

УДК 537.612

А. В. Бужан

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ СИСТЕМЫ ТОКОВ, ТЕКУЩИХ ПО БЕСКОНЕЧНО ДЛИННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В работе произведён прямой, с помощью непосредственного интегрирования, расчёт индукции магнитного поля, создаваемого системой токов, текущих по бесконечно длинной цилиндрической поверхности, в различных точках: внутри, вне и непосредственно на самой поверхности.

При расчёте индукции магнитного поля, создаваемого токами, которые текут по некоторой поверхности, часто применяется теорема о циркуляции вектора индукции магнитного поля. Этот метод удобно применять при расчёте полей, создаваемых системой симметрично распределённых токов. Однако, если требуется найти индукцию магнитного поля создаваемого системой токов, текущих по некоторой поверхности, в точке, находящейся непосредственно на этой поверхности, теорема о циркуляции вектора индукции магнитного поля напрямую не применима. Для того чтобы разрешить этот вопрос, произведём прямой расчёт поля, создаваемого некоторой системой токов, текущих по бесконечно длинной цилиндрической поверхности.

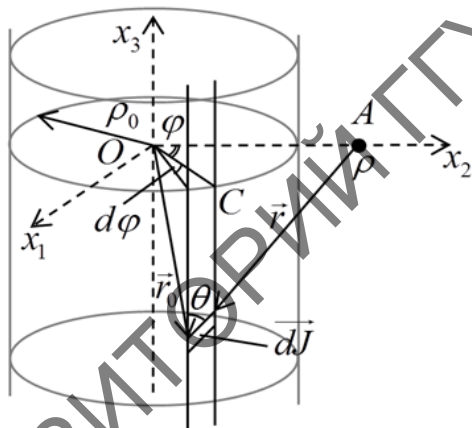


Рисунок 1 – Индукция магнитного поля снаружи цилиндра

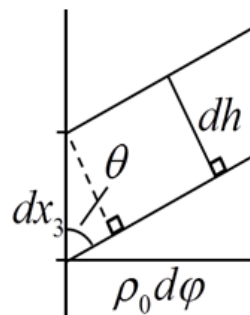


Рисунок 2 – Элемент с током

Пусть по бесконечно длинной цилиндрической поверхности радиуса ρ_0 течёт «спиральный» ток с линейной плотностью $\vec{J}$, такой, что угол между вектором $\vec{J}$ и осью цилиндра равен θ . Определим индукцию магнитного поля $\vec{B}$ в точке A , лежащей в плоскости перпендикулярной оси цилиндра и находящейся на расстоянии ρ от точки пересечения этой плоскости и оси цилиндра O . Отметим, что принципиально различными будут следующие три случая, соответствующие различным положениям точки A : а) снаружи цилиндра; б) внутри цилиндра; в) на самой поверхности цилиндра.

а) Направим ось Ox_3 вдоль оси симметрии цилиндрической поверхности, в таком направлении, чтобы угол θ удовлетворял условию $0 < \theta < 2\pi$. Ось Ox_2 выберем проходящей через точку. Направление оси Ox_1 выберем таким, чтобы орты координатных осей $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ образовывали правую тройку векторов.

Для расчёта индукции магнитного поля $\vec{B}$, разобьём цилиндрическую поверхность на элементарные полосы. Выделим на цилиндре полосу, которая видна под углом $d\varphi$ и проходит через точку C , такую, что $\angle AOC = \varphi$ (рисунок 1). Произведём разбиение выделенной полосы на одинаковые элементы ширины dh , каждый из них можно считать элементарным током $d\vec{I}$, который по определению линейной плотности тока равен

$$dI = Jdh. \quad (1)$$

Радиус-вектор $\vec{r}_0$, который описывает положение выделенного элемента с током относительно точки O , равен

$$\vec{r}_0 = (\rho_0 \sin \varphi; \rho_0 \cos \varphi; x_3). \quad (2)$$

Определим вектор $d\vec{l}dr$, описывающий элемент с током, как произведение величины тока dI на вектор $d\vec{r}_0$, описывающий элемент выделенной полосы, взятое с обратным знаком, так как направление тока $d\vec{I}$ противоположно направлению вектора $d\vec{r}_0$:

$$d\vec{l}dr = -dI d\vec{r}_0 = -Jdh d\vec{r}_0. \quad (3)$$

Найдём дифференциал вектора $\vec{r}_0$, чтобы определить компоненты $d\vec{r}_0$:

$$d\vec{r}_0 = (\rho_0 \cos \varphi d\varphi; -\rho_0 \sin \varphi d\varphi; dx_3). \quad (4)$$

Величины dh, dx_3 и $d\varphi$ связаны между собой следующим образом (рисунок 2):

$$dx_3 = \frac{dh}{\sin \theta} = \rho_0 d\varphi \operatorname{ctg} \theta. \quad (5)$$

Используя выражения (3)–(5), получим компоненты вектора $d\vec{l}dr$:

$$d\vec{l}dr = (-dx_3 J \sin \theta \rho_0 \cos \varphi d\varphi, dx_3 J \sin \theta \rho_0 \sin \varphi d\varphi, dx_3 J \cos \theta \rho_0 d\varphi). \quad (6)$$

Радиус-вектор $\vec{r}$ с началом в точке A , описывающий выделенную элементарную полосу, равен $\vec{r} = d\vec{r}_0 - \vec{OA}$, где $\vec{OA} = (0; \rho; 0)$. Компоненты вектора $\vec{r}$ и его модуль равны соответственно

$$\vec{r} = (\rho_0 \sin \varphi; \rho_0 \cos \varphi - \rho; x_3), \quad (7)$$

$$|\vec{r}| = (\rho_0^2 + \rho^2 - 2\rho\rho_0 \cos \varphi + x_3^2)^{1/2}. \quad (8)$$

Запишем закон Био – Савара – Лапласа для элемента с током и проинтегрируем это выражение сначала по dx_3 в бесконечных пределах, а затем по $d\varphi$ в пределах от 0 до 2π :

$$d^2 \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{r} \times d\vec{l}dr]}{|\vec{r}|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{J\rho_0 d\varphi dx_3}{|\vec{r}|^3} \begin{vmatrix} \rho_0 \sin \varphi & \rho_0 \cos \varphi - \rho & x_3 \\ \sin \theta \cos \varphi & -\sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{vmatrix}, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d^2 \vec{B}(\varphi, x_3) = \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{J\rho_0 d\varphi dx_3}{(\rho_0^2 + \rho^2 - 2\rho\rho_0 \cos \varphi + x_3^2)^{3/2}} \times \\ &\times [(-x_3 \sin \theta \sin \varphi + \rho_0 \cos \theta \cos \varphi - \rho \cos \theta) \vec{e}_1 + \\ &+ (x_3 \sin \theta \cos \varphi - \rho_0 \cos \theta \sin \varphi) \vec{e}_2 + (\rho_0 \sin \theta \sin^2 \varphi + \rho_0 \sin \theta \cos^2 \varphi - \rho \sin \theta \cos \varphi) \vec{e}_3]. \end{aligned} \quad (10)$$

После интегрирования по dx_3 , слагаемые в квадратных скобках, содержащие x_3 , обратятся в нуль, как интегралы от нечётной функции в симметричных пределах. При последующем интегрировании по $d\varphi$, обратится в нуль и второе слагаемое при $\vec{e}_2$. Интегрирование оставшихся слагаемых по переменной x_3 сводится к расчёту простого интеграла вида

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2} \operatorname{th}(\xi) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{2}{a^2}. \quad (11)$$

Выражение (10) примет следующий вид

$$\vec{B} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2J\rho_0 d\varphi}{\rho_0^2 + \rho^2 - 2\rho\rho_0 \cos \varphi} \left[(\rho_0 \cos \varphi - \rho) \cos \theta \vec{e}_1 + (\rho_0 - \rho \cos \varphi) \sin \theta \vec{e}_3 \right]. \quad (12)$$

Выделим в круглых скобках конструкции, аналогичные знаменателю и после упрощений, получим

$$\begin{aligned} \vec{B} = \int_0^{2\pi} J d\varphi \frac{\mu_0}{4\pi} \left[-\frac{\rho_0}{\rho} \left(1 - \frac{\rho_0^2 - \rho^2}{\rho_0^2 + \rho^2 - 2\rho\rho_0 \cos \varphi} \right) \cos \theta \vec{e}_1 + \right. \\ \left. + \left(1 + \frac{\rho_0^2 - \rho^2}{\rho_0^2 + \rho^2 - 2\rho\rho_0 \cos \varphi} \right) \sin \theta \vec{e}_3 \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Интеграл от первого слагаемого в круглых скобках элементарен, тогда как вычисление интеграла от второго слагаемого требует использования теории функции комплексной переменной, что делает метод прямого расчёта вектора индукции магнитного поля достаточно сложным, по сравнению с использованием теоремы о циркуляции вектора магнитной индукции. Для сокращения математических выкладок, воспользуемся готовым решением для интеграла такого вида:

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - a \cos \varphi} d\varphi = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}}. \quad (14)$$

Используя (14), из (13) получим выражение для индукции $\vec{B}$:

$$\vec{B} = J \frac{\mu_0}{2} \left[-\frac{\rho_0}{\rho} \left(1 - \frac{\rho_0 - \rho}{|\rho_0 - \rho|} \right) \cos \theta \vec{e}_1 + \left(1 + \frac{\rho_0 - \rho}{|\rho_0 - \rho|} \right) \sin \theta \vec{e}_3 \right]. \quad (15)$$

Для точек, находящихся снаружи цилиндра выражение (15) примет вид:

$$\vec{B} = J \frac{\mu_0}{2} \left[-\frac{\rho_0}{\rho} \left(1 - \frac{\rho_0 - \rho}{\rho - \rho_0} \right) \cos \theta \vec{e}_1 + \left(1 + \frac{\rho_0 - \rho}{\rho - \rho_0} \right) \sin \theta \vec{e}_1 \right] = -\frac{\mu_0 \rho_0 J \cos \theta}{\rho} \vec{e}_1. \quad (16)$$

Как видно из выражения (16), вклад в создаваемое магнитное поле снаружи цилиндра будет вносить только параллельная оси цилиндра составляющая тока. Записав линейную плотность тока на выделенное направление, получим

$$J \cos \theta = J_{\parallel} = \frac{I_{\parallel}}{2\pi\rho_0}, \quad (17)$$

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I_{\parallel}}{2\pi\rho} \vec{e}_1. \quad (18)$$

Таким образом, индукция магнитного поля $\vec{B}$, создаваемого током, текущим по бесконечно длинной цилиндрической поверхности, в точке, находящейся вне пространства, ограниченного этой поверхностью, направлена тангенциально и обусловлена наличием у тока составляющей вдоль оси симметрии цилиндра.

б) Пусть теперь точка A находится на расстоянии $\rho < \rho_0$ от оси цилиндра (рисунок 3).

Для нахождения индукции магнитного поля $\vec{B}$ в этом случае последовательность действий будет такой же, как и в пункте а), формулы (1) – (14) полностью справедливы и в этом случае, а значит, справедлив и результат (15).

Однако, для точек, находящихся снаружи цилиндрической поверхности, модуль в выражении (15) раскроется как $|\rho_0 - \rho| = \rho_0 - \rho$, в результате получим

$$\vec{B} = J \frac{\mu_0}{2} \left[-\frac{\rho_0}{\rho} \left(1 - \frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0 - \rho} \right) \cos \theta \vec{e}_1 + \left(1 + \frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0 - \rho} \right) \sin \theta \vec{e}_3 \right] = \mu_0 J \sin \theta \vec{e}_3. \quad (19)$$

В выражении (19) можно заметить, что вклад в создаваемое магнитное поле внутри цилиндра будет вносить только перпендикулярная оси цилиндра составляющая тока.

$$\vec{B} = \mu_0 J \sin \theta \vec{e}_3 = \mu_0 J_{\perp} \vec{e}_3. \quad (20)$$

Таким образом, индукция магнитного поля $\vec{B}$, создаваемого током, текущим по бесконечно длинной цилиндрической поверхности, в точке, находящейся внутри пространства, ограниченного этой поверхностью, направлена параллельно оси цилиндра и обусловлена наличием тангенциальной составляющей тока.

в) Теперь, рассмотрим случай, когда точка A находится на расстоянии $\rho = \rho_0$ от оси цилиндра.

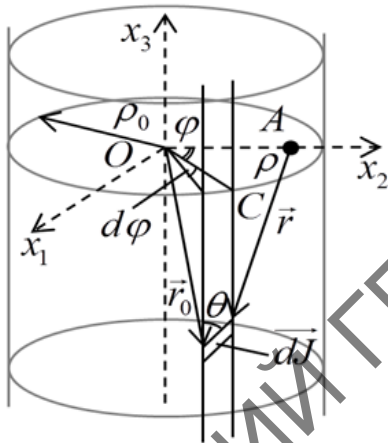


Рисунок 3 – Точка вне цилиндра

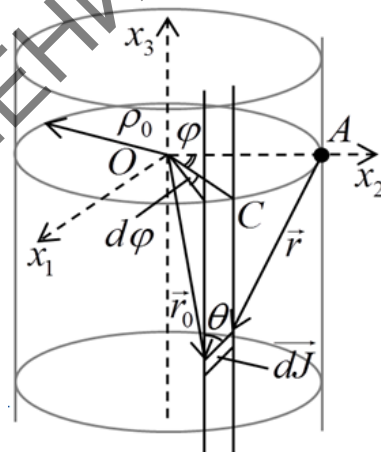


Рисунок 4 – Точка на поверхности цилиндра

Выражения (1)–(6) останутся неизменными, а подстановка условия $\rho = \rho_0$ в (7) и (8), после вычислений, аналогичных (9)–(12), приводит к следующему результату:

$$\vec{B} = \int_0^{2\pi} J \frac{\mu_0}{4\pi} [-\cos \theta \vec{e}_1 + \sin \theta \vec{e}_3] = -J \frac{\mu_0}{2} \cos \theta \vec{e}_1 + J \frac{\mu_0}{2} \sin \theta \vec{e}_3. \quad (21)$$

Используя для линейной плотности тока замены, аналогичные (17) и (20), получим

$$\vec{B} = -J_{\parallel} \frac{\mu_0}{2} \vec{e}_1 + J_{\perp} \frac{\mu_0}{2} \vec{e}_3. \quad (22)$$

Учитывая то, что ось цилиндра совпадает с координатной осью Ox_3 , анализируя (22) можно заметить, что вектор индукции магнитного поля $\vec{B}$, лежащий в плоскости, касательной к цилиндрической поверхности в точке A , направлен перпендикулярно току, текущему в этой точке. Компоненты этого вектора являются средними значениями компонент вектора $\vec{B}$ внутри и вне непосредственно вблизи цилиндрической поверхности.

Таким образом, индукция магнитного поля, создаваемого током, текущим по бесконечно длинной цилиндрической поверхности, на расстоянии ρ от оси цилиндра равна

$$\vec{B}(\rho) = \begin{cases} \mu_0 J \sin \theta \vec{e}_3, & \rho < \rho_0; \\ \frac{\mu_0 J \sin \theta}{2} \vec{e}_3 - \frac{\mu_0 J \cos \theta}{2} \vec{e}_1, & \rho = \rho_0; \\ -\frac{\mu_0 J \rho_0 \cos \theta}{\rho} \vec{e}_1, & \rho > \rho_0. \end{cases} \quad (23)$$

Стоит отметить, что в некоторых источниках [1]–[3] приводятся решения частных задач и отдельные авторы приводят другой результат для случаев $\rho = \rho_0$, например в [3].

Литература

- 1 Электричество и магнетизм. Методика решения задач / Д. Ф. Киселев [и др.]; Москва: Физический факультет МГУ, 2010. – 223 с.
- 2 Магнетизм: учебное пособие по курсу физики / А. Э. Васильев [и др.]; СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1998. – С. 14–17.
- 3 Андреев, А. Д. Физика. Магнетизм: конспект лекций / А. Д. Андреев, Л. М. Черных; СПб.: ГОУВПО СПбГУТ, 2009. – 19 с.

УДК 519.174

М. А. Бужан, Ю. В. Жердецкий

АППАРАТ ОЦЕНКИ НАДЕЖНОСТИ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В статье приводится описание программного продукта, позволяющего проводить автоматизированный расчет надежности сложных технических систем, анализ и расчет безопасности их структурной организации, технического риска, готовности и ремонтпригодности. Представлен реализованный программный модуль, автоматизирующий построение и эксплуатацию вероятностных моделей надежности электроэнергетических систем различной структурной организации.

На сегодняшний день, в мире разработаны десятки программных продуктов в области автоматизации расчета надежности электроэнергетических объектов, позволяющих проводить автоматизированный расчет надежности сложных технических систем, для анализа и расчета безопасности, определения технического риска, готовности и ремонтпригодности, отличающихся между собой наличием встроенных аналитических средств, производительностью математических операций, применением к конкретным предметным областям, графическими интерфейсами, стоимостью лицензий, простотой освоения.

Одним из программных продуктов, направленных на решение задач оценки надежности электроэнергетических систем, является АСОНИК-К, используемый для проектирования РЭС.

Авторами разработан и реализован инструментарий, расширяющий список задач и область применения программного продукта АСОНИК-К. Программное обеспечение реализовано в составе программно-технологического комплекса автоматизации