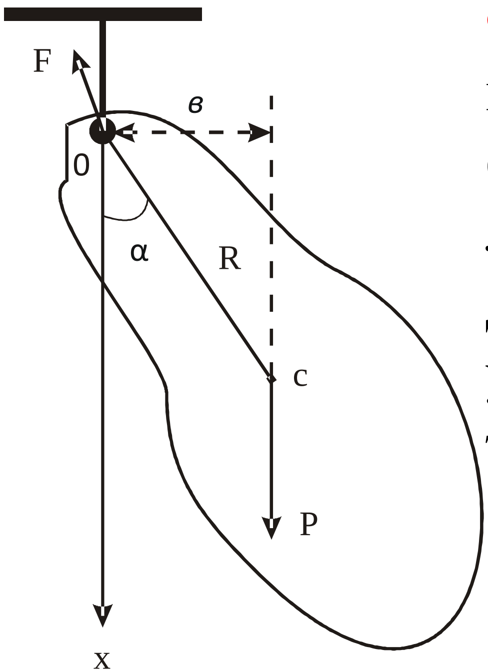
ЛЕКЦИЯ 9

Колебания

1Физический и математический маятники.
2 Уравнение затухающих колебаний.

3 Уравнение вынужденных колебаний. Резонанс

Физический маятник

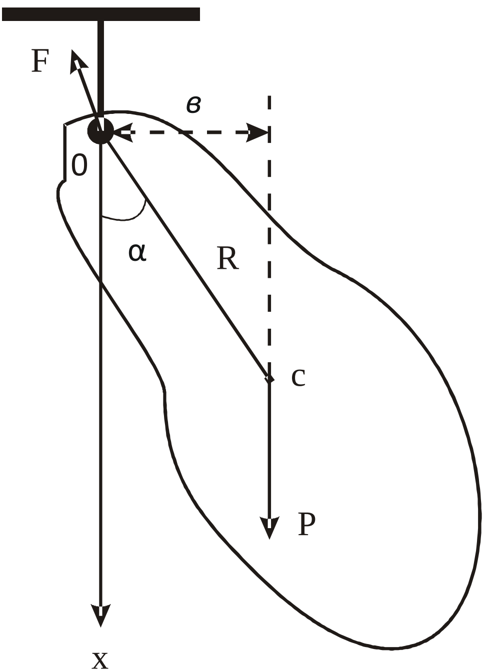


Физическим маятником называется твердое тело, которое может колебаться вокруг горизонтальной оси (возможно только при условии, что центр масс тела не лежит на этой оси). Т.е. нужен ненулевой момент сил. Движение такого маятника можно описать основным уравнением динамики для вращательного движения тела:

$$I\beta = \sum \mathbf{N}_{\text{вн е ш}}$$

где I – момент инерции маятника относительно горизонтальной оси вращения через точку О. Внешних сил здесь две: сила **F** упругого происхождения (изгибает ось), действующая на маятник со стороны оси в точке 0 и сила тяжести **P**, приложенная в центре масс. Величина и направление силы **F** нам неизвестны, но это неважно, так как она проходит через ось вращения и поэтому ее момент равен нулю (плечо равно нулю).

Физический маятник



Момент силы тяжести:

$$N = [RP] = -\mathbf{Rmgsin\alpha} = -\mathbf{P}\mathit{в}$$

где *в* = Rsinα - плечо силы тяжести. Знак «минус» означает, что при α >0, то есть при отклонении против часовой стрелки момент силы вызывает вращение по часовой стрелке (в направлении противоположном первоначальному отклонению). Т.е момент силы тяжести действует аналогично квазиупругой силе –kx . Итак, получаем:

$$\mathbf{I\,\alpha'' = -mgRsin\alpha}$$

При малых α (при α <<1 в радианной мере) sinα ≈ α и

$$\alpha'' + \omega^2\alpha = 0 \;, \quad \text{где} \quad \omega^2 = \frac{mgR}{I}$$

R- расстояние от оси вращения до центра масс

Физический маятник

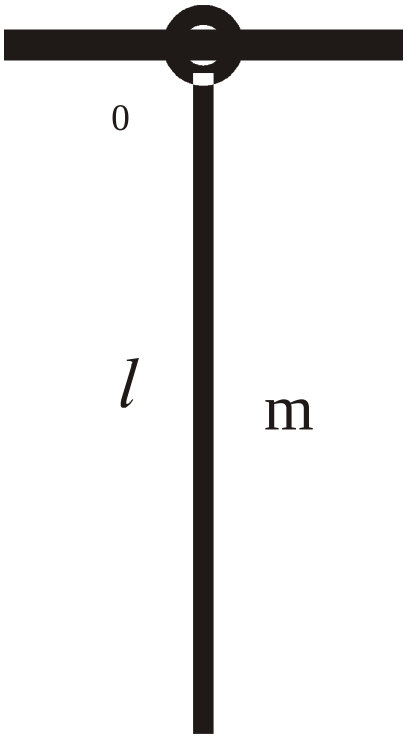
В результате имеем дифференциальное уравнение гармонических колебаний, решением которого как нам уже известно является функция:

$$\alpha\,(t) = A\sin(\omega t+\varphi)$$

где циклическая частота $$\omega = \sqrt{\frac{mgR}{I}}$$

а период колебаний $$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgR}}$$

Колебания однородного стержня



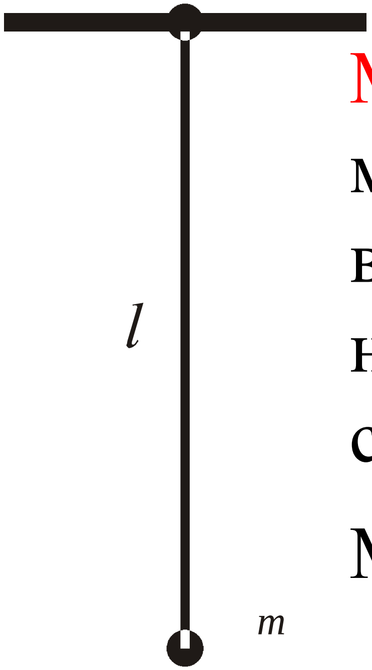
Найдем, для примера, частоту колебаний однородного стержня, качающегося на оси, проходящей через его край.

По теореме Штейнера момент инерции стержня относительно оси 0 равен:

$I = I_0 + md^2 = \frac{1}{12} ml^2 + m(l/2)^2 = \frac{1}{3} ml^2.$

$$\omega = \sqrt{\frac{mgR}{I}} = \sqrt{\frac{mg\frac{l}{2}}{\frac{1}{3}ml^2}} = \sqrt{\frac{3g}{2l}} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Математический маятник



Математическим маятником называется тело, массу которого можно считать сосредоточенной в одной точке, подвешенное на невесомой, нерастяжимой нити. Он оказывается частным случаем физического маятника.

Момент инерции материальной точки $I = ml^2$

$$\omega = \sqrt{\frac{mgR}{I}} = \sqrt{\frac{mgl}{ml^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Т.е. из- за разного характера распределения массы есть отличие в частоте колебаний математического маятника и стержня той же длины и массы.

Математический и физический маятники

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgL}}.$$

Приведённая длина — это условная характеристика физического маятника. Она численно равна длине математического маятника, период которого равен периоду данного физического маятника.
Приведённая длина вычисляется следующим образом:

$$l = \frac{I}{ma}$$

где I — момент инерции относительно точки подвеса, m — масса, a — расстояние от точки подвеса до центра масс.

Период колебаний математического маятника зависит от его длины и ускорения силы тяжести и не зависит от массы груза.

Измерив период колебаний маятника, можно определить ускорение свободного падения g в данном месте.

Частота собственных колебаний зависит только от свойств системы

(ω_0^2 = k/m для математического и ω_0^2 = mgR/I для физического маятников),

Затухающие колебания

- Если нельзя пренебрегать сопротивлением среды при записи 2-го закона Ньютона для движения тела под действием упругой силы, то его надо дополнить некоторой функцией, отражающей свойства сил сопротивления (сил трения).
- Например, если тело все время движется в жидкости с малыми скоростями, то сила трения пропорциональна скорости и второй закон Ньютона записывается так:

$$m\ddot{x} = -kx - k_1\dot{x}$$

или в стандартном для дифференциальных уравнений виде :

$$\ddot{x} + \frac{k_1}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Затухающие колебания

Обозначим: $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ (как и ранее) и $\frac{k_1}{2m} = \beta$

дифференциальное уравнение затухающих колебаний:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Решение уравнений такого типа в математике хорошо известно и в нашем случае выглядит так:

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi) = A(t)\sin(\omega t + \varphi)$$

Заметим, что здесь фигурирует не собственная частота колебаний ω_0 , а частота ω , которая зависит от коэффициента затухания β:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

Частота свободных колебаний зависит как от свойств системы (ω_0), так и от величины потерь энергии (β)

Декремент затухания

- Быстроту затухания описывают также с помощью декремента затухания или с помощью логарифмического декремента затухания. Декрементом затухания Δ называют отношение двух последовательных амплитуд:

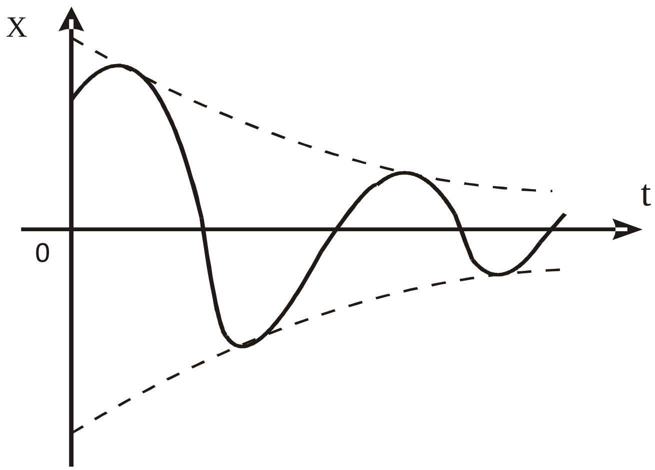
$$\Delta = \frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\beta T}$$

- Логарифмическим декрементом затухания δ называют натуральный логарифм обычного декремента затухания:

$$\delta = ln\Delta = \beta T$$

- если величина β фиксирована, то величина δ прямо пропорциональна периоду колебаний. Например, если $\delta=0.01$ то амплитуда уменьшится в *e* раз после 100 колебаний. Быстроту затухания колебаний определяется $\beta = \delta/T$.
- Добротность системы Q. При больших добротностях $\delta \approx \pi/Q$

Апериодическое движение



В результате учета сопротивления среды получаются синусоидальные колебания с убывающей по экспоненте амплитудой. При очень больших коэффициентах затухания, то есть при $\beta > \omega_0$ под корнем

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

стоит отрицательная величина и колебаний не возникает. Система приходит в равновесие асимптотически, то есть не пересекая горизонтальную ось времени (называется апериодическим).

Величина $\tau = 1/\beta$ называется временем релаксации. За время τ отклонение от положение равновесия уменьшается в e ≈ 2.73 раз

Добротность

$$Q = \pi/\lambda = \pi N_e$$

добротность колебательной системы – пропорциональна числу колебаний Ne, совершаемых системой за то время τ , за которое амплитуда колебаний уменьшается в **e** раз

Полная энергия колеблющейся системы

$\omega = \omega_0^2 - \delta^2$

$$E = k\frac{x^2}{2} + m\frac{\dot{x}^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 x_m^2}{2}$$

$$x_m = A_0 \exp(-\delta t)$$

$$\frac{dE}{dt} = -2\delta E$$

Убыль энергии за 1 период

$$\frac{dE}{dt} \approx \frac{\Delta E}{\Delta T} \approx \frac{\Delta E}{T} \approx -2\delta E_T$$ энергия за 1 период

$$\frac{\Delta E}{E_T} \approx -2\delta E_T \approx 2\lambda$$

Q=π/λ

$$\frac{\Delta E}{E_T} \approx \frac{2\pi}{Q}$$

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{\Delta E}{E_T}\right)$$

относительная потеря энергии за период

При слабом затухании колебаний добротность пропорциональна отношению энергии, запасенной в системе в данный момент к убыли этой энергии за один период колебаний. Малое затухание δ →большая добротность → относительно малые потери энергии.

Вынужденные колебания

• Колебания, происходящие в системе под действием периодически изменяющейся силы, называются вынужденными.

• Пусть тело колеблется под действием упругой силы и на него действует внешняя сила :

$$F_{внеш}(t) = F_0 \sin\Omega t$$

учитывая используемые выше уравнения, второй закон Ньютона запишем в виде:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_o}{m}\sin\Omega t$$

Подобные уравнения описывают широкий спектр процессов вплоть до описания движения доменных стенок в магнитных материалах, где m эффективная масса доменной стенки.

Вынужденные колебания

• Опыт показывает, что если вынуждающая сила действует достаточно долго, то груз колеблется с частотой вынуждающей силы Ω и с постоянной амплитудой. Поэтому можно предположить, что раз вынуждающая сила гармоническая, то и установившиеся колебания также будут гармоническими:

$$x = A\sin(\Omega t + \varphi)$$

Частота вынужденных колебаний равна частоте вынуждающей силы

• Надо найти амплитуду A и начальную фазу φ этого колебания. Для этого можно взять первую и вторую производную x подставить все в уравнение движения. Если произвести ряд громоздких преобразований, то можно получить следующие соотношения:

Амплитуда и фаза

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}$$

$$tg\,\varphi = \frac{-2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

Разность фаз колебаний вынуждающей силы и груза φ :

$$\varphi = arctg\,\frac{2\beta\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2}$$

- Прямой подстановкой можно убедиться, что это решение удовлетворяет исходному уравнению движения.
- В полученном решении и амплитуда, и фаза зависят от частоты вынуждающей силы.

Резонанс

Есть **зависимость амплитуды от частоты и** значит при некоторой частоте возможна максимальная амплитуда. Это будет тогда, когда знаменатель в выражении движения достигнет минимума. Чтобы найти минимум, приравняем нулю производную по частоте Ω знаменателя:

$$2(\omega_0^2 - \Omega^2)(-2\Omega) + 8\beta^2\Omega = 0$$

Это кубическое уравнение имеет, естественно, три корня:

$$\Omega_1 = 0 \qquad \text{и} \qquad \Omega_{2,3} = \pm\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

Это есть точки экстремума знаменателя. Решение $\Omega_1 = 0$ соответствует максимуму знаменателя. При этом амплитуда

$$A_0 = \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{k}$$

Резонансная частота

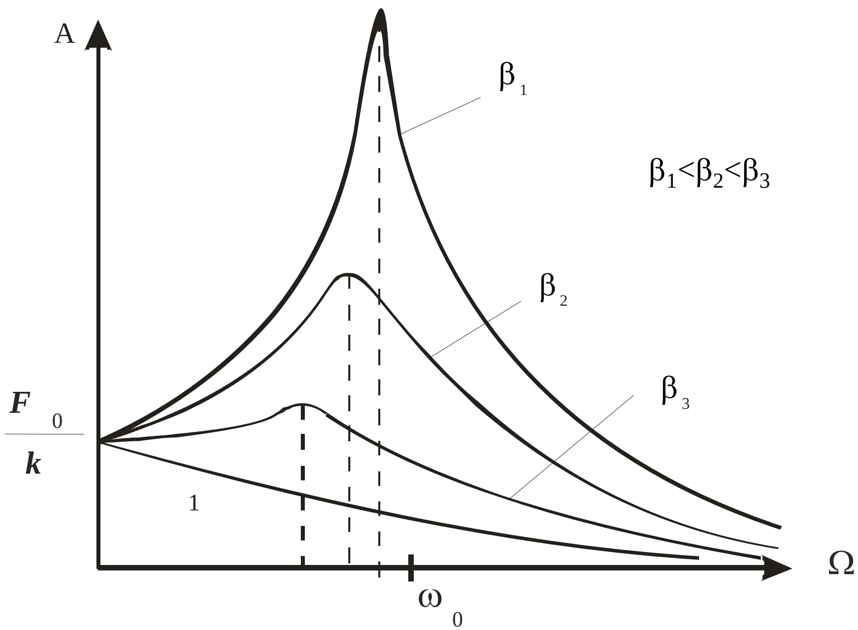
- Из двух оставшихся решений **отрицательное** отбрасываем как **не имеющее физического смысла**, так как частота отрицательной быть не может. Следовательно, амплитуда будет максимальной при следующей частоте вынуждающей силы:

$$\Omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

- Эта частота называется **резонансной**, а само явление **возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к** собственной **частоте системы называется резонансом**.

- Отметим, что **резонансная частота не совпадает с собственной** частотой колебаний системы ω_0, но близка к ней и тем ближе, чем меньше трение в системе.

Резонансные кривые



Если же трение очень велико, то есть когда $2\beta^2 > \omega_0^2$, то резонанс не наблюдается и с увеличением частоты амплитуда вынужденных колебаний монотонно убывает

При $\Omega \to \infty$ все кривые асимптотически стремятся к нулю, так как при слишком быстром изменении направления вынуждающей силы реальная физическая система не успевает заметно сместиться из положения равновесия.

Добротность показывает во сколько раз амплитуда в момент резонанса превышает смещение системы из положения равновесия под действием вынужденной силы той же величины, что и амплитуда вынуждающей силы.

(Это справедливо лишь при небольших затуханиях).

Резонанс в повседневной жизни

• Явление резонанса может наблюдаться в любых физических (и не только) явлениях. Может быть как вредным, так и полезным. Например, при **конструировании самолета** жизненно важно, чтобы собственная частота вибраций всех его частей (фюзеляж, крылья и т.п.) существенно отличалась от частот колебаний, которые могут быть возбуждены при полете, например, пропеллером и турбиной (которая крутится на определенной частоте).

• В **радиотехнике** же резонанс часто оказывается полезным: всем хорошо известно, что прием радио и телепередач основан именно на резонансе.

• **Землетрясение !** Резонансную частоту домов нужно делать подальше от частоты толчков земной коры