{\lambda(P)\to 0} \delta(P_i T, z).$$

Далее запишем интегральную сумму данного интеграла

$$\delta(P_i T, z) = \sum_i k(T_i) f(a(T_i) z) A(D_i).$$

Если эти выражения равны, то рассмотрим p-норму обеих частей равенства

$$\left\|\delta(P_i T, z)\right\|_p^p = \left\|\sum_i k(T_i) f(a(T_i) z) A(D_i)\right\|_p^p.$$

Воспользовавшись вторым и третьим свойством p-нормы получим

$$\left\|\sum_i k(T_i) f(a(T_i) z) A(D_i)\right\|_p^p \le \sum_i \left|k(T_i)\right|^p \left|A(D_i)\right|^p \left\|f(a(T_i) z)\right\|_p^p = \left(\sum_i \left|k(T_i)\right|^p \left|A(D_i)\right|^p\right) \|f\|_p^p,$$

тогда $\left\|H_{k,a} f\right\|_p^p \le \int_D |k(w)|^p dA^p(w) \|f\|_p^p$. Возведя обе части в степень $\frac{1}{p}$ получим

$\left\|H_{k,a} f\right\|_p \le \left(\int_D |k(w)|^p dA^p(w)\right)^{\frac{1}{p}} \|f\|_p$. Теорема доказана.

Литература

1 Кусис, П. Введение в теорию пространств H^p / П. Кусис. – Москва : Мир, 1984. – 368 с.

УДК 517.983

С. Ю. Кунделев

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРОВ ТИПА ХАУСДОРФА В ПРОСТРАНСТВЕ ЛЕБЕГА

Целью данной работы является доказательство того, что такие важные операторы анализа, как оператор Чезаро, оператор Харди, оператор Копсона, сопряженный оператор Харди, оператор Кальдерона и оператор дробного интегрирования Римана-Лиувилля, являются операторами типа Хаусдорфа, а также вычисление символов, спектров и норм этих операторов. Все рассмотрения опираются на результаты работы [1].

Определение 1. *Оператором Хаусдорфа* называется оператор вида:

$$(H_{K,a} f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(u) f(a(u)x)du, \qquad (1)$$

где $K(u)$ и $a(u)$ заданные функции.

Примеры:

1) $(C f)(x) = \frac{1}{x}\int^{x} f(v)dv$ – оператор Чезаро;

2) $(H_\gamma f)(x) = \frac{\gamma\,\mathrm{sgn}(x)}{|x|^{\gamma}}\int_0^x |v|^{\gamma-1} f(v)dv,\ \gamma > \frac{1}{2}$ – оператор Харди;

3) $(H^*_\gamma f)(x) = \begin{cases}\gamma x^{\gamma-1}\int_x^{\infty} v^{-\gamma} f(v)dv, & x>0\\ \gamma |x|^{\gamma-1}\int_{-\infty}^{x} |v|^{-\gamma} f(v)dv, & x<0\end{cases},\ \gamma > \frac{1}{2}$ – сопряженный оператор Харди;

4) $(H^*_1 f)(x) = \begin{cases}\int_x^{\infty} \frac{f(v)}{v} dv, & x>0\\ -\int_{-\infty}^{x} \frac{f(v)}{v} dv, & x<0\end{cases}$ – оператор Копсона;

5) $(K f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(y)dy + \int_x^{\infty}\frac{f(y)}{y}dy$ – оператор Кальдерона;

6) $(I_\beta f)(x) = x^{-\beta}\int_0^x (x-y)^{\beta-1} f(y)dy,\ \beta > 0$ – оператор Римана-Лиувилля.

Определение 2 [1]. Символом оператора $\mathcal{H}$ называется функция

$$\varphi(s) = \int_{-\infty}^{\infty} K(u)|a(u)|^{-\frac{1}{2}+is} du,\ s \in R. \qquad (2)$$

Теорема 1. *1) Символ оператора* C_1 *равен* $\frac{1}{1+2is}$, $\|C_1\| = 1$, $\sigma(C_1) = \left\{w \in C : \left|w - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}\right\}$;