

Рисунок 3 – Страница отслеживания заказа

Хранение данных в силу большого числа преимуществ происходит с помощью NoSQL – базы данных Cloud Firestore, которая была разработана специально для хранения и синхронизации данных веб-приложений на глобальном уровне. Для разработки Front части приложения используется фреймворк Angular 2. Серверная часть приложения написана на .Net, весь сервис разворачивается на платформе облачных приложений следующего поколения Microsoft Azure Service Fabric.

Оптимизация скорости работы и повышение надежности сервиса являлось и является одним из приоритетных условий разработки данного сервиса, т. к. он используется на многомиллионном рынке потенциальных клиентов.

### Литература

1 Сукач, Е. И. Технология проектного моделирования транспортных систем региона, функционирующих в условиях случайных воздействий / Е. И. Сукач // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2008. – № 5 (50). – С. 112–117.

2 Официальная документация Microsoft Azure Service Fabric [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://azure.microsoft.com>. – Дата доступа: 1.03.2018.

УДК 530.182, 535-4, 535.012.2, 535.016, 535.518, 537.862, 537.872.32

*Е. Д. Головин*

### МУЛЬТИПОЛЬНЫЕ МОМЕНТЫ ЗАРЯДОВ, РАСПОЛОЖЕННЫХ НА ОДНОЙ ПРЯМОЙ

*В статье изложены расчеты потенциалов зарядов, расположенных на одной прямой. Показано, что специальным выбором величин зарядов и их конфигурации можно добиться, чтобы потенциал системы зарядов совпадал с потенциалом мультиполя, образованного зарядами, расположенными на плоскости или в пространстве.*

Электрический мультиполь – система электрических зарядов, обладающая определённой симметрией [1]. Мультиполь характеризуется его порядком: мультиполем нулевого порядка является заряд; мультиполем 1-го порядка – диполь (система двух разноимённых, одинаковых по величине зарядов); мультиполем 2-го порядка – квадруполь (система четырёх равных по величине зарядов, помещённых в вершины параллелограмма так, что каждая сторона соединяет разноимённые заряды); 3-го порядка – октополь и т. д. Поле системы зарядов на больших расстояниях  $R$  от нее ( $R \gg r$  где  $r$  – размеры системы) можно представить как суперпозицию полей мультиполей различного порядка. Для статических полей потенциал мультиполя  $l$ -го порядка убывает при  $R \gg r$  как  $R^{-(l+1)}$  и обладает определённой угловой зависимостью.

Основная характеристика мультиполя – его мультипольный момент, который определяет величину и угловую зависимость поля мультиполя, а также энергию его взаимодействия с внешними полями. Мультипольный момент статической системы зарядов зависит только от их величины и расположения. Так, дипольный момент электрического диполя  $\vec{p} = e\vec{l}$  ( $e$  – заряд,  $\vec{l}$  – вектор, начало которого совпадает с отрицательным зарядом диполя, конец – с положительным).

Часто считают, что понятие мультиполя можно использовать только для зарядов, распределённых в пространстве или на плоскости. В данной работе покажем, что существуют такие конфигурации зарядов, расположенных на прямой, которые обладают такими же свойствами, а именно, создают такой же потенциал, что и соответствующие им пространственные мультиполи.

Рассмотрим два заряда, расположенных на оси  $Ox$  (рисунок 1).

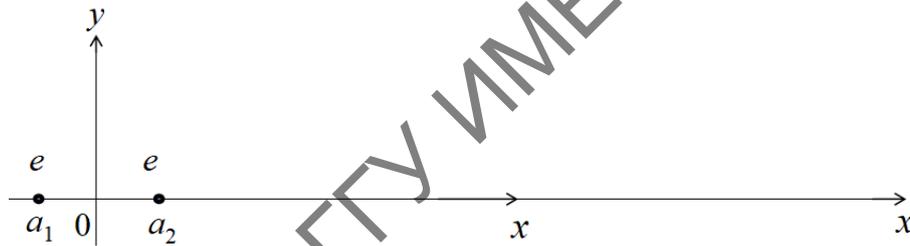


Рисунок 1 – Два заряда, расположенных на оси  $Ox$

Потенциал, создаваемый одним зарядом в точке  $x$ , расположенной на оси  $Ox$ , на расстоянии  $x$  найдем как  $\varphi(x) = \frac{ke}{|x-a|}$  и, учитывая, что  $x \gg |a|$ , получим:  $\varphi(x) = \frac{ke}{x-a}$ .

Теперь разложим потенциалы зарядов  $e_1$  и  $e_2$ , расположенных в точках  $a_1$  и  $a_2$ , в ряд:

$$\varphi_1(x) = \frac{ke_1}{x-a_1} = \frac{ke_1}{x} \frac{1}{1-\frac{a_1}{x}} \cong \frac{ke_1}{x} \left( 1 + \frac{a_1}{x} + \left(\frac{a_1}{x}\right)^2 + \left(\frac{a_1}{x}\right)^3 + \dots \right) = \frac{ke_1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a_1}{x}\right)^n,$$

$$\varphi_2(x) = \frac{ke_2}{x-a_2} = \frac{ke_2}{x} \frac{1}{1-\frac{a_2}{x}} \cong \frac{ke_2}{x} \left( 1 + \frac{a_2}{x} + \left(\frac{a_2}{x}\right)^2 + \left(\frac{a_2}{x}\right)^3 + \dots \right) = \frac{ke_2}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a_2}{x}\right)^n.$$

Найдем потенциал системы как сумму потенциалов зарядов:

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) \cong \frac{k}{x} \left( [e_1 + e_2] + \frac{1}{x} [e_1 a_1 + e_2 a_2] + \frac{1}{x^2} [e_1 a_1^2 + e_2 a_2^2] + \frac{1}{x^3} [e_1 a_1^3 + e_2 a_2^3] + \dots \right).$$

Рассмотрим теперь условия, при которых занулится первое слагаемое:  $e_1 + e_2 = 0$ .

Пусть  $e_1 = q, e_2 = -q, a_1 - a_2 = a$ . Учитывая, что на больших расстояниях ( $x \gg |a_1|, |a_2|$ )

слагаемыми  $\frac{1}{x^2}[e_1 a_1^2 + e_2 a_2^2] + \dots$  можно пренебречь, потенциал в точке  $x$  можем записать в виде  $\varphi(x) \cong k \frac{qa}{x^2} = k \frac{p}{x^2}$ , где  $p = qa$  – дипольный момент. Аналогично, можно показать, что при  $x < 0$  потенциал системы равен  $\varphi(x) \cong -k \frac{p}{x^2}$ . Этот потенциал и называется потенциалом диполя.

Затем рассмотрим систему трех зарядов  $e_0, e_1, e_2$ , расположенных в точках  $O, a_1, a_2$  (рисунок 2):

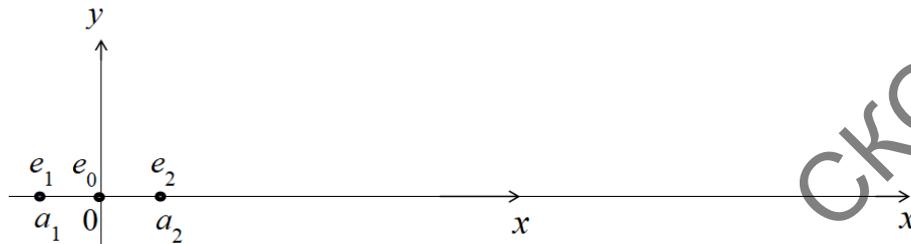


Рисунок 2 – Три заряда, расположенных на оси  $Ox$

$$\varphi_0(x) = \frac{ke_0}{x},$$

$$\varphi_1(x) = \frac{ke_1}{x-a_1} = \frac{ke_1}{x} \frac{1}{1-\frac{a_1}{x}} \cong \frac{ke_1}{x} \left( 1 + \frac{a_1}{x} + \left(\frac{a_1}{x}\right)^2 + \left(\frac{a_1}{x}\right)^3 + \dots \right) = \frac{ke_1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a_1}{x}\right)^n,$$

$$\varphi_2(x) = \frac{ke_2}{x-a_2} = \frac{ke_2}{x} \frac{1}{1-\frac{a_2}{x}} \cong \frac{ke_2}{x} \left( 1 + \frac{a_2}{x} + \left(\frac{a_2}{x}\right)^2 + \left(\frac{a_2}{x}\right)^3 + \dots \right) = \frac{ke_2}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a_2}{x}\right)^n.$$

Тогда потенциал системы трех зарядов:

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^2 \varphi_i(x) \cong \frac{k}{x} \left( \sum_{i=0}^2 e_i + \frac{1}{x} \sum_{i=1}^2 e_i a_i + \frac{1}{x^2} \sum_{i=1}^2 e_i a_i^2 + \frac{1}{x^3} \sum_{i=1}^2 e_i a_i^3 + \dots \right).$$

Теперь занулим первые два слагаемых, налагая условия:

$$e_0 + e_1 + e_2 = 0; \quad e_1 a_1 - e_2 a_2 = 0.$$

Пусть  $e_0 = -2q$ ,  $e_1 = e_2 = q$ ,  $a_1 = -a_2 = a$ . Теперь, учитывая, что на больших расстояниях ( $x \gg |a_1|, |a_2|$ ) слагаемыми  $\frac{1}{x^3} \sum_{i=0}^3 e_i a_i^3 + \dots$  можно пренебречь, потенциал в

точке  $x$  запишется в виде  $\varphi(x) \cong k \frac{2qa^2}{x^3} = k \frac{D}{x^3}$ , где  $D = 2qa^2$  – квадрупольный момент. При  $x < 0$  потенциал системы равен  $\varphi(x) \cong -k \frac{D}{x^3}$ . Такой потенциал называется

потенциалом квадруполя.

Далее рассмотрим систему, состоящую из четырех зарядов (рисунок 3):

$$\varphi_i(x) = \frac{ke_i}{x-a_i} = \frac{ke_i}{x} \frac{1}{1-\frac{a_i}{x}} \cong \frac{ke_i}{x} \left( 1 + \frac{a_i}{x} + \left(\frac{a_i}{x}\right)^2 + \left(\frac{a_i}{x}\right)^3 + \left(\frac{a_i}{x}\right)^4 + \dots \right) = \frac{ke_i}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a_i}{x}\right)^n,$$

где  $i = 1, 2, 3, 4$ .

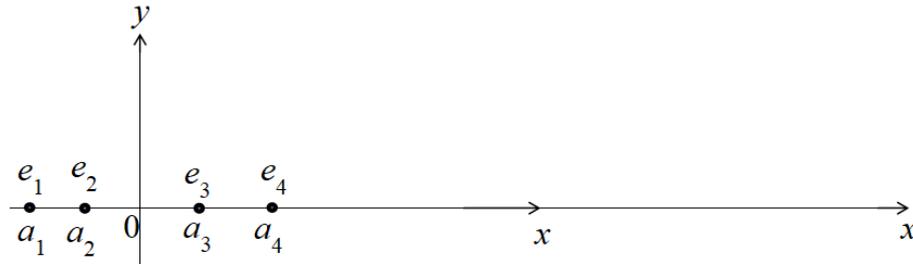


Рисунок 3 – Четыре заряда, расположенных на оси  $Ox$

Тогда потенциал системы:

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^4 \varphi_i(x) \cong \frac{k}{x} \left( \sum_{i=1}^4 e_i + \frac{1}{x} \sum_{i=1}^4 e_i a_i + \frac{1}{x^2} \sum_{i=1}^4 e_i a_i^2 + \frac{1}{x^3} \sum_{i=1}^4 e_i a_i^3 + \frac{1}{x^4} \sum_{i=1}^4 e_i a_i^4 + \dots \right).$$

Найдем условия, при которых занулятся первые три слагаемых, то есть:

$$e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = 0,$$

$$e_1 a_1 + e_2 a_2 + e_3 a_3 + e_4 a_4 = 0,$$

$$e_1 a_1^2 + e_2 a_2^2 + e_3 a_3^2 + e_4 a_4^2 = 0.$$

Пусть  $e_1 = -q$ ,  $e_2 = 3q$ ,  $e_3 = -3q$ ,  $e_4 = q$ ,  $a_3 = -a_2 = a$ ,  $a_4 = -a_1 = 3a$ . Учитывая, что на больших расстояниях ( $x \gg |a_i|$ ) слагаемыми  $\frac{1}{x^4} \sum_{i=1}^4 e_i a_i^4 + \dots$  можно пренебречь, потенциал в точке  $x$  можем записать в виде  $\varphi(x) \cong k \frac{48qa^3}{x^4} = k \frac{Q}{x^4}$ , где  $D = 48qa^3$  – октупольный момент. При  $x < 0$  потенциал системы равен  $\varphi(x) \cong -k \frac{Q}{x^4}$ . Такой потенциал называется потенциалом октуполя.

Далее покажем, что поля указанных систем зарядов, расположенных вдоль одной прямой, в других точках, находящихся далеко от систем зарядов, также дают правильные формулы для потенциалов. Для этого найдем потенциал, создаваемый зарядом в точке  $\vec{r}$ , не лежащей на прямой (рисунок 4):

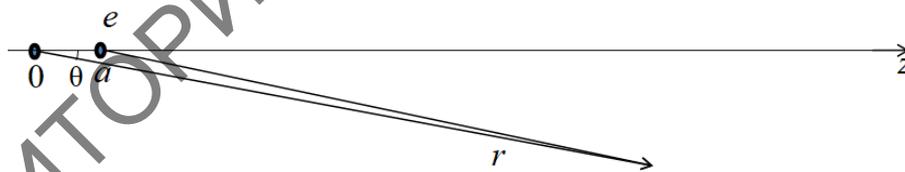


Рисунок 4 – Потенциал, создаваемый зарядом в точке, не лежащей на прямой

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta) &= k \frac{e}{|\vec{r} - \vec{a}|} = k \frac{e}{\sqrt{(\vec{r} - \vec{a})^2}} = k \frac{e}{\sqrt{r^2 - 2ar \cos \theta + a^2}} = \frac{ke}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{r^2}}} = \\ &= \frac{ke}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon}}, \text{ где } \varepsilon = +2\frac{a}{r} \cos \theta - \frac{a^2}{r^2}. \end{aligned}$$

Воспользуемся разложением Маклорена:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon}} = (1 - \varepsilon)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{3}{8}\varepsilon^2 + \frac{15}{48}\varepsilon^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} \varepsilon^n \dots$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta) &= \frac{ke}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} \left( 2 \frac{a}{r} \cos \theta - \frac{a^2}{r^2} \right)^n = \\ &= \frac{ke}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} \sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} \left( 2 \frac{a}{r} \cos \theta \right)^i \left( \frac{a^2}{r^2} \right)^{n-i} = \\ &= \frac{ke}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n \left( \frac{a}{r} \right)^{i+2n-2i} \sum_{i=0}^n 2^i \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} \frac{n!}{i!(n-i)!} (\cos \theta)^i = \\ &= \frac{ke}{r} \sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{a}{r} \right)^m P_m(\cos \theta). \end{aligned}$$

Аналогично предыдущим рассуждениям получим:

– потенциал, создаваемый двумя зарядами равен:  $\varphi(r, \theta) = k \frac{P}{r^2} P_1(\cos \theta)$ , где  $P_1(\cos \theta) = \cos \theta$ . При  $\theta = 0$  получим:  $\varphi(r, \theta) \cong k \frac{P}{r^2}$ , при  $\theta = \pi$ :  $\varphi(r, \theta) \cong -k \frac{P}{r^2}$ , что совпадает с полученными ранее результатами;

– потенциал, создаваемый тремя зарядами равен:  $\varphi(r, \theta) = k \frac{D}{r^3} P_2(\cos \theta)$ , где  $P_2(\cos \theta) = \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2}$ . При  $\theta = 0$  получим:  $\varphi(r, \theta) \cong k \frac{D}{r^3}$ , при  $\theta = \pi$ :  $\varphi(r, \theta) \cong -k \frac{D}{r^3}$ ; потенциал, создаваемый четырьмя зарядами равен:  $\varphi(r, \theta) = k \frac{Q}{r^4} P_3(\cos \theta)$ , где  $P_3(\cos \theta) = \frac{5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta}{2}$ . При  $\theta = 0$  получим:  $\varphi(r, \theta) \cong k \frac{Q}{r^4}$ , при  $\theta = \pi$ :  $\varphi(r, \theta) \cong -k \frac{Q}{r^4}$ .

Таким образом, мультиполи, образованные зарядами, расположенными на плоскости или в пространстве, можно заменить меньшим количеством зарядов, расположенных на одной прямой.

### Литература

1 Ландау, Л. Д. Теория поля / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – Изд. 7-е. – М.: Наука, 1988. – 512 с. – Т. II. Теоретическая физика.

УДК 539.4:621.6

*Е. А. Голубева, Р. А. Аль-Абси*

### РЕАЛИЗАЦИЯ РАСЧЕТА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТРУБЫ, НАХОДЯЩЕЙСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ

*Рассматривается труба из неоднородных материалов под действием внутреннего давления с учетом явлений ползучести и релаксации. Необходимо определить напряженно-деформированное состояние в трубе. Создается алгоритм и строится математическая модель реализации расчета напряжений и деформаций в трубе, затем строится вычислительная программа, по которой определяется напряжение и деформации в трубе из неоднородных материалов с учетом явлений ползучести и релаксации.*