ЛЕКЦИЯ 7

Механика твердого тела

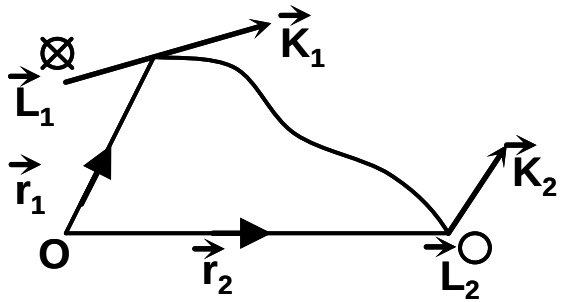
1 Основное уравнение динамики вращательного движения.

2 Момент инерции и примеры его вычисления.

3 Теорема Штейнера.

4 Понятие о тензоре моментов инерции.

Моментом любого вектора относительно некоторой точки О называют векторное произведение $[\vec{r} \times \vec{A}]$, где $\vec{r}$ -радиус вектор.



Моментом количества движения $\vec{K} = m \cdot \vec{V}$

называется вектор $\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{K}]$

проведенный из точки О в ту точку пространства, в которой находится материальная точка m

продифференцируем L по t:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}[\vec{r} \times \vec{K}] = [\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{K}] + [\vec{r} \times \frac{d\vec{K}}{dt}] = m[\vec{\upsilon} \times \vec{\upsilon}] + [\vec{r} \times \vec{F}]$$

= 0

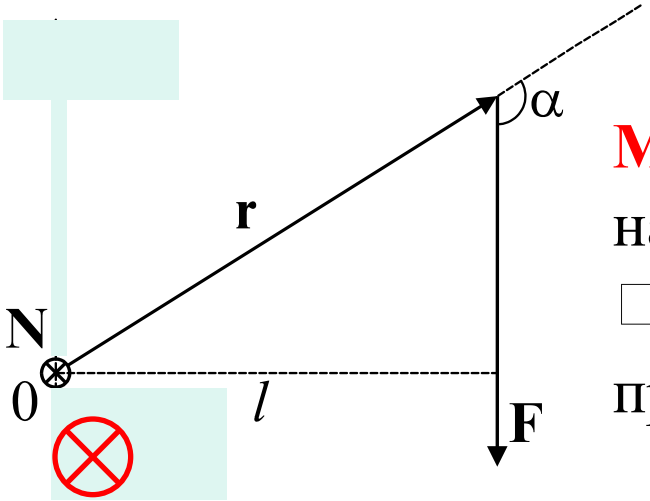
скорость V

по второму закону Ньютона равен силе F

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = [\vec{r} \times \vec{F}] = \vec{N}$$

момент силы, действующей на материальную точку с радиус – вектором $\vec{r}$

Момент силы



Моментом силы N относительно точки О называется векторное произведение радиус-вектора направленного из точки О в точку приложения силы :

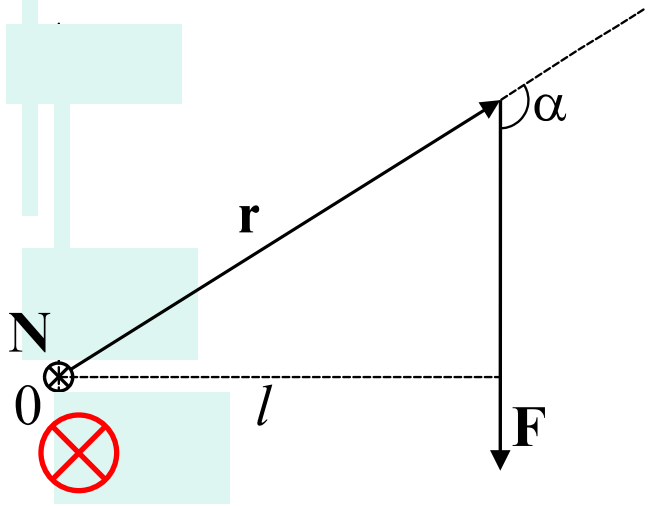
$$N = [rF]$$

Величина вектора определяется, как и для любого векторного произведения, выражением:

$$N = rF\sin\alpha$$

где α – угол между векторами r и F

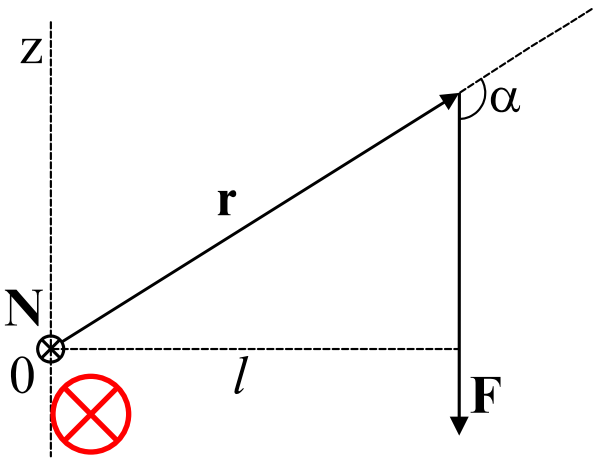
Направление момента силы



Направление вектора ***N*** определяется также в соответствии с определением векторного произведения, то есть **по правилу правого буравчика**:

расположив рукоятку буравчика (штопора) вдоль направления первого вектора в произведении (в данном случае вдоль ***r***) вращаем ее по кратчайшему направлению до совмещения с направлением второго вектора (***F***). Куда при этом будет поступательно двигаться правый буравчик (штопор), туда и направляем вектор .

Момент силы относительно оси



Пусть, векторы ***r*** и ***F*** лежат в плоскости доски. Тогда вектор ***N*** ⊥ к поверхности доски и направлен за нее, то есть входит в доску, что изображено знаком ⊗. **Длина *l*** перпендикуляра из точки на прямую вдоль действия силы называется **плечом силы** относительно точки $l = r\sin\alpha$

Проекция вектора ***N*** на некоторую ось z, проходящую через точку O, относительно которой определен ***N***, называется **моментом силы относительно этой оси:**

$$N_z = [rF]_z$$

при $z \perp N$ проекция на эту ось $N_z = 0$

Момент импульса

Для **МТ, моментом импульса относительно точки О** называется вектор

$$\mathbf{L=[r\ K] = [r,mV]}$$

Моментом импульса МТ **относительно оси** называется проекция вектора ***L*** на эту ось:

$$\mathbf{L_Z=[r\ K]_Z}$$

L системы материальных точек относительно какой-либо точки (или оси) называется сумма моментов импульсов относительно этой точки (или оси) всех материальных точек системы:

$$L=\sum_i L_i$$

Закон изменения и сохранения момента импульса

- Производная по времени момента импульса системы (относительно какой-либо точки или оси) равна сумме моментов (относительно той же точки или оси) всех внешних сил, действующих на точки системы.

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i N_{внеш}$$

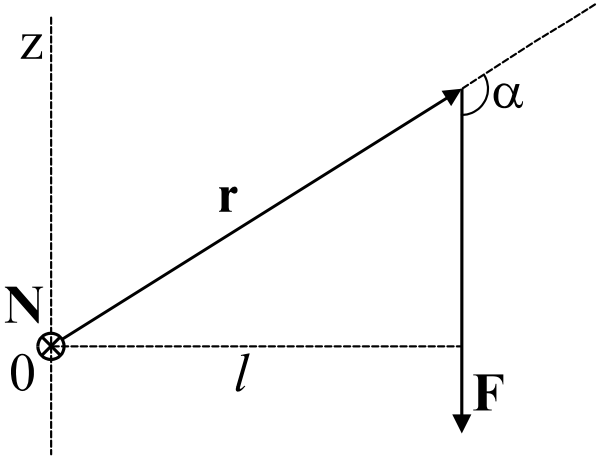
Это и есть закон изменения момента импульса или уравнение моментов. В каждый $N_{iвнеш}$ входит произведение трех величин r_i, $F_{iвнеш}$ и $\sin \alpha_I$. Если одна из них =0 то данный член вклада не дает. Один из возможных вариантов, если все $F_{iвнеш}$ =0 т.е. система замкнута , то $dL/dt = 0$ и **L = const**

- Закон сохранения момента импульса**: если сумма моментов внешних сил равна нулю, то момент импульса системы не изменяется с течением времени** (верно как относительно точки, так и оси).

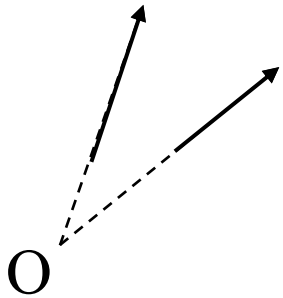
Применимость закона сохранения момента импульса

Закон сохранения момента импульса может работать и для незамкнутых систем в следующих случаях:

1) Если сумма моментов внешних сил равна нулю.

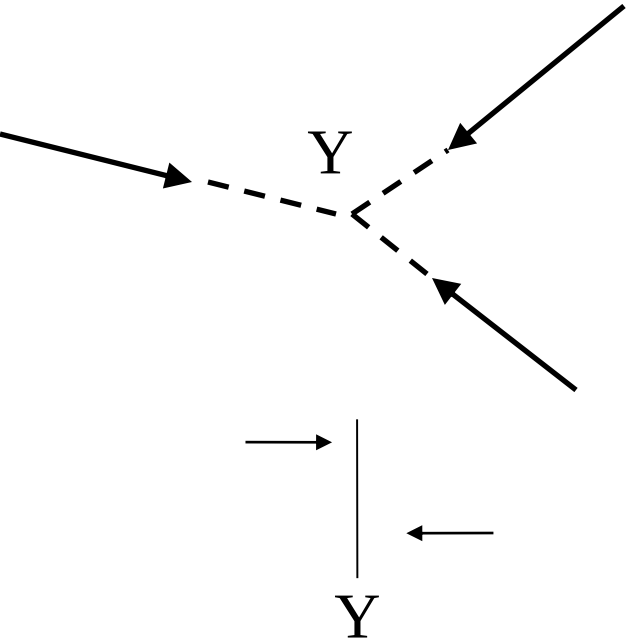


2) Если все внешние силы направлены вдоль одной оси, то их моменты относительно любой оси, имеющей то же направление, равны нулю. Поэтому сохраняется момент импульса системы относительно таких осей (ось z на рис.)



3) Если все внешние силы являются центральными с общим центром, то моменты этих сил относительно центра O равны нулю ($\alpha=0$ и $\sin\alpha=0$). Поэтому сохраняется момент импульса системы относительно этого центра O.

Применимость закона сохранения момента импульса



4) Если все внешние силы направлены по прямым, проходящим через некоторую ось Y, то момент импульса системы относительно этой оси будет постоянным (α=180 и $\sin\alpha$=0).

Закон сохранения момента импульса обусловлен изотропностью пространства, что означает одинаковость свойств пространства по всем направлениям.

Законы сохранения в неинерциальных системах отсчета (Н.И.С.О.)

в отсутствие внешних сил

Закон	И.С.О.	Н.И.С.О.
1. сохранения энергии	$E_2 - E_1 = 0$	$E_2 - E_1 = A_и$
2. сохранения импульса	$\frac{d\vec{K}}{dt} = 0$	$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{F}_{ин}$
3. сохранения момента импульса	$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$	$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{ин}$

Абсолютно твердое тело

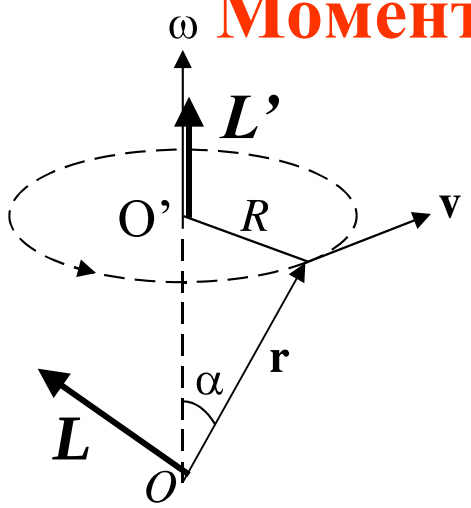
Под твердым телом будем подразумевать абсолютно твердое тело, в котором расстояния между любыми двумя точками неизменны. Твердое тело можно представить как совокупность большого количества очень малых масс Δm_i , которые можно считать МТ.

Теорема о движении центра масс твердого тела:

центр масс твердого тела движется так, как двигалась бы материальная точка с массой, равной массе тела, и к которой приложены все внешние силы, действующие на тело.

Т.е. раньше мы говорили о МТ и о систем МТ и ее центре масс теперь еще и об абсолютно твердом теле.

Момент инерции МТ относительно оси вращения



Величина угловой скорости $\boldsymbol{\omega} = \dfrac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$

Изменение угловой скорости со временем определяется вектором углового ускорения

$$\boldsymbol{\beta} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{\omega}}{\Delta t} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$$

При вращении по окружности **момент импульса МТ *L*** <u>относительно точки О</u>: $\boldsymbol{L} = [\boldsymbol{r}, m\boldsymbol{v}]$ и направления векторов $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{\omega}$ не совпадают если точка О не в центре окружности. Если движение идет по окружности и точка О’ в центре окружности то направления векторов $\boldsymbol{L'}$ и $\boldsymbol{\omega}$ совпадают.

$$L' = Rmv\sin 90^0 = Rmv = Rm \cdot \omega R = mR^2\omega = I\omega$$

Скалярная величина $I = mR^2$ **называется моментом инерции материальной точки относительно оси вращения**.

Момент инерции твердого тела

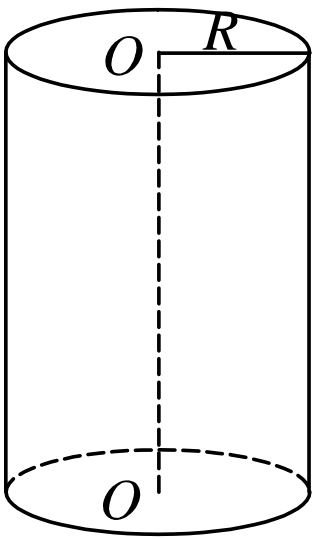
Твердое тело можно представить как систему **МТ**, удерживаемых внутренними силами на неизменных расстояниях друг от друга и по аналогии с **МТ** записать: $$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \sum \boldsymbol{N}_{внеш}$$

Пусть $\boldsymbol{L_i}$ момент импульса i-й частицы , r_i — радиус окружности, по которой движется **МТ** Δm_i относительно оси вращения тела. Направление $\boldsymbol{L_i}$ всех точек тела относительно оси вращения одинаковое, так как в каждый момент времени направление и величина угловых скоростей всех точек одинаковы (тело твердое).

$$\boldsymbol{L} = \sum \boldsymbol{L}_i = \boldsymbol{\omega} \sum \Delta m_i \boldsymbol{r}_i^2 = I\boldsymbol{\omega}$$

Величина $I = \sum \Delta m_i \boldsymbol{r}_i^2$ называется **моментом инерции твердого тела** относительно данной оси. Направление векторов **L** и **ω** совпадают только в случае симметричного тела.

Момент инерции полого цилиндра



Найдем момент инерции **полого** цилиндра относительно его оси симметрии *OO*.

$$I = \sum \Delta m_i r_i^2 = R^2 \sum \Delta m_i = R^2 m = mR^2$$

где m — масса цилиндра.

Итак, момент инерции **полого** цилиндра (**обруч, кольцо)** прямо не зависит от высоты этого цилиндра (косвенно зависит так как чем больше высота тем больше масса).

Момент инерции тела- аналог массы при вращательном движении. Он характеризует не только инертность тела, но и распределение массы относительно оси вращения. Для одного и того же тела момент инерции относительно разных осей различен.

Момент инерции сложных тел

Для определения момента инерции более сложных тел выражение $I = \sum \Delta m_i r_i^2$ следует уточнить, устремив элемент Δm_i к нулю и найдя соответствующий предел:

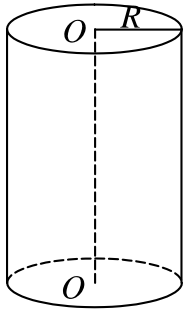
$$I = \lim_{\Delta m \to 0} \sum r_i^2 \Delta m_i$$

Как известно, такой предел называется интегралом:

$$I = \int r^2 dm = \int \rho\, r^2 dV$$

Интегрирование производится по всему объему тела V. Если плотность тела ρ постоянна, то ρ можно вынести из под знака интегрирования.

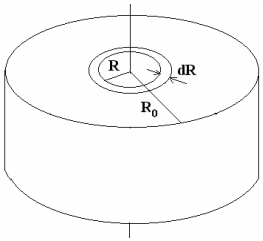
Момент инерции сплошного цилиндра



Момент инерции сплошного однородного цилиндра относительно оси симметрии OO можно найти разбив его на цилиндры радиуса r и толщиной dr. Так как объем одного слоя равен dV=2πrhdr то

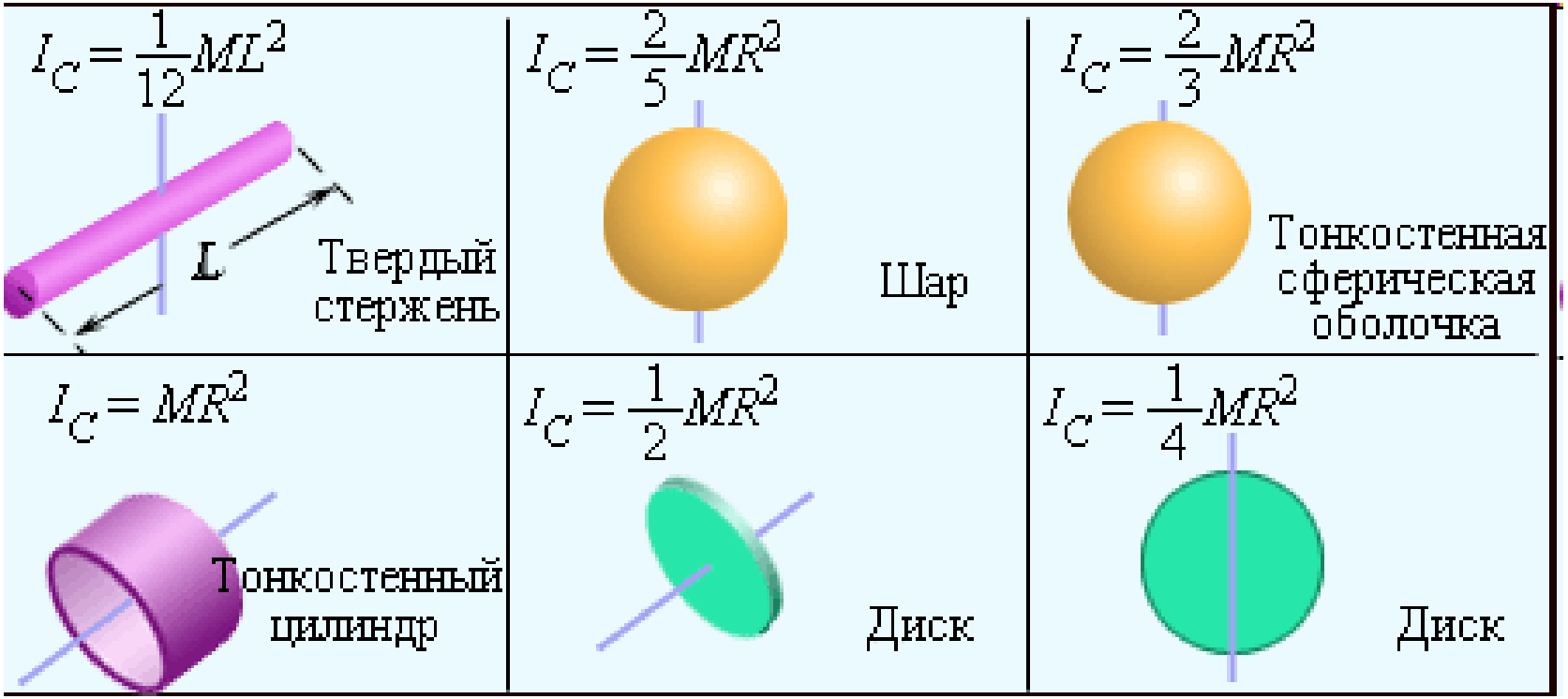
$$I = \int r^2 dm = \int r^2 \rho\, dV = \int r^2 \rho\, 2\pi\, r\, h\, dr = 2\pi\, \rho\; h \int r^3 dr =$$

$$2\pi\; \rho\, h \frac{R^4}{4} = \rho\,(\pi R^2 h)\frac{R^2}{4} = \rho V \frac{R^2}{4} = \frac{mR^2}{2}$$

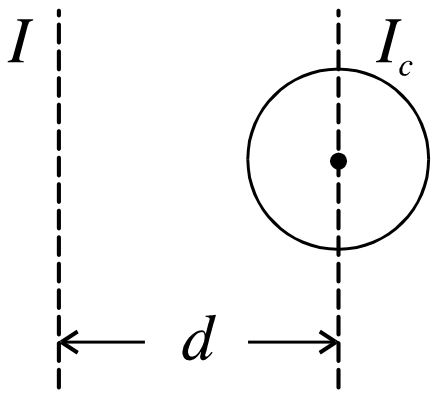


ρ- плотность, dr и h –толщина и высота цилиндра . А у полого цилиндра было mR^2. **Чем удаленнее масса от центра тем больше I.** При равных m и R у полого момент инерции I в 2 раза больше

Моменты инерции I_C некоторых однородных твердых тел относительно оси, проходящей через центр инерции



Теорема Штейнера

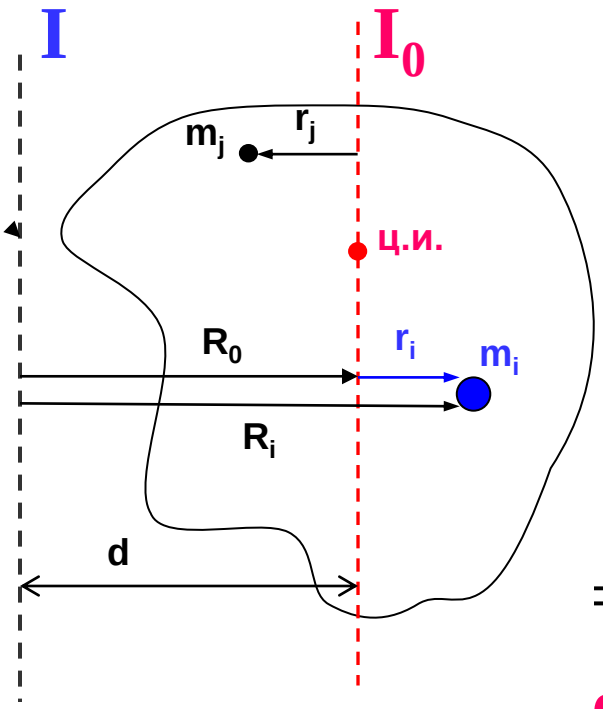


Зная момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс, момент инерции относительно произвольной оси вычисляют по **теореме Штейнера:**

момент инерции относительно произвольной оси I равен сумме момента инерции I_c относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями d.

$$I = I_c + md^2$$

Вывод теоремы Штейнера



$$\vec{R}_i = \vec{R}_0 + \vec{r}_i$$

$$I = \sum m_i \vec{R}_i^2 = \sum m_i (\vec{R}_0 + \vec{r}_i)^2 =$$

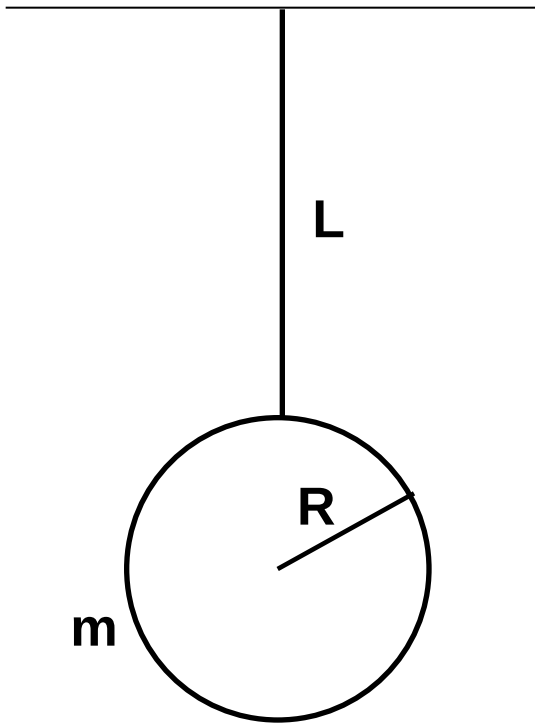
$$= \sum m_i \vec{R}_0^2 + \sum m_i 2\vec{R}_0 \vec{r}_i + \sum m_i \vec{r}_i^{\,2} =$$

$$= \underbrace{\vec{R}_0^2}_{d^2} \sum m_i + 2\vec{R}_0 \underbrace{\sum m_i \vec{r}_i}_{0} + \underbrace{\sum m_i \vec{r}_i^{\,2}}_{I_0}$$

Т.к. $\vec{r}_i$ направлены во все стороны относительно центра инерции они взаимно компенсируются, если тело симметричное. В случае несимметричного тела взаимно компенсируются произведения $\vec{m}_i \vec{r}_i$

$$\boxed{I = I_0 + md^2}$$

Вычислим по теореме Штейнера момент инерции диска на нити



$$I = I_0 + md^2$$

$d = (L+R)$ $\qquad$ $I_0 = 1/2\ mR^2$

$$I = 1/2mR^2 + m(L+R)^2$$

Если **L=0** (ось проходит через край диска)

$$I = 1/2mR^2 + mR^2 = 3/2mR^2$$

Уравнение моментов для материальной точки

Как уже говорилось момент импульса МТ, двигающейся по окружности:

$$\boldsymbol{L} = \mathrm{mR}^2\boldsymbol{\omega} = \mathrm{I}\boldsymbol{\omega}$$

Производная по времени равна:

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \mathrm{I}\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \mathrm{I}\boldsymbol{\beta}$$

В соответствии с законом изменения момента импульса для **МТ** получаем:

$$\mathrm{I}\boldsymbol{\beta} = \sum_{\boldsymbol{i}} \boldsymbol{N}_{\text{iвнеш}}$$

Уравнение моментов

Заменив в выражении для кинетической энергии $T = \frac{m\boldsymbol{v}^2}{2}$ массу на момент инерции I, а скорость $\boldsymbol{v}$ на угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$ получим кинетическую энергию вращающегося вокруг неподвижной оси тела или просто подставив v=ωR:

$$T = \frac{1}{2} I\omega^2$$

Подставим момент импульса тела $\boldsymbol{L} = I\boldsymbol{\omega}$

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = I\boldsymbol{\beta} = \sum \boldsymbol{N}_{\text{внеш}}$$

Это закон изменения момента импульса твердого тела или основной закон динамики для вращения твердого тела вокруг неподвижной оси. Как и в случае с **МТ** можно сопоставить все величины для поступательного и вращательного движения.

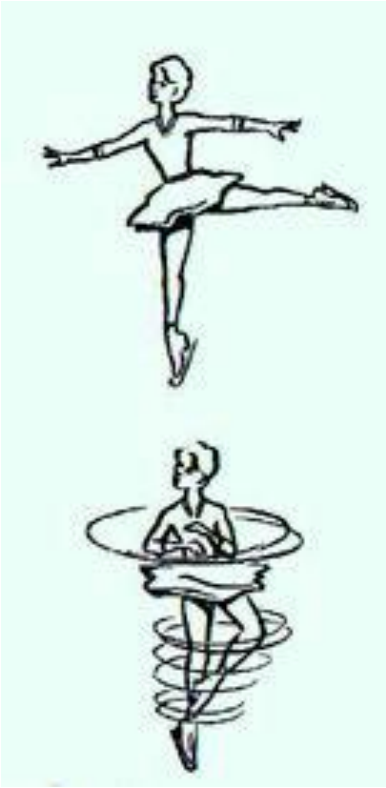
Закон сохранения момента импульса

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \mathrm{I}\boldsymbol{\beta} = \sum \boldsymbol{N}_{\text{внеш}}$$

закон изменения момента импульса

Если **N**=0 то **L**= Iω = const

закон сохранения момента импульса



Раскинув руки в стороны и заводя свободную ногу, фигуристка увеличивает момент инерции и замедляет вращение вокруг вертикальной оси.

Резко «сгруппировавшись», она уменьшает момент инерции и получает приращение угловой скорости

Момент инерции в природе

Самолеты убирают шасси во время полета, а, например, пчелы, напротив, вытягивают вперед задние лапки для того, чтобы лететь устойчиво с большей скоростью.

При максимальной скорости в 7.25 метров в секунду пчелы теряют вращательную устойчивость. Это говорит о том, что скорость пчелы ограничивает не сила мускулов или амплитуда машущих крыльев, а наклон тела и умение балансировать в неустойчивом положении. Т.е. до определенной скорости пчелы умеют управлять своим моментом инерции и изменять момент импульса так, чтобы обеспечить условия равновесия (нулевую сумму моментов внешних сил).

Механика поступательного и вращательно движения относительно неподвижной оси

Все выражения для поступательного и вращательного движения внешне очень похожи. 2-й закон Ньютона:

$$\frac{dp}{dt} = m\boldsymbol{a} = \sum \boldsymbol{F}_i \qquad \frac{dL}{dt} = I\boldsymbol{\beta} = \sum_i \boldsymbol{N}_{i\text{внеш}}$$

Аналогами также являются:

координата	x	- угол φ,
линейная скорость	$\boldsymbol{v}$	- угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$,
линейное ускорение	$\boldsymbol{a}$	- угловое ускорение $\boldsymbol{\beta}$,
масса	m	- момент инерции I,
сила	$\boldsymbol{F}$	- момент силы $\boldsymbol{N}$,
импульс	$\boldsymbol{p}$	- момент импульса $\boldsymbol{L}$,
кинетическая энергия	$mv^2/2$	- кинетическая энергия $I\boldsymbol{\omega}^2/2$,
работа	$dA=F_s ds$	- работа $dA=N_\omega d\varphi$
мощность	$P=F_v v$	- $P=N_\omega \boldsymbol{\omega}$