УДК 517.983

С. Ю. Кунделев

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРОВ ТИПА ХАУСДОРФА В ПРОСТРАНСТВЕ ЛЕБЕГА

Целью данной работы является доказательство того, что такие важные операторы анализа, как оператор Чезаро, оператор Харди, оператор Копсона, сопряженный оператор Харди, оператор Кальдерона и оператор дробного интегрирования Римана-Лиувилля, являются операторами типа Хаусдорфа, а также вычисление символов, спектров и норм этих операторов. Все рассмотрения опираются на результаты работы [1].

Определение 1. *Оператором Хаусдорфа* называется оператор вида:

$$(H_{K,a} f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(u) f(a(u)x)du, \qquad (1)$$

где $K(u)$ и $a(u)$ заданные функции.

Примеры:

1) $(Cf)(x) = \frac{1}{x}\int^{x} f(v)dv$ – оператор Чезаро;

2) $(H_\gamma^1 f)(x) = \frac{\gamma\,\mathrm{sgn}(x)}{|x|^\gamma}\int_0^x |v|^{\gamma-1} f(v)dv,\ \gamma > \frac{1}{2}$ – оператор Харди;

3) $(H_\gamma^* f)(x) = \begin{cases} \gamma x^{\gamma-1}\int_x^\infty v^{-\gamma} f(v)dv, & x>0 \\ \gamma |x|^{\gamma-1}\int_{-\infty}^x |v|^{-\gamma} f(v)dv, & x<0 \end{cases},\ \gamma > \frac{1}{2}$ – сопряженный оператор Харди;

4) $(H_1^* f)(x) = \begin{cases} \int_x^\infty \frac{f(v)}{v}dv, & x>0 \\ -\int_{-\infty}^x \frac{f(v)}{v}dv, & x<0 \end{cases}$ – оператор Копсона;

5) $(K_f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(y)dy + \int_x^\infty \frac{f(y)}{y}dy$ – оператор Кальдерона;

6) $(I_\beta f)(x) = x^{-\beta}\int_0^x (x-y)^{\beta-1} f(y)dy,\ \beta > 0$ – оператор Римана-Лиувилля.

Определение 2 [1]. Символом оператора $\mathcal{H}$ называется функция

$$\varphi(s) = \int_{-\infty}^{\infty} K(u)|a(u)|^{-\frac{1}{2}+is}du,\ s \in R. \qquad (2)$$

Теорема 1. *1) Символ оператора* C_1 *равен* $\frac{1}{1+2is}$, $\|C_1\| = 1$, $\sigma(C_1) = \left\{w \in C : \left|w - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}\right\}$;

2) Символ оператора H_γ *равен* $\dfrac{2\gamma}{2\gamma+2is-1}$, $\|H_\gamma\|=\dfrac{2\gamma}{2\gamma-1}$, $\sigma(H_\gamma)$ *равен окружности проходящей через эти три точки:* $\dfrac{2\gamma}{2\gamma-1}$, 0, $\dfrac{2\gamma(2\gamma-1)-2\gamma i}{(2\gamma-1)^2+1}$;

3) Символ оператора H_γ^* *равен* $\dfrac{2\gamma}{2\gamma-2is-1}$, $\|H_\gamma^*\|=\dfrac{2\gamma}{2\gamma-1}$, $\sigma(H_\gamma^*)$ *равен окружности, проходящей через эти три точки:* $\dfrac{2\gamma}{2\gamma-1}$, 0, $\dfrac{2\gamma(2\gamma-1)-2\gamma i}{(2\gamma-1)^2+1}$;

4) Символ оператора H_1^* *равен* $\dfrac{2}{1-2is}$, $\|H_1^*\|=2$, $\sigma(H_1^*)=\{w\in C: |w-1|=1\}$*;*

5) Символ оператора K_f *равен* $\dfrac{1}{\frac{1}{4}+s^2}$, $\|K_f\|=4$, $\sigma(K_f)=[0;4]$ *;*

6) Символ оператора I_β *равен* $\dfrac{\Gamma(\beta)\Gamma\left(\frac{1}{2}+is\right)}{\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}+is\right)}$, $\|\mathrm{I}_\beta f\|=\sqrt{\pi}\dfrac{\Gamma(\beta)}{\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)}$*, замыкание спектра множества значений функции* φ *на расширенной прямой.*

Доказательство.

1) Возьмем: $\mathrm{K}(u)=\chi_{(0,1)}(u)=\begin{cases}1, u\in(0,1)\\ 0, u\in(0,1)\end{cases}$, $a(u)=u$.

Подставим $K(u)=\chi_{(0,1)}(u)$; $a(u)=u$ в формулу (1), получим:

$$(C_1 f)(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(v)dv.$$

Подставим их в формулу (2) и воспользовавшись теоремой 1 из $[1]$, получим:

$$\varphi(s)=\frac{1}{1+2is},$$

$$\|C_1\|=\sup\left|\frac{1}{1+2is}\right|=1.$$

В силу кругового свойства дробно-линейного отображения, спектр есть окружность

$$\sigma(C_1)=\left\{w\in\mathbb{C}:\left|w-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}\right\},$$

так как она проходит через точки

$$\varphi(0)=1;\ \varphi(\infty)=0;\ \varphi\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{i}{2}.$$

2) Возьмем: $K(u)=\gamma|u|^{\gamma-1}\chi_{(0,1)}(u)$; $a(u)=u$. Подставим их в формулу(1), получим:

$$(H_\gamma f)(x)=\frac{\gamma\,\mathrm{sgn}(x)}{|x|^\gamma}\int_0^x |v|^{\gamma-1}f(v)dv,\ \gamma>\frac{1}{2}.$$

Возьмем: $K(u)=\gamma|u|^{\gamma-1}\chi_{(0,1)}(u); a(u)=u.$ Подставим эти значения в формулу (2), получим, аналогично 1):

$$\varphi(s)=\frac{2\gamma}{2\gamma+2is-1},$$

$$\left\|H_\gamma\right\|=\sup\left|\frac{2\gamma}{2\gamma+2is-1}\right|=\frac{2\gamma}{2\gamma-1},$$

$$\varphi(0)=\frac{2\gamma}{2\gamma-1};\ \varphi(\infty)=0;\ \varphi\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2\gamma(2\gamma-1)-2\gamma i}{(2\gamma-1)^2+1}.$$

3) Возьмем: $K(u)=\gamma|u|^{\gamma-2}\chi_{(0,1)}(u); a(u)=\frac{1}{u}$. Подставим их в формулу (1), получим:

$$(H^{*}_{\gamma} f)(x)=\gamma x^{\gamma-1}\int_x^\infty v^{-\gamma} f(v)dv,\ \gamma>\frac{1}{2}.$$

Возьмем: $K(u)=\gamma|u|^{\gamma-2}\chi_{(0,1)}(u); a(u)=\frac{1}{u}.$ Подставим их в формулу (2), получим, аналогично 1):

$$\varphi(s)=\frac{2\gamma}{2\gamma-2is-1},$$

$$\left\|H^*_\gamma\right\|=\left|\frac{2\gamma}{2\gamma-2is-1}\right|=\frac{2\gamma}{2\gamma-1},$$

$$\varphi(0)=\frac{2\gamma}{2\gamma-1};\ \varphi(\infty)=0; \varphi\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2\gamma(2\gamma-1)-2\gamma i}{(2\gamma-1)^2+1}.$$

4) Возьмем: $K(u)=\frac{1}{u}\chi_{(0,1)}(u);\ a(u)=\frac{1}{u}$. Подставим их в формулу (1), получим:

$$(H^*_1 f)(x)=\int_x^\infty \frac{f(v)}{v}dv.$$

Возьмем: $K(u)=\frac{1}{u}\chi_{(0,1)}(u);\ a(u)=\frac{1}{u}$. Подставим их в формулу (2), получим, аналогично 1):

$$\varphi(s)=\frac{2}{1-2is},$$

$$\left\|H^*_1\right\|=\sup\left|\frac{1}{\frac{1}{2}-is}\right|=2,$$

$$\sigma(H^*_1)=\left\{w\in\mathbb{C}: |w-1|=1\right\},$$

так как она проходит через точки

$$\varphi(0)=2;\ \varphi(\infty)=0;\ \varphi(1)=\frac{2}{5}+\frac{4i}{5}.$$

5) Возьмем: $K(u)=\chi_{(0,\infty)}(u)\dfrac{1}{u\max(1;u)}$; $a(u)=\dfrac{1}{u}$.

Подставим их в формулу (1), получим:

$$(K_f)(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(y)dy+\int_x^\infty \frac{f(y)}{y}dy.$$

Возьмем: $K(u)=\chi_{(0,\infty)}(u)\dfrac{1}{u\max(1;u)}$; $a(u)=\dfrac{1}{u}$. Подставим их в формулу (2), получим, аналогично 1):

$$\varphi(s)=\frac{1}{\frac{1}{4}+s^2},$$

$$\|K_f\|=\sup\left|\frac{1}{\frac{1}{4}+s^2}\right|=4,$$

$$\sigma(K_f)=[0;\ 4].$$

6) Возьмем: $K(u)=\chi_{(0,1)}(u)(1-u)^{\beta-1}$; $a(u)=u$. Подставим их в формулу (1), получим:

$$(I_\beta f)(x)=x^{-\beta}\int_0^x (x-y)^{\beta-1}f(y)dy,\ \beta>0.$$

Возьмем: $K(u)=\chi_{(0,1)}(u)(1-u)^{\beta-1}$; $a(u)=u$. Подставим их в формулу (2), получим, аналогично 1):

$$\varphi(s)=\frac{\Gamma(\beta)\Gamma\left(\frac{1}{2}+is\right)}{\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}+is\right)},$$

$$\|I_\beta f\|=\int_0^1(1-u)^{\beta-1}u^{-\frac{1}{2}}du=\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)}.$$

Спектр этого оператора есть замыкание множества значений функции φ по теореме 1 из [1].

Литература

1 Миротин, А. Р. О структуре нормальных хаусдорфовых операторов в пространствах Лебега / А. Р. Миротин // Функциональный анализ и его приложения. – 2019. – Т. 53, вып. 4. – С. 27–37.

УДК 004.4'2:539.3

М. В. Москалева

РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНОГО МОДУЛЯ ПО РАСЧЕТУ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРУЕМОГО СОСТОЯНИЯ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Статья посвящена определению напряженно-деформированного состояния упругого (плоская задача) полупространства. Создана программа на современном языке программирования C# для расчета напряжений в произвольной точке при действии распределенного нормального давления и касательных усилий на границе. Сделана компьютерная программа по построению линий равного уровня напряжений в полуплоскости.

Исследование вопросов расчета параметров контактного взаимодействия упругих деформируемых тел является одним из ведущих направлений в механике. На современном этапе развития механики деформируемого твердого тела получены решения многих контактных задач, как аналитическими методами, так и численными, однако в связи с разработкой новых материалов и численных технологий исследования в этой области остаются актуальными.

В данной работе исследуется напряженно деформируемое состояние упругой полуплоскости в системе координат XOZ (так в двумерном случае будем называть полупространство), нагруженной на границе, представляющей собой узкую прямолинейную полосу ($-b \le x \le a$), по этой полосе действуют нормальные давления и касательные усилия $q(x)$, распределенные некоторым произвольным образом. Компоненты напряжений в точке $A(x,z)$ вызываемыми нагрузками $p(x)$ и $q(x)$, определяем следующим образом [1]

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{2z}{\pi}\int_{-b}^{a}\frac{p(s)(x-s)^2\,ds}{[(x-s)^2+z^2]^2}-\frac{2}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{q(s)(x-s)^3\,ds}{[(x-s)^2+z^2]^2},\\ \sigma_z &= -\frac{2z^3}{\pi}\int_{-b}^{a}\frac{p(s)\,ds}{[(x-s)^2+z^2]^2}-\frac{2z^2}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{q(s)(x-s)\,ds}{[(x-s)^2+z^2]^2},\\ \tau_{xz} &= -\frac{2z^2}{\pi}\int_{-b}^{a}\frac{p(s)(x-s)\,ds}{[(x-s)^2+z^2]^2}-\frac{2z}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{q(s)(x-s)^2\,ds}{[(x-s)^2+z^2]^2}. \end{aligned} \tag{1}$$

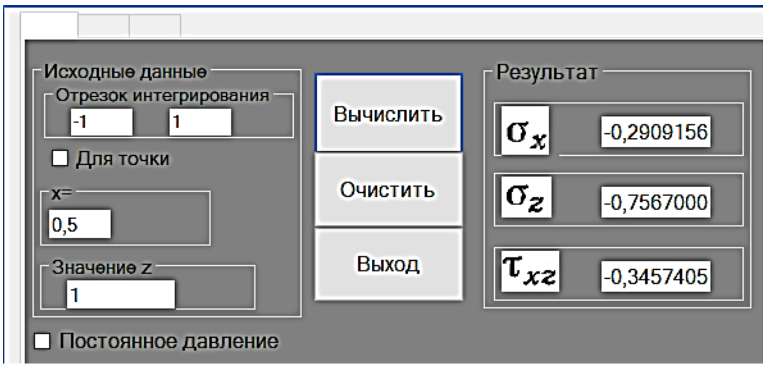

Рисунок 1 – Расчет $\tau_{xz}, \sigma_x, \sigma_z$ в произвольной точке