

О НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЯХ ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

И. Я. Брусин

Для выяснения общих свойств изображения рассматриваются математические модели обобщенных оптических систем, основанные на волновой природе света. Такой метод позволяет дать более общую формулировку условия синусов Аббе и связать ее с частотными характеристиками: амплитудно-частотной и фазово-частотной. Зависимость последней от пространственных координат позволяет исследовать отличие объемной структуры волнового поля изображения от объемной структуры поля объекта. Как частный случай получается теорема Максвелла об идеальном приборе. Дается пример анализа неинвариантных aberrаций как результат отклонения от условия Аббе.

1. Модель Гаусса. В теории оптических приборов используется представление об идеальной оптической системе [1], свойства которой по преобразованию световых лучей определяются положением оптической оси и главных и фокальных плоскостей. Эта идеализация создана Гауссом, ее можно назвать математической [2] или, точнее, геометрической моделью оптической системы. Ценность ее состоит в том, что она с определенной точностью передает зависимость между положением и размерами объекта и его изображения для большого класса реальных приборов, значительно отличающихся своим строением.

Однако модель Гаусса приводит к неправильному выводу, что в принципе возможен прибор, формирующий безабберационное изображение каждой точки объемного объекта и допускающий любое увеличение, т. е. модель искажает фактическую структуру объемного изображения. Как известно [1], это следствие того, что в основе модели лежит предположение о точном выполнении геометрического закона прямолинейного распространения света в пространствах объектов и изображений, и не учитываются явления интерференции.

Ниже для анализа свойств изображения используются волновые модели, т. е. световые поля описываются распределением комплексных амплитуд $a(x, y, z)$ в пространстве объектов и $b(X, Y, Z)$ в пространстве изображений и считается, что они подчиняются скалярному уравнению Гельмгольца [3], но с разными длинами волн $\lambda=1/k$ и $\Lambda=1/K$, а оптический прибор рассматривается как «черный ящик» [2], который производит заданное преобразование световых полей.

Такой метод позволяет исследовать структуру изображения не только в одной плоскости, что сделано в [4] и других работах, но и закономерности объемной структуры. Кроме того, достигается большая общность выводов, так как под световыми полями можно понимать подчиняющиеся уравнению Гельмгольца волновые поля любой физической природы и не обязательно одинаковой в обоих пространствах. Это, например, имеет место при использовании методов голографии. Такие системы названы в [5] оптическими системами в широком смысле.

2. Модель Аббе. В теории оптического изображения наиболее интересна математическая модель системы со следующим идеальным свойством: если в пространстве объектов в плоскости $z=0$ имеется произ-

вольное распределение комплексных амплитуд $a(x, y, o)$, то в пространстве изображений в плоскости $Z=0$ получается подобное распределение

$$b(X, Y, O) = H_0 a(x, y, o), \quad (1)$$

причем

$$X = N_1 x, \quad Y = N_2 y, \quad (2)$$

где N_1 и N_2 увеличены по осям X и Y соответственно и

$$H_0 = |H_0| \exp(i\varphi_0) = \text{const.}$$

Распределение комплексных амплитуд в одной плоскости определяет распределение комплексных амплитуд во всем пространстве как решение уравнения Гельмгольца. Воспользуемся решением в виде суперпозиции синусоидальных плоских волн [6]

$$a(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} A_0(u, v) [i2\pi(ux + vy + wz)] dudv, \quad (3)$$

$$b(X, Y, Z) = \iint_{-\infty}^{\infty} B_0(U, V) [i2\pi(UX + VY + WZ)] dUdV, \quad (4)$$

где

$$w = \sqrt{k^2 - u^2 - v^2} = k \cos \psi, \quad (5)$$

$$W = \sqrt{K^2 - U^2 - V^2} = K \cos \Psi, \quad (6)$$

ψ и Ψ — углы между векторами $\mathbf{k} = (u, v, w)$ и $\mathbf{K} = (U, V, W)$ и осями z и Z соответственно. Отметим еще, что $d_1 = 1/u$, $d_2 = 1/v$, $D_1 = 1/U$, $D_2 = 1/V$ — периоды, которые создают плоские волны вдоль осей x, y, X, Y соответственно.

Вставив (3) и (4) в (1) и используя свойства преобразования Фурье, найдем

$$B_0(U, V) = H_0 N_1 N_2 A_0(u, v), \quad (7)$$

при условии

$$\frac{D_1}{d_1} = \frac{u}{U} = N_1, \quad \frac{D_2}{d_2} = \frac{v}{V} = N_2. \quad (8)$$

Полученный результат означает, что для осуществления подобия (1) необходимо, чтобы любая плоская волна пространства объектов

$$a \exp [i2\pi(ux + vy + wz)] \quad (9)$$

отображалась плоской волной

$$b \exp [i2\pi(UX + VY + WZ)] \quad (10)$$

в пространстве изображений, т. е. система должна быть телескопической.

Равенства (8) показывают, что отношение периодов, которые создают указанные волны по осям X и x и также Y и y , должны равняться соответствующим постоянным увеличениям, наконец, постоянными должны быть отношения модулей амплитуд и сдвиг фаз в сопряженных точках плоскостей $z=Z=0$, так как в этих точках, согласно (2) и (8),

$$ux + vy = UX + VY.$$

Равенства (8) представляют обобщенную формулировку условия Аббе, они сводятся к обычной форме синусов при 1) $u=0, v \neq 0$, 2) $u \neq 0, v=0$, 3) $N_1 = N_2 = N$.

Действительно, в последнем случае из (5), (6) и (8) следует

$$N^2 = \frac{u^2 + v^2}{U^2 + V^2} = \frac{k^2 \sin^2 \psi}{K^2 \sin^2 \Psi},$$

откуда¹

¹ Закон преломления Снелля можно рассматривать как частный случай условия Аббе, так как на плоскости раздела двух сред выполняется граничное условие типа (1) с увеличением $N=1$, а параметр μ принимает смысл относительного коэффициента преломления.

$$\mu N \sin \Psi = \sin \psi,$$

где $\mu = k/K$.

Допустим теперь, что параметры H_0 в (7) есть функции пространственных частот $u = N_1 U$, $v = N_2 V$

$$H_0 = |H_0(u, v)| \exp [i\varphi_0(u, v)]. \quad (11)$$

Она выполняет роль частотной характеристики при переходе от поля комплексных амплитуд плоскости $z=0$ к полю амплитуд плоскости $Z=0$. Идеальное равенство (1) теперь нарушается.

По аналогии с характеристиками линейного четырехполюсника [7] модуль $|H_0(u, v)|$ можно рассматривать как амплитудно-частотную характеристику. У реальных систем она обычно монотонно спадает до нуля с увеличением u и v и влияет только на разрешающую способность.

Аргумент $\varphi_0(u, v)$ играет роль фазово-частотной характеристики. Как показано ниже, она определяет плоскость фокусировки и аберрации.

Уравнения (7), (8) и (11) представляют математическую модель обобщенной оптической системы, удовлетворяющей условию Аббе, или просто модель Аббе.

В уравнениях (3) и (4) волновая природа света проявляется только множителями $\exp i2\pi w z$ и $\exp 2\pi W Z$, по терминологии [5] это частотные характеристики участков свободного пространства протяженностью z и Z .

Из (4) получается, что спектры распределений $a(x, y, z)$ при $z=0$ и при $z \neq 0$ связаны соотношением

$$A_z(u, v) = A_0(u, v) \exp i2\pi w z, \quad (12)$$

и аналогично

$$B_Z(U, V) = B_0(U, V) \exp i2\pi W Z. \quad (13)$$

Отсюда следует, что отношение между спектрами (7) не может повториться с той же характеристикой $H_0(u, v)$ при других значениях z и Z . Поэтому не может повториться в других плоскостях и подобие типа (1) для распределения комплексных амплитуд; т. е. волновая природа света допускает подобие в плоскостях, но не допускает подобие в объемах. Исключение возможно только в случае равенства упомянутых характеристик $\exp i2\pi w z = \exp i2\pi W Z$, или, учитывая (5), (6) и (8), если $z \sqrt{k^2 - N_1^2 U^2 - N_2^2 V^2} = Z \sqrt{K^2 - U^2 - V^2}$ при любых U и V , для чего необходимо, чтобы

$$N_1 = N_2 = k/K = Z/z. \quad (14)$$

Полученный результат совпадает с теоремой Максвелла, установленной для обычных оптических систем на основании законов геометрической оптики, но путем более сложных рассуждений [8].

Рассмотрим нарушение объемного подобия в распределении комплексных амплитуд для модели Аббе.

Используя в (13) (7), (11) и (12), получим

$$B_Z(U, V) = N_1 N_2 H_{ZZ}(u, v) A_z(u, v), \quad (15)$$

где обозначена функция

$$H_{ZZ}(u, v) = |H_0(u, v)| \exp [i2\pi(u, v) + i\varphi_0(WZ - wz)],$$

играющая роль частотной характеристики, связывающей спектр распределения амплитуд произвольной плоскости $z = \text{const}$ пространства объектов со спектром распределения амплитуд произвольной плоскости $Z = \text{const}$ в пространстве изображений. Обратим внимание, что

$$|H_{ZZ}(u, v)| = |H_0(u, v)|$$

при $k^2 \gg u^2 + v^2$, $K^2 \gg U^2 + V^2$, т. е. амплитудно-частотная характеристика не зависит от расположения плоскостей z и Z .² От расположения их зависит только фазово-частотная характеристика

² Здесь не учитывается влияние конечного размера апертурной диафрагмы.

$$\varphi_{zZ}(u, v) = \varphi_0(u, v) + 2\pi(WZ - wz). \quad (16)$$

Принимаем, что система имеет ось симметрии, т. е. $N_1 = N_2 = N$ и $\varphi_0(u, v) \rightarrow \varphi_0(s^2)$, где $s^2 = u^2 + v^2 = N^2(U^2 + V^2)$.

Разложим (16) в ряд Тэйлора по степеням s^2

$$\begin{aligned} \varphi_{zZ}(u, v) = & \varphi_0(0) + 2\pi(KZ - kz) + \left[\varphi_0'(0) + 2\pi\left(\frac{z}{k} - \frac{Z}{N^2K}\right) \right] s^2 + \\ & + \left[\frac{1}{2} \varphi_0''(0) + \frac{\pi}{4}\left(\frac{z}{k^3} - \frac{Z}{N^4K^3}\right) \right] s^4 + \left[\frac{1}{6} \varphi_0'''(0) + \frac{\pi}{8}\left(\frac{z}{k^5} - \frac{Z}{N^6K^5}\right) \right] s^6 + \dots \end{aligned} \quad (17)$$

Всегда можно так выбрать z и Z , чтобы коэффициенты при s^2 и s^4 обратились в ноль.

Если в эти плоскости перенести начала координат, то (17) приводится к виду

$$\begin{aligned} \varphi_{zZ}(u, v) = & \varphi_0(0) + 2\pi(KZ - kz) + 2\pi\left(\frac{z}{k} - \frac{Z}{N^2K}\right) s^2 + \frac{\pi}{4}\left(\frac{z}{k^3} - \frac{Z}{N^4K^3}\right) s^4 + \\ & + \left[\frac{1}{6} \varphi_0'''(0) + \frac{\pi}{8}\left(\frac{z}{k^5} - \frac{Z}{N^6K^5}\right) \right] s^6 + \dots \end{aligned} \quad (18)$$

где $\varphi_0(s^2)$ обозначает новую функцию.

Минимальные искажения подобия получаются между плоскостями $z=Z=0$, когда отклонения $\varphi_{zZ}(u, v)$ от постоянной выражаются только членами 6-го и следующих порядков относительно s^2 . Эти отклонения описывают абберации, которые сказываются на передаче мелких деталей.

При произвольном z всегда можно так выбрать Z , чтобы обращался в ноль коэффициент при s^2 в (18). Это имеет место, если

$$Z = N^2 \frac{K}{k} z, \quad (19)$$

и тогда (18) принимает вид

$$\begin{aligned} \varphi_{zZ}(u, v) = & \varphi_0(0) + \frac{2\pi z}{k}(N^2K^2 - k^2) + \frac{\pi z}{4k}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{N^2K^2}\right) s^4 + \\ & + \left[\frac{1}{6} \varphi_0'''(0) + \frac{\pi z}{8k}\left(\frac{1}{k^4} - \frac{1}{N^4K^4}\right) \right] s^6 + \dots \end{aligned} \quad (20)$$

т. е. для произвольных сопряженных плоскостей, связанных уравнением (19), отклонение фазово-частотной характеристики от постоянной выражается членами 4-го и следующих порядков, но величина их возрастает с увеличением z .

Если воспользоваться допуском Релея на волновую абберацию $\lambda/4$ для высококачественных оптических систем [8] и считать, что в (16) основной вклад в абберации вносит третий член, то получим

$$zs^4 \left| \frac{1}{k^2} - \frac{1}{N^2K^2} \right| \ll 2k, \quad (21)$$

т. е. максимальное расстояние z и ширина спектра s ограничивают друг друга. Например, для микрообъектива с апертурным числом $\sin \phi = 0.2$, увеличением $N \gg 1$ при $\lambda = \Lambda = 0.5$ мкм из (21) с учетом того, что $s = k \sin \phi$, получается $|z| \ll 0.3$ мм.

Как видно из (21) с уменьшением $|(1/k^2) - (1/N^2K^2)|$ диапазон допустимых значений z и s увеличивается и при $k = NK$, что совпадает с (14), ограничения исчезают.

Заметим, что при этом в (20) исчезает зависимость от z , т. е. абберации во всех сопряженных плоскостях носят одинаковый характер.

Фурье-преобразование от левой и правой частей (15) приводит к равенству

$$b(X, Y, Z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_{zZ}(x', y') a(x - x', y - y', z) dx' dy', \quad (22)$$

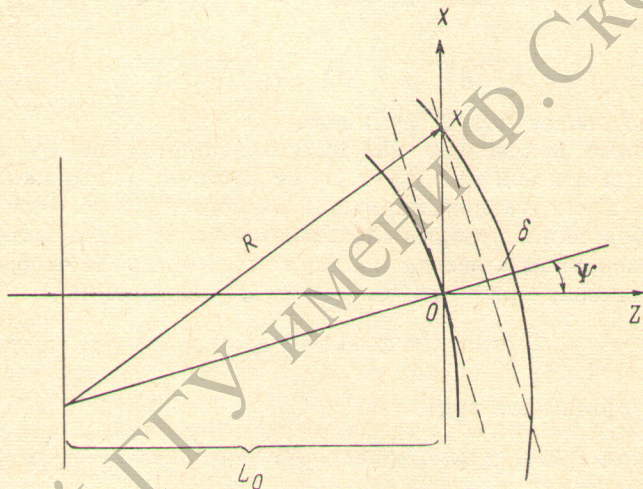
где

$$h_{zZ}(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} H_{zZ}(u, v) \exp [i2\pi (ux + vy)] dudv$$

отклик в плоскости Z на точечное воздействие (дельта-функцию) в плоскости z .

С помощью (22) легко показать, что сдвиг поля объекта $a(x, y, z)$ в плоскости z приводит к соответствующему сдвигу поля изображения, т. е. модель Аббе обладает свойством инвариантности к сдвигу для любых плоскостей (z и Z).

Из типов aberrаций Зайделя [8] свойством инвариантности обладает только сферическая, таким образом, получается в более общей форме из-



вестное положение [1], что при выполнении условия Аббе может наблюдаться только сферическая aberrация.

3. Модель Гаусса—Аббе. Обычно при анализе aberrаций фронт реальной волны сравнивается с фронтом идеальной сферической волны — оперной сферой Гаусса [8]. Подобный анализ и особенно анализ искажений, которые вносятся неинвариантными aberrациями, можно производить сравнением реальной волны с идеальной плоской волной, удовлетворяющей условию Аббе.

Для иллюстрации обратимся к модели, которая, как и модель Гаусса, имеет фокальную поверхность, т. е. плоские волны (9) преобразуют в сферические. Пропорциональность (1) теперь может сохраниться только для пары сопряженных точек, например $x=y=0$ и $X=Y=0$. Так, в частности, получится, если в идеальной модели Аббе каждую плоскую волну (10) заменить сферической таким способом, чтобы в точке $X=Y=Z=0$ фронты обеих волн соприкасались, как показано на рисунке, а амплитуды и фазы были равны.

В получившейся модели выполняется условие Аббе в форме синусов для лучей, проходящих через указанные сопряженные точки. В сущности все обычные выводы и формулировки условия Аббе относятся к такому точечному случаю [8], поэтому данную модель можно назвать моделью Гаусса—Аббе.

Аберрации в этой модели носят неинвариантный характер, оценим их величину. Допустим, что в точке $X=Y=Z=0$ модели Аббе (не обязательно идеальная) и Гаусса—Аббе создают, как принято было выше, одинаковый отклик. Однако в точке $X \neq 0$ фазы плоской волны и заменившей ее сфери-

ческой будут различаться, так как фронт последней, чтобы достигнуть точку $X \neq 0$, должен сместиться больше, чем фронт плоской на расстояние

$$\delta \approx \frac{X^2 \cos^2 \Psi}{2R},$$

где Ψ — угол между осью Z и нормалью к фронту плоской волны, $R \approx \approx L_0 / \cos \Psi$ — радиус фронта сферической волны, проходящей точку $X \neq 0$, L_0 — расстояние от фокальной плоскости до плоскости $Z=0$.

Зависимость δ от Ψ показывает, что фазовые соотношения между сферическими волнами не повторяют фазовых соотношений плоских волн. Наибольшее расхождение получается между волнами, для которых $\Psi=0$ и $\Psi=\Psi_{\max}$, и оно возрастает с увеличением X — признак неинвариантных aberrаций.

Чтобы это расхождение не вышло за пределы допуска Релея, необходимо, чтобы

$$\delta_0 - \delta \approx \frac{X^2}{2L_0} (1 - \cos^2 \Psi) \leq \frac{\lambda}{4}. \quad (23)$$

Если $\mu N \gg 1$, то максимальная частота $S_{\max} = K \sin \Psi_{\max} \leq K$ и (23) принимает простой вид

$$|XS_{\max}| \leq \sqrt{\frac{1}{3}} K L_0. \quad (24)$$

Существование у оптической системы и, в частности, у модели Гаусса—Аббе фокальной поверхности несовместимо с существованием у нее частотных характеристик.

Это видно из того, что если плоская волна (9) создает одинаковые периодические структуры в любой плоскости $z = \text{const}$, то отображающая ее сферическая волна создает неперiodические структуры в любой плоскости $Z = \text{const}$ и поэтому ни на одной прямой этих плоскостей не получается определенной пространственной частоты. Эта величина при таких условиях используется только в приближенном смысле на малых участках, ограниченных той или иной степенью точности, например (24) для модели Гаусса—Аббе.

Заметим, что в пределах последних приближений модель Гаусса—Аббе совпадает с моделью Гаусса.

Литература

- [1] А. И. Тудоровский. Теория оптических приборов. Изд. АН СССР, М., 1937.
- [2] А. Я. Лернер. Начала кибернетики. «Наука», М., 1967.
- [3] В. С. Владимиров. Уравнения математической физики. «Наука», М., 1976.
- [4] А. Маршалль, М. Франсон. Структура оптического изображения. «Мир», М., 1964.
- [5] Х. Колфилд, С. Хорвиц, У. Уинкл. ТИИЭР, 65, 5, 1977.
- [6] В. А. Зверев. Радиооптика. «Сов. радио», М., 1975.
- [7] И. С. Гоноровский. Радиотехнические цепи и сигналы. «Сов. радио», М., 1977.
- [8] М. Борн, Э. Вольф. Основы оптики. «Наука», М., 1970.

Поступило в Редакцию 11 июля 1978 г.