

2 Верба, В. С. Перспективные технологии цифровой обработки радиолокационной информации космических РСА / В. С. Верба. – Москва : «Радиотехника», 2019. – 416 с.

3 Егорычев, В. С. Теория, расчёт и проектирования ракетных двигателей: учеб. пособие / В. С. Егорычев. – Самара : СГАУ, 2011. – 142 с.

УДК 519.22

А. С. Кожемякин

К ВОПРОСУ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ В КЛАССИЧЕСКОМ ОРИГАМИ

Статья посвящена обзору основных математических понятий и теорем, которые лежат в основе оригами. Приводятся доказательства теорем, описывающих ключевые принципы оригами, в частности, плоского моделирования, и ряд следствий, которые получены в [1]. Также уделяется внимание связи математической теории оригами и теории графов, которая позволяет абстрагировать материальные примеры и использовать исключительно математический аппарат для исследований.

Оригами – это древнее искусство складывания бумаги без использования операций разрезания и склеивания. Даже если ограничиться складыванием одного листа бумаги, результаты зачастую поражают. Люди, не имеющие отношения как к математике, так и к оригами, интуитивно связывают оригами с геометрией. Несмотря на это, математика оригами остается довольно неизученной. Продвинутые оригамисты предоставили некоторые результаты, особенно в разработке методов для создания все более сложных и реалистичных моделей. Но сделано очень мало для простого математического представления оригами. В статье рассмотрены некоторые результаты, полученные в статье [1], касающиеся плоского оригами.

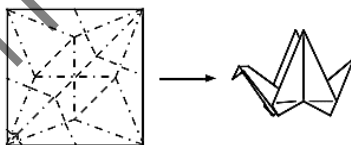


Рисунок 1 – Схема (Паттерн) для складывания оригами

При исследовании оригами схема складок (далее – паттерн) модели является основным инструментом. На рисунке 1 показан традиционный японский журавль со схемой складок, который может служить инструкцией для создания модели. Эти шаблоны складок используют два различных типа пунктирных линий для представления двух типов складок: горные складки нарисованы пунктирной линией с точкой, а складки долины нарисованы пунктирной линией (рисунок 2). Поскольку любой, кто знаком со складыванием бумаги, имеет четкое представление о том, каким должно быть оригами, было создано определение, которое пытается смоделировать физическую ситуацию складывания бумаги.

Определим модель оригами парой (C, f) , где C – набор линий в единичном квадрате $[0, 1] \times [0, 1]$, который содержит складки, и f является функцией $f: C \rightarrow (-\pi, \pi)$, которая указывает, как далеко и в каком направлении каждая складка складывается. Эта пара (C, F) , таким образом, определяет функцию из квадрата $[0, 1] \times [0, 1]$ в R^3 , и для того, чтобы гарантировать что функция не требует разрыва бумаги, функция должна быть инъективной.

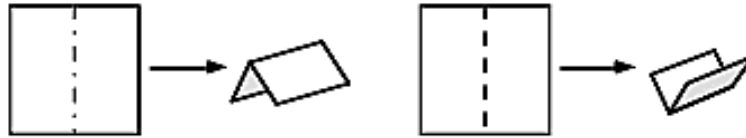


Рисунок 2 – Два вида складок

Определение 1: Модель оригами – это пара (C, F) , где C – множество складок, а $f: C \rightarrow (-\pi, \pi)$, таким образом, отображение (C, f) инъективно переводит $[0, 1] \times [0, 1]$ в R^3 .

Для линии сгиба l_1 , условие $f(l_1) > 0$ означает, что l_1 является долиной, а $f(l_1) < 0$ означает, что l_1 – гора. На рисунке 3 показана модель оригами, которая переводит квадрат в трехмерный «угол».

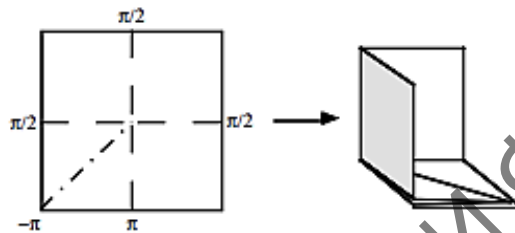


Рисунок 3 – Результат складывания

Рассмотрим модели оригами, которые могут быть сложены плоско. В таких моделях интуитивно считается, что каждая складка имеет π или $-\pi$ радиан, но на самом деле этого не происходит, так как приведет к отображению, которое не будет инъективным.

Определение 2: Плоская модель оригами – это такая модель, в которой каждая складка-долина имеет предел, равный π радиан, и каждая складка-гора имеет предел, равный $-\pi$ радиан, и модель оригами все еще не имеет разрывов (то есть отображение является инъекцией).

Основное требование, заключается в том, что все складки должны быть сложены без самопересечения бумаги. Опираясь с физическими объектами, этим требованием можно пренебречь, но теоретически оно должно быть учтено. Так как в плоском оригами угол каждой складки определяет, является ли она «горой» или «долиной», мы можем описать плоскую оригами парой (C, f) , где C является паттерном и $f: C \rightarrow \pm 1$ определяет соотношение складок.

Исследуем, что может быть сказано о наборе складок (паттерне), окружающем отдельную вершину в плоском оригами. Вершина означает точку, где линии сгиба встречаются внутри квадрата. В связи с этим считаем, что единичный диск D является носителем складок, а плоская модель оригами (C, f) имеет радиальные складки с единственной вершиной в начале координат (рисунок 4).



Рисунок 4 – Единичный диск

Теорема 1 (Теорема Мазкавы). Пусть M обозначает число горных складок в C , а V – количество складок долины. Тогда $M - V = \pm 2$.

Доказательство. Рассмотрим единичный диск D после того, как он сложен. Одна вершина в паттерне будет углом на этой сложенной фигуре. Если мыотрежем эту точку, то получается полигональное сечение сложенной бумаги (рисунок 4). Поскольку это плоское оригами, все внутренние углы этого многоугольника будут либо 0, или 2π радиан. Теперь горные складки C соответствуют 0 углам многоугольника, а складки долины соответствуют 2π углам. Обозначим n число складок в C (что равно числу сторон полученного многоугольника), сумма внутренних углов многоугольника равна $(n - 2)\pi$. Но так как $n = M + V$, имеем $M + 2\pi V = (M + V - 2)\pi$, отсюда $M - V = 2$. Здесь предполагается, что вершина указывала «вверх» в сложенном состоянии. Если бы вершина указывала «вниз», то аналогично $V - M = 2$.

Таким образом, $M - V = \pm 2$.

Следствие 1. Количество складок в C всегда четное.

Доказательство. Если n – число складок в C и $M - V = 2$, то

$$n = M + V = M - V + 2V = 2(1 + V).$$

Аналогично, если $V - M = 2$.

Следствие 2. Если рассматривать модель складок оригами как граф, то каждая плоско складываемая модель оригами будет иметь хроматическое число, равное 2.

Доказательство. Предыдущее следствие показывает, что каждая вершина имеет четную степень, за исключением возможных вершин по краям квадрата. Существует четное число из таких краевых вершин, поэтому мы можем создать новую вершину за пределами квадрата и соединить эту вершину с каждой боковой вершиной нечетной степени. Полученный граф является эйлеровым, таким образом, имеет хроматическое число, равное 2, что дает нам желаемую окраску для паттерна. Последнее заключение любопытно тем, что оно демонстрирует соотношение сегментов в паттерне при плоском складывании. Если мы раскрасим сегменты красным и синим, то финальная плоская сложенная фигура будет иметь все красные сегменты, направленные в одном направлении, а синие сегменты – в другом.

Далее рассмотрим свойства углов между складками в нашем плоском оригами C . Если C имеет $2n$ складок, обозначим углы между складками через $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n}$.

Теорема 2 (о сумме углов). Сумма углов, сходящихся в одной вершине в C равна π .

Доказательство: пусть γ – простая замкнутая кривая в D вокруг вершины C . Если мы свернем D , используя складки в C и следуют γ на этой сложенной форме, видим, что каждый раз γ встречается с линией сгиба, и необходимо изменить наше направление движения по γ . В результате возвращаемся к тому, с чего начали на γ , и это подразумевает, что (рисунок 5):

$$\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 + \dots - \alpha_{2n} = 0. \quad (1)$$

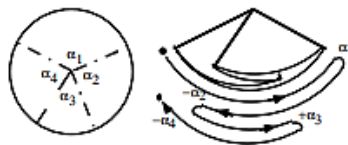


Рисунок 5 – Следование по кривой γ

С другой стороны, $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{2n} = 2\pi$.

Складывая эти два выражения, дает $\alpha_1 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{2n} - 1 = \pi$. Это означает, что $\alpha_2 + \alpha_4 + \dots + \alpha_{2n} = \pi$.

Результат теоремы не только необходим для плоского оригами, но и достаточен. Из теоремы 2 следует, что вывод может ли набор складок использоваться для создания локально плоского оригами, зависит только от углов вокруг каждой вершины, а не от расположения горных или долинных складок. Имея это в виду, предположим, что $C = \{ l_1, \dots, l_{2n} \}$ является набором радиальных линий в единичном диске D . Говорим, что C генерирует плоское оригами, если существует функция $f: C \rightarrow \{ \pm 1 \}$ такое, что (C, f) является плоским оригами.

Теорема 3 (о плоском условии) Пусть $C = \{ l_1, \dots, l_{2n} \}$ – набор радиальных линий в единичном круге. И диск D такой, что углы между этими линиями $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n}$. И пусть $\alpha_1 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{2n} - 1 = \alpha_2 + \alpha_4 + \dots + \alpha_{2n} = \pi$. Тогда C генерирует плоский оригами.

Доказательство. Из условия теоремы следует, что для углов справедливо (1), и это показывает, что, по крайней мере, касаясь углов, диск D можно сложить плоско, используя складки в C . Все, что остается показать, это то, что подходящее расположение горных и долинных складок в C существует, то есть существует функция f , которая сгенерирует действительно плоскую модель оригами.

Пусть l_1 будет долиной, затем пусть l_2 и l_{2n} будут горы, тогда пусть l_3 и l_{2n-1} будут долинами, затем следующие две горы и так далее. Необходимо разрезать вдоль складки l_{n+1} и сложить диск в то, что называется сложить «гармошкой» (рисунок 6). Поскольку уравнение (1) выполнено, то два свободных конца, которые были l_{n+1} , будут выстраиваются в линию, когда другие складки сложены. При удачном выборе складок других слоев бумаги не будет между этими свободными концами, и тогда они могут быть склеены вместе, завершая сгиб (рисунок 6). При неудачном наборе складок между свободными концами будут слои бумаги, должна использоваться стратегия, подобная той, что показана на рисунке 7. Идея состоит в том, чтобы полностью изменить складку, которая выступает в крайнее левое или правое положение в согнутом состоянии. Эта операция соединит свободные концы вместе, которые затем могут быть склеены. Конкретное назначение складок l_{n+1} будет зависеть от того, является ли n четным или нечетным.

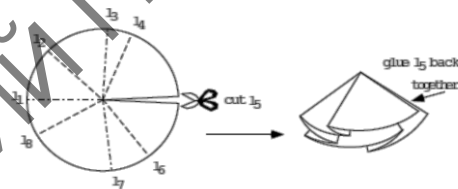


Рисунок 6 – Пример распределения горных и долинных складок

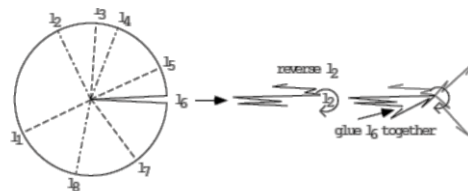


Рисунок 7 – Альтернативный пример распределения складок

Литература

1 Thomas, C. H. On the Mathematics of Flat Origamis [Electronic resource] / C. H. Thomas // *Congressus numerantium: Utilitas Mathematica Publishing Inc.* – P. 215–224. – Mode of access : https://www.researchgate.net/profile/Thomas_Hull/publication/2357716_On_the_Mathematics_of_Flat_Origamis/links/53f47f410cf22be01c3ec6b9.pdf. – Date of access : 30.04.2020.