МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

В.С. ДАВЫДОВ

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

ПРАКТИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

В 2 частях

Часть II

Гомель 2005

УДК 519. 7+ 519. 8 (075. 8)

ББК 22.183 Я73

Д138

Рецензенты:
кафедра автоматизированных систем обработки информации учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»,
В.Д. Левчук, доцент, кандидат технических наук.

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины» 30 марта 2005 года, протокол № 7.

Давыдов В. С.

Д138 Системный анализ и исследование операций: Практическое пособие. В 2 частях. Ч.II. / В. С. Давыдов; Министерство образования РБ, учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины». - Гомель, ГГУ им Ф. Скорины, 2005. – 91 с.

Практическое пособие «Системный анализ и исследование операций» адресовано студентам специальности 1-53 01 02 “АСОИ” и включает теоретические сведения, задания и требования по выполнению практических работ.

УДК 519. 7+ 519. 8 (075. 8)
ББК 22.183 Я73

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Выполнение практических работ по курсу "Системный анализ и исследование операций" призвано помочь студентам в овладении теоретическими знаниями и их применении при решении практических задач

Выполнение практических работ включает:

1. Изучение студентами необходимого теоретического материала по теме работы.
2. Построение алгоритма решения задачи.
3. Составление программы.
4. Решение контрольного примера.

Номер варианта определяется порядковым номером в списке группы.

Каждая работа оформляется отдельно и подшивается в папку.

В данном пособии рассмотрены модели: транспортные, сетевые, антогонистические игры.

Практическая работа N1

ТРАНСПОРТНЫЕ ЗАДАЧИ

Цель работы: Изучение теоретических и практических приёмов решения транспортных задач

Транспортные задачи составляют класс задач линейного программирования, специфика математической модели которых позволяет применять для их решения наряду с общими методами линейного программирования специальные методы, значительно сокращающие процесс вычислений.

Транспортная модель используется при разработке плана перевозок одного вида продукции из нескольких пунктов отправления в пункты назначения. При построении модели используются:

1) величины, характеризующие объем производства в каждом исходном пункте и спрос в каждом пункте назначения;

2) стоимость перевозки единицы продукции из каждого исходного пункта в каждый пункт назначения.

Компактный способ представления транспортной модели предполагает использование **транспортной таблицы**, имеющей вид матрицы, в которой строки соответствуют исходным пунктам, а столбцы — пунктам назначения. Коэффициенты стоимости c_{ij} расположены в правом верхнем углу каждой ячейки (i, j), в правом столбце отмечают имеющиеся запасы a_i, а в нижней строке - величины спроса b_j. Обычно в ячейках таблицы записывают и решения задачи в виде X_{ij}, а также отмечают вспомогательные вычисления.Пусть x_{ji} – количество продукции перевозимой из i-го пункта в j-ый пункт; c_{ij} – стоимость перевозки из i-го пункта в j-ый пункт. Тогда модель будет следующей:

Найти min $z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$ при условии

$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, \quad i = \overline{1,m}$, запасы, $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge b_j, \quad j = \overline{1,n}$, запросы,

$x_{ij} \ge 0 \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}.$

Таблица 1.1. Транспортная таблица

Пункты отправления	**Пункты назначения**					**Запасы**
	B_1		B_i		B_n	
$\boldsymbol{A_1}$	$C_{i,1}$ $X_{i,1}$		$C_{1,i}$ $X_{1,j}$		$C_1,$ n	a_1
...	…	…	...	…	...	…
$\boldsymbol{A_i}$	$C_{i,1}$ $X_{i,1}$		$C_{i,j}$ $X_{i,j}$		$C_{i,n}$ $X_{i,n}$	a_i
...	...	…	...	…	...	...
$\boldsymbol{A_m}$	$C_{m,}$ 1		$C_{m,j}$ $X_{m,j}$		$C_{m,n}$ $X_{m,n}$	a_m
Потребности	b_1	…	b_i		b_n	

Если общая потребность в грузе в пунктах назначения равна запасу груза в пунктах отправления, $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$,

то модель такой транспортной задачи называется <u>*закрытой*</u> *(***сбалансированной***)*. Если же указанное условие не выполняется, то модель транспортной задачи называется *открытой (*несбалансированной*)*. Сбалансированная модель отличается от вышеприведенной модели лишь тем, что все ограничения превращаются в равенства,

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = 1,2,...,m, \ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1,2,...,n, \ x_{ij} \geq 0 \text{ для всех } i \text{ и } j,$$

то есть весь продукт из *i*-го пункта поставки должен быть вывезен и запросы всех пунктов j потребления удовлетворены полностью.

В реальных условиях не всегда объем производства равен спросу или превосходит его. Однако транспортную модель всегда можно сбалансировать. Помимо того, что баланс делает удобным моделирование определенных практических ситуаций, он полезен для разработки метода решения, который полностью учитывает особую структуру транспортной модели.

Решение транспортной задачи

При решении транспортной задачи повторяются этапы реализации симплекс-алгоритма, однако способ проверки условий: оптимальности и допустимости видоизменяется.

Основные шаги алгоритма.

Шаг 1. Найти начальное допустимое решение.

Шаг 2. Выделить из числа небазисных переменных вводимую в базис. Если все небазисные переменные удовлетворяют условию оптимальности, закончить вычисления; в противном случае перейти к шагу 3.

Шаг 3. Выбрать выводимую из базиса переменную (используя условие допустимости) из числа переменных текущего базиса; затем найти новое базисное решение. Вернуться к шагу 2.

Определение начального решения

Согласно общему определению транспортной модели необходимо ($\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$), откуда следует, что одно уравнение оказывается зависимым, т. е. транспортная модель содержит только m+n-1 независимых уравнений. Таким образом, как и в симплекс-методе, начальное базисное допустимое решение должно иметь m+n-1 базисную переменную.

Начальное базисное допустимое решение легко получить из транспортной таблицы. Для этой цели используется один из приведенных ниже методов.

Сущность этих методов состоит в том, что опорный план находят последовательно за $n+m-1$ шагов, на каждом из которых в таблице условий задачи заполняют одну клетку, которую называют *занятой*. Заполнение одной из клеток обеспечивает полностью либо удовлетворение потребности в грузе одного из пунктов назначения (того, в столбце которого находится заполненная клетка), либо вывоз груза из одного из пунктов отправления (из того, в строке которого находится заполняемая клетка).

В первом случае временно исключают из рассмотрения столбец, содержащий заполненную на данном шаге клетку, и рассматривают задачу, таблица условий которой содержит на один столбец меньше, чем было перед этим шагом, но то же количество строк и соответственно измененные запасы груза в одном из пунктов отправления (в том, за счет запаса которого была удовлетворена потребность в грузе пункта назначения на данном шаге). Во втором случае временно исключают из рассмотрения строку, содержащую заполненную клетку, и считают, что таблица условий имеет на одну строку меньше при неизменном количестве столбцов и при соответствующем изменении потребности в грузе в пункте назначения, в столбце которого находится заполняемая клетка.

После того как проделаны $m+n-2$ описанных выше шагов, получают задачу с одним пунктом отправления и одним пунктом назначения. При этом останется свободной только одна клетка, а запасы оставшегося пункта отправления будут равны потребностям оставшегося пункта назначения. Заполнив эту клетку, тем самым делают $(n+m-1)$*-й* шаг и получают искомый опорный план. Следует заметить, что на некотором шаге (но не на последнем) может оказаться, что потребности очередного пункта назначения равны запасам очередного пункта отправления. В этом случае также временно исключают из рассмотрения либо столбец, либо строку (что-нибудь одно). Таким образом, либо запасы соответствующего пункта отправления, либо потребности данного пункта назначения считают равными нулю. Этот нуль записывают в очередную заполняемую клетку. Указанные выше условия гарантируют получение $n+m-1$ занятых клеток, в которых стоят компоненты опорного плана, что является исходным условием для проверки последнего на оптимальность и нахождения оптимального плана.

Метод северо-западного угла

Следуя правилу *северо-западного угла,* начинают с того, что приписывают переменной x_{11} (расположенной в северо-западном углу таблицы) максимальное значение, допускаемое ограничениями на спрос и объем производства. После этого вычеркивают соответствующий столбец (или строку), фиксируя этим, что остальные переменные вычеркнутого столбца (строки) полагаются равными нулю. После того как спрос и объем производства во всех не вычеркнутых строках и столбцах приведены в соответствие с установленным значением переменной, максимально допустимое значение приписывается первому не вычеркнутому элементу нового столбца (строки).

Метод наименьшей стоимости

Методы наименьшей стоимости обеспечивают получение начального решения путем выбора «дешевых» маршрутов.

Вычисления проводятся следующим образом. Выбирается переменная, которой соответствует наименьшая стоимость во всей таблице, и ей придается возможно большее значение. (Если таких переменных несколько, то берется любая из них.) Вычеркивается соответствующий столбец или строка. Если ограничения по столбцу и строке выполняются одновременно, то, как и в методе *северо-западного угла,* вычеркивается либо столбец, либо строка. После вычисления новых значений спроса и объема производства для всех не вычеркнутых строк и столбцов процесс повторяется при возможно большем значении той переменной, которой соответствует минимальная стоимость среди не вычеркнутых. Процедура завершается, когда таблица исчерпана.

Применяются и модифицированные способы: минимальной стоимости по строке и минимальной стоимости по столбцу.

Способ **минимальной стоимости по строке** основан на том, что мы распределяем продукцию от пункта A_i не в любой из пунктов B_j, а в тот, к которому стоимость перевозки минимальна.

Если стоимости перевозок $c_{i,j}$ и $c_{i,k}$ от пункта A_i к пунктам B_j и B_k равны, то с экономической точки зрения выгоднее распределить продукцию в тот пункт, в котором заявка больше.

Способ **минимальной стоимости по столбцу** аналогичен предыдущему способу. Их отличие состоит в том, что во втором способе мы распределяем продукцию от пунктов B_i к пунктам A_j по минимальной стоимости $c_{j,i}$. Опорный план, составленный способами минимальной стоимости, обычно более близок к оптимальному решению.

Метод Фогеля

При решении задачи методом Фогеля в таблице по строкам и столбцам определяется разность между двумя наименьшими тарифами. Далее в строке (столбце) с наибольшей разностью заполняется клетка с наименьшим тарифом. Строки (столбцы) с нулевым остатком груза в дальнейшем в расчет не принимаются. На каждом этапе загружается только одна клетка. Распределение груза производится по выше рассмотренным правилам.

Оптимизация плана транспортной задачи

При оптимизации плана используется понятие цикла. **Циклом** в транспортной задаче называется несколько занятых клеток, соединённых замкнутой ломаной линией, которая в каждой клетке совершает поворот на 90°, одна из клеток свободная (начало цикла), остальные базисные. Каждый цикл имеет чётное число вершин и значит, чётное число звеньев (стрелок). Существует несколько вариантов цикла, представленных на рис.1.1.

1.) 2.) 3.)

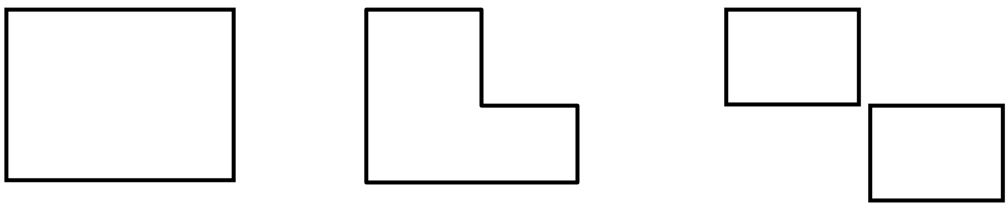

Рис.1.1. Варианты циклов в транспортной таблице

Условимся отмечать знаком “+” те вершины цикла, в которых перевозки необходимо увеличить, а знаком “-“ те вершины, в которых перевозки необходимо уменьшить. Цикл с отмеченными вершинами называется “означенным”. Перенести какое-то количество единиц груза по означенному циклу – это значит увеличить перевозки, стоящие в положительных вершинах цикла, на некоторое количество единиц, а перевозки, стоящие в отрицательных вершинах уменьшить на то же количество. Очевидно, при переносе любого числа единиц по циклу равновесие между запасами и заявками не меняется: по-прежнему сумма перевозок в каждой строке равна запасам этой строки, а сумма перевозок в каждом столбце – заявке этого столбца. Таким образом, при любом циклическом переносе, оставляющем перевозки неотрицательными план остаётся допустимым. Цена цикла равна алгебраической сумме стоимостей, стоящих в вершинах цикла. Обозначим цену цикла через γ. При перемещении одной единицы груза по циклу стоимость перевозок увеличивается на величину γ. При перемещении по нему k единиц груза стоимость перевозок изменится на $k\gamma$. Очевидно, для улучшения плана имеет смысл перемещать перевозки только по тем циклам, цена которых отрицательна. Каждый раз, когда нам удаётся совершить такое перемещение, стоимость плана уменьшается на соответствующую величину $k\gamma$. Так как перевозки не могут быть отрицательными, мы будем пользоваться только такими циклами, отрицательные вершины которых лежат в базисных клетках таблицы, где стоят положительные перевозки. Если циклов с отрицательной ценой в таблице больше не осталось, это означает, что дальнейшее улучшение плана невозможно, то есть оптимальный план достигнут.

Метод последовательного улучшения плана перевозок и состоит в том, что в таблице отыскиваются циклы с отрицательной ценой, по ним перемещаются перевозки, и план улучшается до тех пор, пока циклов с отрицательной ценой уже не останется. При улучшении плана циклическими переносами, как правило, пользуются приёмом, заимствованным из симплекс-метода: при каждом шаге (цикле) заменяют одну свободную переменную на базисную, то есть заполняют одну свободную клетку и взамен того освобождают одну из базисных клеток. При этом общее число базисных клеток остаётся неизменным и равным $m + n - 1$. Этот метод удобен тем, что для него легче находить подходящие циклы.

Для любой свободной клетке транспортной таблицы всегда существует цикл и притом единственный, одна из вершин которого лежит в этой свободной клетке, а все остальные в базисных клетках. Если цена такого цикла, с плюсом в свободной клетке, отрицательна, то план можно улучшить перемещением перевозок по данному циклу. Количество единиц груза k, которое можно переместить, определяется минимальным значением перевозок, стоящих в отрицательных вершинах цикла (если переместить большее число единиц груза, возникнут отрицательные перевозки).

Распределительный метод

достижения оптимального плана предусматривает определение циклов и их цены для всех свободных клеток. От этой трудоёмкой работы избавляет специальный метод решения транспортной задачи, который называется методом потенциалов.

Метод потенциалов

В методе потенциалов строке i и столбцу j транспортной таблицы ставятся в соответствие числа u_i и υ_j. Для каждой *базисной* переменной x_{ij} текущего решения потенциалы u_i и υ_j должны удовлетворять уравнению $u_i + \upsilon_j = c_{ij}$.

Эти уравнения приводят к системе, состоящей из $m+n$-1 уравнений (поскольку всего имеется $m+n$-1 базисных переменных), в которых фигурируют $m+n$ неизвестных. Значения потенциалов можно определить из этой системы, придавая одному из них *произвольное* значение (обычно u_1 полагается равным нулю) и затем решая систему из $m+n$-1 уравнений относительно $m+n$-1 остальных потенциалов.

Уравнения $u_i+\upsilon_j=c_{ij}$, используемые для нахождения потенциалов, имеют настолько простую структуру, что на самом деле их не нужно записывать в явном виде. Обычно гораздо проще определять потенциалы непосредственно из транспортной таблицы, заметив, что u_i строки i и υ_j столбца j прибавляются к c_{ij}, если на пересечении строки i и столбца j находится *базисная* переменная x_{ij}. Определив u_i и υ_j, можно вычислить $\bar{c}_{pq}$ для всех небазисных пебременных x_{pq}, прибавляя u_p строки p к υ_q столбца q и затем вычитая величину c_{pq} стоящую на пересечении строки p и столбца q.

Как только решение получено, оценки для небазисных переменных x_{pq} определяются соотношением

$$\bar{c}_{pq} = u_p + \upsilon_q - c_{pq}.$$

Очевидно, что цена цикла $\gamma_{pq} = -\bar{c}_{pq}$.

Величины $\bar{c}_{pq}$ и γ_{pq} не зависят от выбора значения u_1.

Для включения в базис выбирается небазисная переменная, имеющая *самую большую положительную оценку* $\bar{c}_{pq}$.

Для определения переменной, выводимой из базиса, строим *замкнутый цикл,* соответствующий вводимой в базис переменной

Переменная, выводимая из базиса, выбирается из находящихся на изломах цикла переменных, помеченных знаком '-'. Выводимой из базиса переменной становится та, которая имеет *наименьшее* значение, поскольку именно она раньше всех достигнет нуля, и любое дальнейшее уменьшение делает ее отрицательной

Оптимальный план получен, если все $\bar{c}_{pq} \leq 0$ ($\gamma_{pq} \geq 0$).

Пример. Пусть задана следующая сбалансированная модель в виде транспортной таблицы 1.2:

Таблица 1.2. Модель транспортной задачи

Пункты B_j / A_i	1	2	3	4	Запасы a_i
1	10	0	20	11	15
2	12	7	9	20	25
3	0	14	16	18	5
Запросы b_j	5	15	15	10	

Найдем опорное решение методом северо-западного угла (табл. 1.3).

Таблица 1.3. Опорное решение

Пункты B_j / A_i	1	2	3	4	Запасы a_i
1	5	10			15
2		5	15	5	25
3				5	5
Запросы b_j	5	15	15	10	

Применим метод потенциалов. Уравнения, связанные с базисными переменными, будут иметь вид (табл.1.4):

$x_{11}/u_1+\upsilon_1=c_{11}=10$, $x_{12}/u_1+\upsilon_2=c_{12}=0$, $x_{22}/u_2+\upsilon_2=c_{22}=7$,

$x_{23}/u_2+\upsilon_3=c_{23}=9$, $x_{24}/u_2+\upsilon_4=c_{24}=20$, $x_{34}/u_3+\upsilon_4=c_{34}=18$

Полагая $u_1 = 0$, получим значения потенциалов $\upsilon_1=10$, $\upsilon_2=0$, $u_2=7$, $\upsilon_3=2$, $\upsilon_4=13$ и $u_3=5$.

Оценки для небазисных переменных определяются следующим образом:

$X_{13}/\bar{c}_{13}=u_1+\upsilon_3-c_{13}=0+2-20= -18$, $X_{14}/\bar{c}_{14}=u_1+\upsilon_4-c_{14}=0+13-11=2$,

$X_{21}/\bar{c}_{21}=u_2+\upsilon_1-c_{21}=7+10-12=5$, $X_{31}/\bar{c}_{31}=u_3+\upsilon_1-c_{31}=5+10-0=15$,

$X_{32}/\bar{c}_{32}=u_3+\upsilon_2-c_{32}=5+0-14= -9$, $X_{33}/\bar{c}_{33}=u_3+\upsilon_3-c_{33}=5+2-16= -9$

Поскольку переменная x_{31} имеет максимальную положительную оценку $\bar{c}_{pq}$, она и выбирается в качестве вводимой в базис. Для переменной x_{31} построим *замкнутый цикл.*

Этот цикл можно выразить при помощи базисных переменных следующим образом:

$x_{31}\rightarrow x_{11}\rightarrow x_{12}\rightarrow x_{22}\rightarrow x_{24}\rightarrow x_{34}\rightarrow x_{31}$. *Несущественно, в каком направлении (по часовой или против часовой стрелки) происходит обход цикла.*

Таблица 1.4. Вычисление потенциалов

Пункты B_j/A_i	1	2	3	4	Запасы a_i	Потенциал u_i
1	5	10			15	0
2		5	15	5	25	7
3				5	5	5
Запросы b_j	5	15	15	10		
Потенциал υ_j	10	0	2	13		

Переменная, выводимая из базиса, выбирается из находящихся на изломах цикла переменных, значения которых уменьшаются при увеличении x_{31}. x_{11} x_{22} и x_{34} — базисные переменные, уменьшающиеся с ростом x_{31}. Выводимой из базиса переменной становится та, которая имеет *наименьшее* значение, поскольку именно она раньше всех достигнет нуля, и любое дальнейшее уменьшение делает ее отрицательной. В данном примере три перечисленных x_{11}, x_{22} и x_{34} имеют одно и то же значение (=5); в этом случае любую из них можно исключить из базиса. Пусть выбрана переменная x_{34}; тогда значение x_{34} становится равным 5, а переменные, находящиеся на изломах цикла (базисные), соответствующим образом корректируются (т. е. каждая из них увеличивается или уменьшается на 5 единиц в зависимости от знака + или -).

Новое решение приведено в табл. 1.5. Соответствующая стоимость — $0\times10+15\times0+0\times7+15\times9+10\times20+5\times0=335$ единиц. Полученная стоимость отличается от стоимости, соответствующей начальному решению, на 410—335=75 единиц, т. е. на величину, приписанную переменной x_{31} (=5) и умноженную на c_{31}.

Базисное решение вырожденное, поскольку базисные переменные x_{11} и x_{22} равны нулю. Однако вырожденность не требует никаких дополнительных мер предосторожности; с нулевыми базисными переменными оперируют точно так же, как с переменными, имеющими положительные значения.

Таблица 1.5. Промежуточное решение

Пункты B_j/A_i	1	2	3	4	Запасы a_i	Потенциал u_i
1	10 **0**	0 **15**	20	11	**15**	0
2	12	7 **0**	9 **15**	20 **10**	**25**	7
3	0 **5**	14	16	18	**5**	-10
Запросы b_j	**5**	**15**	**15**	**10**		
Потенциал υ_j	10	0	2	13		

Оптимальность нового базисного решения проверяется вычислением *новых* потенциалов. Небазисная переменная x_{21}, имеющая наибольшую положительную оценку, войдет в решение. Цикл можно выразить при помощи базисных переменных следующим образом: $x_{21}\rightarrow x_{11}\rightarrow x_{12}\rightarrow x_{22}\rightarrow x_{21}$. Замкнутый цикл показывает, что переменной, исключаемой из базиса, может быть как x_{11} так и x_{22}. Выберем в качестве такой переменной x_{11}.

Продолжая вычисления по указанной схеме, получим таблицу 1.6.

Таблица 1.6. Оптимальное решение

Пункты B_j / A_i	1	2	3	4	Запасы a_i	Потенциал u_i
1	10 **0**	0 **5**	20	11 **10**	**15**	0
2	12	7 **10**	9 **15**	20	**25**	7
3	0 **5**	14	16	18	**5**	-5
Запросы b_j	**5**	**15**	**15**	**10**		
Потенциал υ_j	5	0	2	11		

Суммарные транспортные расходы составляют 315 у.е. и могут быть рассчитаны через потенциалы как

$$\sum_{i=1}^{3} a_i u_i + \sum_{j=1}^{4} b_j v_j = (15\times0+ 25\times7 + 5\times—5) + (5\times5+15\times0+15\times2+10\times11)$$

= 315.

Практическая работа N2

ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА НА MIN ВРЕМЕНИ

Цель работы: Изучение теоретических и практических приёмов решения транспортных задач с нелинейной целевой функцией.

Заменяя в транспортной задаче стоимость доставки на время доставки $t_{i\,j}$ и введя критерий min времени: $min\ T=max\{\ t_{i\,j}\}$, получим новую модель транспортной задачи с нелинейной целевой функцией.

Задачу можно свести к обычной транспортной, применив метод запрещенных клеток.

Метод запрещённых клеток.

Состоит из следующих шагов:

1. Находим опорное решение.

2. Из базисных клеток находим $T=max\ t_{i\,j}$, и все клетки с большим временем – запрещаем для использования,

3. Улучшение плана распределительным методом. Достигается циклическим переносом из клеток x_{ij} с $t_{i\,j}=T$ в свободные клетки с меньшим временем. Допускается вхождение в цикл нескольких свободных клеток, помеченных знаком «+».

4. Переход ко второму пункту до тех пор, пока будет возможно построить цикл.

Покажем решение задачи на минимум времени на примере.

Пусть задана матрица перевозок и построен опорный план методом северо-западного угла (таблица 2.1).

Таблица 2.1. Опорное решение задачи на min T

Пункты B_j / A_i	1	2	3	4	5	Запасы a_i
1	10 **21**	8 **4**	5	6	7	**25**
2	5	6 **33**	6 **1**	6	9	**34**
3	4	8	7 **39**	8 **3**	5	**42**
4	11	4	5	8 **8**	9 **15**	**23**
Запросы b_j	**21**	**37**	**40**	**11**	**15**	

$T=max\{\ t_{\ i\,j}\}=\ t_{11}\ =10$ и все клетки с большим временем запрещаем для использования, у нас это клетка x_{41} с $t_{41}=11$.

Цикл, включающий клетку x_{11}, следующий: $x_{21}\rightarrow x_{22}\rightarrow x_{12}\rightarrow x_{11}\rightarrow x_{21}$, после переноса по циклу получим новую таблицу 2.2 и время $T=max\{\ t_{\ i\,j}\}=\ t_{45}\ =9$ и к запрещенным добавляется клетка x_{11}.

Перенос по циклу $x_{35}\rightarrow\ x_{45}\rightarrow\ x_{44}\rightarrow\ x_{34}\rightarrow\ x_{45}$, а затем $x_{43}\rightarrow$

$x_{45} \to x_{35} \to x_{33} \to x_{43}$ даёт следующую таблицу 9 с $T = max\{ t_{ij}\} = t_{44} = 8$ и клетки x_{45} и x_{25} включаются в число запрещенных.

Таблица 2.2. Промежуточное решение с Т=9

Пункты B_j/A_i	1	2	3	4	5	Запасы a_i
1	10	8 **25**	5	6	7	**25**
2	5 **21**	6 **12**	6 **1**	6	9	**34**
3	4	8	7 **39**	8 **3**	5	**42**
4	11	4	5	8 **8**	9 **15**	**23**
Запросы b_j	**21**	**37**	**40**	**11**	**15**	

Таблица 2.3. Промежуточное решение с Т=8

Пункты B_j/A_i	1	2	3	4	5	Запасы a_i
1	10	8 **25**	5	6	7	**25**
2	5 **21**	6 **12**	6 **1**	6	9	**34**
3	4	8	7 **27**	8	5 **15**	**42**
4	11	4	5 **12**	8 **11**	9	**23**
Запросы b_j	**21**	**37**	**40**	**11**	**15**	

Перенос по циклу $x_{14} \to x_{12} \to x_{42} \to x_{44} \to x_{14}$, а затем $x_{13} \to x_{12} \to x_{42} \to x_{43} \to x_{13}$, затем $x_{32} \to x_{12} \to x_{35} \to x_{33} \to x_{32}$, затем $x_{31} \to x_{32} \to x_{22} \to x_{21} \to x_{31}$ даёт следующую таблицу 10 с $T = max\{ t_{ij}\} = t_{33} = 7$ и клетки x_{12}, x_{32}, x_{34}, x_{44}, включается в число запрещенных.

Попытка построить улучшающий цикл к успеху не приводит. Решение закончено.

Таблица 2.4. Оптимальное решение, T=7

Пункты B_j / A_i	1	2	3	4	5	Запасы a_i
1	10	8	5 **14**	6 **11**	7	**25**
2	5 **19**	6 **14**	6 **1**	6	9	**34**
3	4 **2**	8	7 **25**	8	5 **15**	**42**
4	11	4 **23**	5	8	9	**23**
Запросы b_j	**21**	**37**	**40**	**11**	**15**	

Практическая работа №3

ЗАДАЧА О НАЗНАЧЕНИЯХ

Цель работы: Изучение теоретических и практических приёмов решения транспортных задач с булевскими переменными.

Если в обычной транспортной задаче положить запасы и потребности единичными (булевскими переменными), то получим специальный класс задач о назначениях.

Задачу можно рассматривать как частный случай транспортной. Предложение и спрос в каждом пункте равно 1, т. е. a_i=1, для всех i, b_j=1 для всех j. Стоимость «перевозки» (прикрепления работы i к станку j) равна c_{ij}. Ниже в таблице 3.1 иллюстрируется общая структура задачи о назначениях.

Прежде чем решать задачу методами, ассоциированными с транспортной моделью, необходимо «ликвидировать» дисбаланс, так что $m = n$.

Задачу о назначениях можно представить следующим образом. Пусть

x_{ij}=0, если *j*-я работа не выполняется *i*-м станком,

x_{ij} =1, если *j*-я работа выполняется *i*-м станком.

Теперь задача будет формулироваться так:

найти min $z=\sum_{j=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$ при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=1, \quad i=1,2,\ \ldots,n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}=1, \quad j=1,2,\ \ldots,n,$$

$$x_{ij}=0 \text{ или } 1.$$

Таблица 3.1. Задача о назначениях

		Станки				a_i
		1	2	…	n	
Виды работ	1	C_{11}	C_{12}	…	C_{1n}	1
	2	C_{21}	C_{22}	…	C_{2n}	1
	m	C_{m1}	C_{m2}	…	C_{mn}	1
b_J		1	1	…	1	

Для иллюстрации задачи о назначениях рассмотрим пример с тремя работами и тремя станками (табл. 3.2). Исходное решение (полученное по правилу северо-западного угла) будет, очевидно, вырожденным.

Таблица 3.2. Опорное решение

Станки				
		1	2	3
Виды работ	1	**1** 5	7	9
	2	14	**1** 10	12
	3	15	13	**1** 16

Эта особенность характерна для задачи о назначениях независимо от метода, используемого при получении начального базиса.

Специфическая структура задачи о назначениях позволяет разработать эффективный метод ее решения. Покажем, как реализуется этот метод на примере приведенной выше задачи.

Решение через нуль-базис

Оптимальное решение задачи о назначениях не изменится, если к любой строке или столбцу матрицы стоимостей прибавить (или вычесть) постоянную величину. Этот факт можно доказать следующим образом. Если p_i и q_j вычитаются из i-й строки и j-го столбца, то новые стоимости имеют вид $c_{ij}^{`} = c_{ij} - p_i - q_j$. Отсюда получается новая целевая функция:

$$z' = \sum_i \sum_j c'_{ij} x_{ij} = \sum_i \sum_j (c_{ij} - p_i - q_j) x_{ij} =$$
$$= \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} - \sum_i p_i \sum_j x_{ij} - \sum_j q_j \sum_i x_{ij}$$

Поскольку $\sum_j x_{ij} = \sum_i x_{ij} = 1$, то $z^{`} = z - const$. Отсюда следует, что минимизация исходной целевой функции z приводит к такому же решению, как минимизация z'.

Приведенное соображение показывает, что если можно построить новую $c_{ij}^{`}$-матрицу с нулевыми элементами и эти нулевые элементы или их подмножество соответствуют допустимому решению, то такое решение будет оптимальным, поскольку стоимость не может быть отрицательной.

Если сначала рассмотреть строки табл. 3.2, то получим $c_{ij}^{`}$-матрицу, представленную в табл.3.3. Вычитая $q_3 = 2$ из третьего столбца, последнюю матрицу можно преобразовать так, чтобы она имела больше нулей (табл. 3.4).

Заштрихованными квадратами в табл. 3.4 помечены элементы, соответствующие допустимому (и, следовательно, оптимальному) назначению (1, 1), (2, 3) и (3, 2) со стоимостью 5+12+13=30. Заметим, что эта стоимость равна $p_1+p_2+p_3+q_3$.

Таблица 3.3. Матрица стоимостей Таблица 3.4. Решение

j/i	1	2	3	p_i
1	0	2	4	5
2	4	0	2	10
3	2	0	3	13

j/i	1	2	3
1	**0**	2	2
2	4	0	**0**
3	2	**0**	1

К сожалению, не всегда удается определить допустимое назначение столь просто, как в приведенном примере. Поэтому требуются другие правила для нахождения оптимального решения.

Пусть надо решить задачу о назначениях, в которой стоимость работ представлена в виде некоторой матрицы. Задача распределения работ сводится к построению математического аналога единичной матрицы, роль единиц в которой будут играть нули.

Просматривая строки и столбцы, вычитаем минимальный элемент. Если в полученной матрице удаётся выделить нуль-базис, то решение закончено.

Чтобы выделить нуль-базис нужно применить процедуру min-покрытия нулей. Для этого вычеркиваем нули матрицы min-количеством прямых, если количество прямых равно размерности матрицы стоимостей, то они и задают базис, если это не выполнено, то выбирается наименьший не вычеркнутый элемент. Этот элемент вычитается из всех не вычеркнутых и прибавляется к элементам на пересечении прямых, и процедура покрытия повторяется.

После получения базиса:

$Z=\sum p_i + \sum q_j + \sum W_k$,

где p_i - минимальные элементы по строкам,

q_j - минимальные элементы по столбцам,

W_k- наименьшие не вычеркнутые элементы.

Чтобы получить требуемое распределение работ можно применить следующую процедуру.

В матрице определить минимальное количество нулей в строке и в столбце. Выбранный элемент распределяем, вычеркивая строку и столбец. К оставшейся матрице вновь применить указанную процедуру. Данная процедура одновременно отвечает на вопрос о размерности матрицы стоимостей. Если все работы распределены, то решение получено и оптимально.

Эти правила иллюстрируются на примере, приведенном в таблице 3.5. Выполняя те же начальные шаги, что и раньше, получим таблицу 3.6.

В этом случае невозможно найти допустимое решение, состоящее из нулей.

Дальнейшая процедура состоит в проведении *минимального* числа прямых через некоторые строки и столбцы с тем, чтобы все нули оказались вычеркнутыми. В табл.3.7 показано, как используется это правило.

На следующем шаге выбирается *наименьший* не вычеркнутый элемент (C_{32}=1). Этот элемент вычитается из каждого не вычеркнутого элемента и прибавляется к каждому элементу, стоящему на пересечении проведенных прямых.

Таблица. 3.5. Исходная задача

$\frac{j}{i}$	1	2	3	4
1	1	4	6	3
2	9	7	10	9
3	4	5	11	7
4	8	7	8	5

Таблица 3.6. Матрица с нулями

$\frac{j}{i}$	1	2	3	4
1	0	3	2	2
2	2	0	0	2
3	0	1	4	3
4	3	2	0	0

В результате получается табл. 3.8, которая соответствует оптимальному назначению (1, 1), (2, 3), (3, 2) и (4, 4). Суммарные затраты равны 1+10+5+5=21.

Табл. 3.7. Покрытие нулей

$\frac{j}{i}$	1	2	3	4
1	0	3	2	2
2	2	0	0	2
3	0	1	4	3
4	3	2	0	0

Табл. 3.8. Оптимальное решение

$\frac{j}{i}$	1	2	3	4
1	0	2	1	1
2	3	0	0	2
3	0	0	3	2
4	4	2	0	0

Заметим, что если на последнем шаге оптимальное решение не достигнуто, то процедуру проведения прямых следует повторять до тех пор, пока не будет получено допустимое решение.

Практическая работа №4

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРАТЧАЙШЕГО МАРШРУТА

Цель работы: Изучение теоретических и практических приёмов решения задач нахождения кратчайшего маршрута на сети.

Определение кратчайшего пути на сети без циклов

Наиболее просто решается задача определения пути для сети без циклов, т.е. не имеющей путей возврата. Пусть сеть упорядочена, так что номера пунктов предшественников всегда меньше номеров последующих пунктов. Для упрощения анализа упорядоченная сеть разбивается на ряд последовательных этапов.

Введем следующие обозначения:

d_{ij} – расстояние на сети между *смежными* узлами i и j.

u_j – кратчайшее расстояние между узлами 1 и j, $u_1=0$.

Общая формула для вычисления u_j имеет вид: $u_j= \min_i \{u_j+d_{ij}\}$ (кратчайшее расстояние до предыдущего узла i плюс расстояние между текущим узлом j и предыдущим узлом i).

Из этой формулы следует, что кратчайшее расстояние u_j до узла j можно вычислить лишь после того, как определено кратчайшее расстояние до каждого предыдущего узла i, соединенного дугой с узлом j.

Минимальное расстояние между начальным и конечным узлами находится в конце прямого хода вычислений. Оптимальный маршрут определяется при обратном проходе с использованием условия $u_i= u_j-d_{ij}$.

Заметим также, что полученное решение дает кратчайшее расстояние между узлом 1 и любым из других узлов сети.

Представленный тип вычислений интересен тем, что он имеет рекурсивный характер. Вычисления выполняются с использованием информации обо всех кратчайших расстояниях до *непосредственно предшествующего узла.*

Рекурсивные вычисления представляют собой основу вычислительной схемы динамического программирования.

Рассмотрим алгоритм на примере сети, представленной на рис. 4.1. Предварительно сеть упорядочена и разбита на последовательность этапов, определяющих ход вычислений. Узел 1 представляет начальную точку (исходный пункт), а узел 7- конечную точку (пункт назначения). Заметим, что сеть не имеет циклов, поскольку нет ни одной цепи, связывающей узел с самим собой. Для узла 1 можно вычислить лишь u_2 и $u_{3.}$ (Заметим, что, хотя узел 4 соединен узлом 1 дугой, соответствующее значение u_4 вычислить нельзя, пока не будут определены u_2 и u_3).
Процедура завершается, когда получено значение u_7.

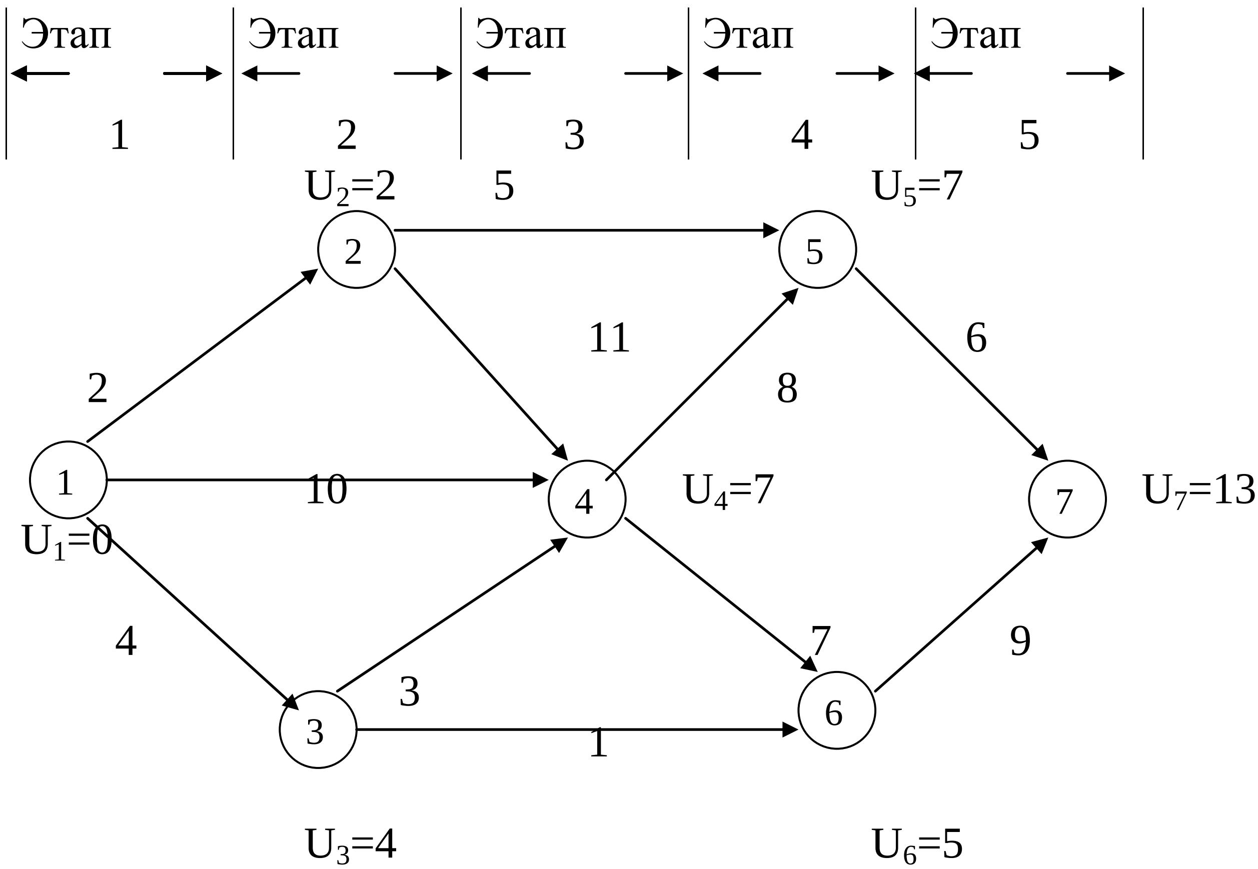

Рис. 4.1. Однонаправленная сетевая модель

Вычислительная схема состоит из следующих этапов:

- ***Этап 1:*** u_1=0.
- ***Этап 2:*** $u_2= u_1+d_{12}=0+2=2$).

$u_3 = u_1 + d_{13} = 0+4=4.$

- ***Этап 3:*** $u_4 = \min \{u_1+d_{14}, u_1+d_{24}, u_1+d_{34}\} = \min \{0+10, 2+11, 4+3\} = 7.$
- ***Этап 4:*** $u_5 = \min \{u_2+d_{25}, u_4+d_{45}\} = \min \{2+5, 7+8\} = 7.$
  $u_6 = \min \{u_3+d_{36}, u_4+d_{46}\} = \min \{4+1, 7+7\} = 5.$
- ***Этап 5:*** $u_7 = \min \{u_5+d_{57}, u_6+d_{67}\} = \min \{7+6, 5+9\} = 13.$

Минимальное расстояние между узлами 1 и 7 равно 13, а соответствующий маршрут- 1→2→5→7, который находится на обратном проходе с использованием условия : $u_i = u_j - d_{ij}$.

Вычисления выполняются с использованием информации обо всех кратчайших расстояниях до *непосредственно предшествующего узла.* Например, в узле 5 величина u_5 вычисляется по кратчайшим расстояниям между узлом 1 и узлами 2 и 4, т.е. u_2 и u_4. Заметим, что не обязательно знать конкретный маршрут, дающий кратчайшее расстояние между узлами 1 и 4. Величина u_4 включает всю информацию, необходимую для узла 4. Именно такая информация позволяет использовать рекурсивные вычисления.

Определение кратчайшего пути на сети с циклами

Введем вспомогательные величины: $\mathbf{V_j = \min_i \{U_i + d_{ij}\}}$,
где: $\mathbf{U_i}$ – кратчайшее растояние между узлами 1 и j,
$\mathbf{d_{ij}}$ – длина дуги между смежными узлами.

Процесс начинается с $\mathbf{i = 1}$ и $\mathbf{V_1 = U_1} = 0$. После определения $\mathbf{V_j}$ полагаем $\mathbf{U_i = V_j}$. Заметим, что $\mathbf{U_i}$ включает расстояние до узла **i**, которое затем используется для определения расстояния до ближайшего узла.

Формула рекурсивная и для сети без циклов решение получается за один проход. При наличии циклов (имеется путь меньшей длины от узлов с большими номерами к меньшим номерам) необходим итерационный процесс, по сути напоминающий метод потенциалов в транспортной задаче.

Конец итерационного процесса определяется по условию

$$\mathbf{d_{ij} \geq V_j - U_i}$$

для всех строк матрицы. При обнаружении несоответствия в строке вычислить новые $\mathbf{V_j = U_i + d_{ij}}$ для j не удовлетворяюших условию, положить $\mathbf{U_j = V_j}$ и продолжить расчет.

Рассмотрим задачу нахождения кратчайшего пути в сети с циклами на конкретном примере. В табл.4.1 приведена матрица сети с циклами. Необходимо найти кратчайший путь из пункта 1 в пункт 10 и обратно.

Таблица 4.1. Матрица расстояний

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1		3			8	11				
2			7	9	2		2			
3		4		15		7		9	3	
4					4		5			4
5		8	2			3		4	1	
6	4	2	1				7	6		7
7		12		5		2			4	8
8	7		6	8		3				
9	4	1	3		7		13	2		6
10				1	4		1	8	5	

Применяя рекурсивную формулу для расчета расстояний, найдем опорное решение (табл.4.2).

Таблица 4.2. Опорное решение

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	U_i
1		3			8	11					0
2			7	9	2		2				3
3		4		15		7		9	3		10
4					4		5			4	12
5		8	2			3		4	1		5
6	4	2	1				7	6		7	8
7		12		5		2			4	8	5
8	7		6	8		3					9
9	4	1	3		7		13	2		6	6
10				1	4		1	8	5		12
V_j	0	3	10	12	5	8	5	9	6	12	

Таблица 4.3. Матрица расстояний от пункта 1

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**U_i**	
1		3			8	11					0	
2			7	9	2		2				3	
3		4		15		7		9	3		10	7
4					4		5			4	12	10
5		8	2			3		4	1		5	
6	4	2	1				7	6		7	8	7
7		12		5		2			4	8	5	
8	7		6	8		3					9	8
9	4	1	3		7		13	2		6	6	
10				1	4		1	8	5		12	
V_j	0	3	10	12	5	8	5	9	6	12		
			7	10		7		8				

В результате получили матрицу расстояний от пункта 1 к любому другому.

Найдем кратчайший путь к пункту 1, используя условие из рекуррентной формулы: $U_i = V_j - d_{ij}$ (Табл.4.4).

Таблица 4.4. Поиск кратчайшего пути.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**U_i**	
1		3			8	11					0	√
2			7	9	2		2				3	√
3		4		15		7		9	3		7	
4					4		5			4	10	
5		8	2			3		4	1		5	√
6	4	2	1				7	6		7	7	
7		12		5		2			4	8	5	
8	7		6	8		3					8	
9	4	1	3		7		13	2		6	6	√
10				1	4		1	8	5		12	√
V_j	0	3	7	10	5	7	5	8	6	12		

Кратчайший путь: 1→2→5→9→10 с расстоянием в 12 единиц.

Для нахождения обратного пути матрица просчитывается от конечного пункта с учетом цикличности сети. Путь длины 7 определяет цепь 10→7→6→1.

Практическая работа № 5

ПРОПУСКНАЯ СПОСОБНОСТЬ СЕТИ

Цель работы: Изучение теоретических и практических приёмов определения пропускной способности сети.

Пропускная способность сети определяется суммой максимальных потоков в двух направлениях. Таким образом, задача сводится к определению максимального потока от истока s к стоку t.

Алгоритм нахождения максимального потока

Рассмотрим задачу определения максимального потока между двумя выделенными узлами связной сети. Каждая дуга сети обладает пропускными способностями в обоих направлениях, которые определяют максимальное количество потока, проходящего по данной дуге. Ориентированная (односторонняя) дуга соответствует нулевой пропускной способности в запрещенном направлении.

Пропускные способности c_{ij} сети можно представить в матричной форме. Для определения максимального потока из истока s в сток t используются следующие шаги.

Шаг 1. Найти цепь, соединяющую s с t, по которой поток принимает положительное значение в направлении $s \to t$. Если такой цепи не существует, перейти к шагу 3. В противном случае перейти к шагу 2.

Шаг 2. Пусть c^{-}_{ij} — пропускные способности дуг цепи (s, t) в направлении $s \to t (t \to s)$ и $\theta = \min\{c^{-}_{ij}\} > 0$

Матрицу пропускных способностей C_{ij} можно изменить следующим образом:

(а) вычесть θ из всех c^{-}_{ij};

(б) прибавить θ ко всем c^{+}_{ij}. При этом общая пропускная способность сети не изменится. Перейти к шагу 1.

Операция (а) дает возможность использовать остатки пропускных способностей дуг выбранной цепи в направлении $s \to t$. Операция (б) восстанавливает исходные пропускные способности сети, поскольку уменьшение пропускной способности дуги в одном направлении можно рассматривать как увеличение ее пропускной способности в противоположном направлении.

Шаг 3. Найти максимальный поток в сети. Пусть $C=\|c_{ij}\|$ — исходная матрица пропускных способностей, и пусть $C^*=\|c^*_{ij}\|$ — последняя матрица, получившаяся в результате модификации исходной матрицы (шаги 1 и 2).

Оптимальный поток $X=\|x_{ij}\|$ в дугах задается как

$$x_{ij}=\begin{cases} c_{ij}-c^*_{ij}, c_{ij}>c^*_{ij} \\ 0, c_{ij}\le c^*_{ij} \end{cases}.$$

Максимальный поток из s в t равен

$$z=\sum_i x_{si}=\sum_j x_{jt}.$$

Тестовый пример

Рассмотрим сеть с указанными на рис.5.1 пропускными способностями.

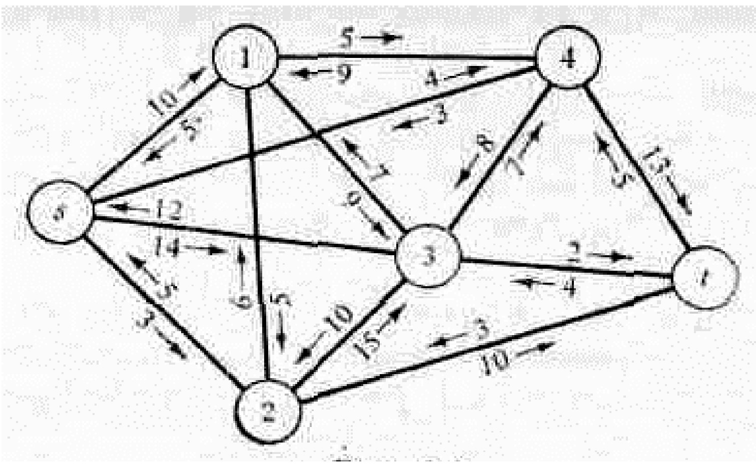

Рис.5.1. Граф сети

Соответствующая матрица пропускных способностей **C** приведена в табл. 5.1. В качестве исходной цепи можно выбрать s→1→4→t.

Таким образом, ячейки (s, 1), (1, 4) и (4, t) помечаются знаком (-), а ячейки (1, s), (4, 1) и (t, 4) - знаком (+). Для данной цепи максимальный поток определяется как $\theta=\min\{c_{s1}, c_{14}, c_{4t}\}=\min\{10, 5,13\}=5$.

Матрица С в табл. 5.1 корректируется путем вычитания $\theta=5$ из всех элементов, помеченных знаком (-), и сложения со всеми элементами, имеющими знак (+). Результаты приведены в табл. 5.2.

Табл. 5.1 .Цепь (s→1→4→t),θ=5

	s	1	2	3	4	t
s		10	3	14	4	
1	5		5	9	5	
2	5	6		15		10
3	12	7	10		7	2
4	3	9		8		13
t			3	4	5	

Табл. 5.2. Цепь s→3→2→t), θ=10

	s	1	2	3	4	t
s		5	3	14	4	
1	10		5	9	0	
2	5	6		15		10
3	12	7	10		7	2
4	3	14		8		8
t			3	4	10	

Результаты последующих итераций приведены в табл. 5.3-5.6.

Табл. 5.3. θ=5
Цепь (s→1→3→4→t)

	s	1	2	3	4	t
s		5	3	4	4	
1	10		5	9	0	
2	5	6		25		0
3	22	7	0		7	2
4	3	14		8		8
t			13	4	10	

Табл. 5.4. θ=3
Цепь (s→1→3→4→t)

	s	1	2	3	4	t
s		0	3	4	4	
1	15		5	4	0	
2	5	6		25		0
3	22	12	0		2	2
4	3	14		13		3
t			13	4	15	

Табл.5.5. Цепь (s→3→t), θ=2

	s	1	2	3	4	t
s		0	3	4	1	
1	15		5	4	0	
2	5	6		25		0
3	22	12	0		2	2
4	6	14		13		0
t			13	4	18	

Табл. 5.6. Нет стока

	s	1	2	3	4	t
s		0	3	2	1	
1	15		5	4	0	
2	5	6		25		0
3	24	12	0		2	0
4	6	14		13		0
t			13	4	20	

Из табл. 5.6 следует, что между s и t нельзя построить цепей с положительным потоком, поскольку все элементы в столбце t равны нулю. Таким образом, табл. 5.6 дает матрицу C^*. В табл. 5.1 (матрица C) и табл.5.6 (матрица C^*) приведены данные, характеризующие оптимальный поток, которые используются для вычисления X=C-C* с заменой отрицательных величин нулями.

В табл. 5.7 дана матрица X, а табл. 5.8 приведена рядом для удобства сравнений исходной матрицы и матрицы потоков.

Таблица 5.7.
Матрица оптимального потока

	s	1	2	3	4	t
s		10		12	3	
1				5	5	
2						10
3			10		5	2
4						13
t						

.

Таблица 5.8.
Исходная матрица

	s	1	2	3	4	t
s		10	3	14	4	
1	5		5	9	5	
2	5	6		15		10
3	12	7	10		7	2
4	3	9		8		13
t			3	4	5	

Из табл. 5.8 видно, что z=10+12+3=10+2+13=25. Сумма всех θ(=5+10+5+3+2=25) также дает максимальный поток. В табл.5.8 показана исходная матрица с отметкой узлов, через которые происходит сток.

Практическая работа №6

КАЛЕНДАРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

Цель работы: Изучение теоретических и практических приёмов работы с календарным планом..

Сетевое планирование и управление (СПУ) программами включает три основных этапа: *структурное планирование, календарное планирование* и *оперативное управление*.

Этап структурного планирования начинается с разбиения программы на четко определенные операции. Затем определяются оценки продолжительности операций и строится сетевая модель (сетевой график, стрелочная диаграмма), каждая дуга (стрелка) которой отображает работу. Вся сетевая модель в целом является графическим представлением взаимосвязей операций программы. Построение сетевой модели на этапе структурного планирования позволяет детально проанализировать все операции и внести улучшения в структуру программы еще до начала ее реализации. Однако еще более существенную роль играет использование сетевой модели для разработки календарного плана выполнения программы.

Конечной целью этапа календарного планирования является построение календарного графика, определяющего моменты начала и окончания каждой операции, а также ее взаимосвязи с другими операциями программы. Кроме того, календарный график должен давать возможность выявлять критические операции (с точки зрения времени), которым необходимо уделять особое внимание, чтобы закончить программу в директивный срок. Что касается некритических операций, то календарный план должен позволять определять их резервы времени, которые можно выгодно использовать при задержке выполнения таких операций или с позиций эффективного использования ресурсов.

Заключительным этапом является оперативное управление процессом реализации программы. Этот этап включает использование сетевой модели и календарного графика для составления периодических отчетов о ходе выполнения программы. Сетевая модель подвергается анализу и в случае необходимости корректируется. В этом случае разрабатывается новый календарный план выполнения остальной части программы.

Сетевое представление программы (сетевая модель)

Сетевая модель отображает взаимосвязи между операциями и порядок их выполнения (отношение упорядочения или следования). Как правило, для представления операции используется **стрелка** (ориентированная дуга), направление которой соответствует процессу реализации программы во времени. Отношение упорядочения между операциями задается с помощью событий. **Событие** определяется как момент времени, когда завершаются одни операции и начинаются другие. Начальная и конечная точки любой операции описываются, таким образом, парой событий, которые обычно называют *начальным событием* и *конечным событием.* Операции, выходящие из некоторого события, не могут начаться, пока не будут завершены все операции, входящие в это событие. Протекание операций во времени задается путем нумерации событий, причем номер начального события всегда меньше номера конечного. Такой способ нумерации особенно удобен при выполнении вычислений на ЭВМ

Правила построения сетевой модели

Правило 1. *Каждая операция в сети представляется одной , только одной дугой (стрелкой).* Ни одна из операций не должна появляться в модели дважды. При этом следует различать случай, когда какая-либо операция разбивается на части; тогда каждая часть изображается отдельной дугой. Так, например, прокладку трубопровода можно расчленить на прокладку отдельных секций и рассматривать прокладку каждой секции как самостоятельную операцию.

Правило 2. *Ни одна пара операций не должна определяться одинаковыми начальным и конечным событиями.* Возможность неоднозначного определения операций через события появляется в случае, когда две или большее число операций допустимо выполнять, одновременно. Чтобы исключить такую “ошибку” между А и конечным (начальным) событием или между *В* и конечным (начальным) событием вводится фиктивная операция. Рис.6.1(*б)* иллюстрирует различные варианты введения такой фиктивной операции *D*. В результате операции *А* и *В* определяются теперь однозначно парой событий, отличающихся либо номером начального, либо номером конечного события. Следует обратить внимание на то, что фиктивные операции не требуют затрат ни времени, ни ресурсов.

Правило 3. При включении каждой операции в сетевую модель для обеспечения правильного упорядочения необходимо дать ответы на следующие вопросы.

а) Какие операции необходимо завершить непосредственно перед началом рассматриваемой операции?

б) Какие операции должны непосредственно следовать после завершения данной операции?

в) Какие операции могут выполняться одновременно с рассматриваемой?

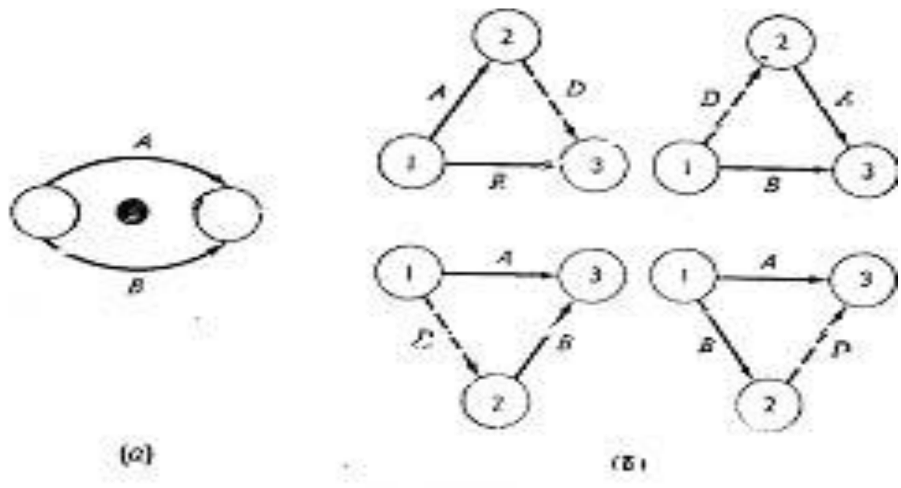

Рис.6.1. Введение фиктивной операции

Эти правила позволяют проверять (перепроверять) отношения упорядочения в процессе построения сети.

Расчет сетевой модели

Применение методов СПУ в конечном счете должно обеспечить получение календарного плана, определяющего сроки начала и окончания каждой операции. Построение сети является лишь первым шагом на пути к достижению этой цели. Вследствие наличия взаимосвязей между различными операциями для определения сроков их начала и окончания необходимо проведение специальных расчетов. Эти расчеты можно выполнять непосредственно на сети, пользуясь простыми правилами. В результате вычислений определяются *критические* и *некритические* операции программы.

Операция считается **критической**, если задержка ее начала приводит к увеличению срока окончания всей программы. **Некритическая** операция отличается тем, что промежуток времени между ее *ранним началом* и *поздним окончанием* (в рамках рассматриваемой программы) больше ее фактической продолжительности. В таком случае говорят, что некритическая операция имеет резерв, или запас, времени.

Определение критического пути

Критический путь определяет непрерывную последовательность критических операций, связывающих исходное и завершающее события сети. Другими словами, критический путь задает все критические операции программы. Метод определения такого пути иллюстрируется на численном примере.

Пример. Рассмотрим сетевую модель, показанную на рис.6.2, с исходным событием 0 и завершающим событием 6. Оценки времени, необходимого для выполнения каждой операции, даны у стрелок.

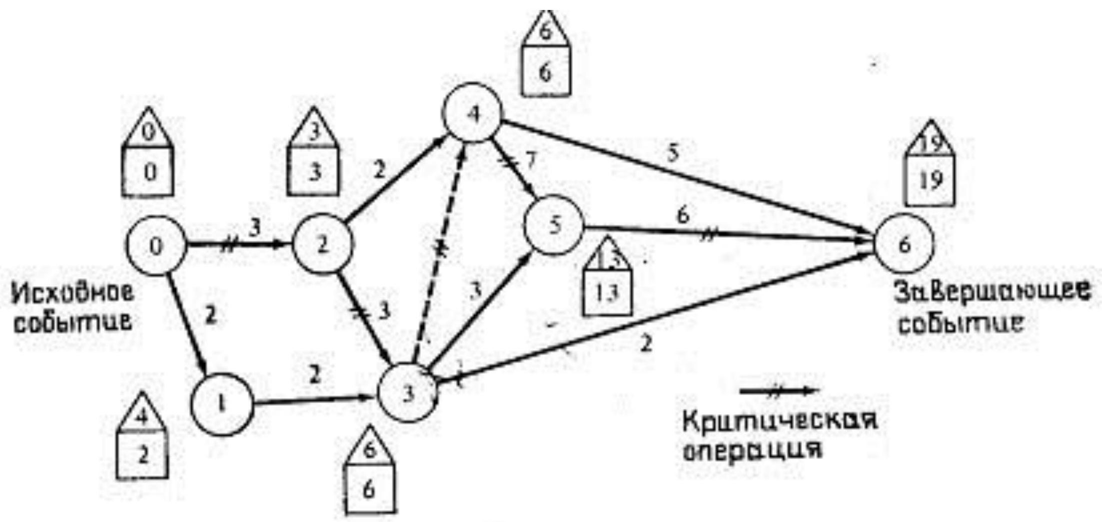

Рис.6.2. Сетевая модель календарного плана

Расчет критического пути включает два этапа. Первый этап называется *прямым проходом*. Вычисления начинаются с исходного события и продолжаются до тех пор, пока не будет достигнуто завершающее событие всей сети. Для каждого события вычисляется одно число, представляющее ранний срок его наступления. Эти числа указаны на рис.6.2 в квадратах. На втором этапе, называемом *обратным проходом*, вычисления начинаются с завершающего события сети и продолжаются, пока не будет достигнуто исходное событие. Для каждого события вычисляется число, представляющее поздний срок его наступления. Эти числа даны в треугольниках.

Рассмотрим **прямой проход**.

Пусть **$tрн_i$** — *ранний срок начала* всех операций, выходящих из события i. Таким образом, **$tрн_i$** , является также ранним сроком наступления события i. Если принять i=0, т. е. считать, что номер исходного события сети равен нулю, то при расчете сети **$tрн_o$**=0. Обозначим символом $\boldsymbol{\tau_{ij}}$ продолжительность операции (i, j). Тогда вычисления при прямом проходе выполняются по формуле

$tрн_j=max\{tрн_i+\tau_{ij}\}$ для всех операций (i,j),

где $tрн_o$==0. Следовательно, чтобы вычислить **tрнj** для события j, нужно сначала определить **tрнi** начальных событий *всех* операций (i, j), входящих в событие j.

Применительно к рис.6.2 вычисления при прямом проходе начинаются с $tрн_o$=0, как показано в квадрате над событием 0. Поскольку в событие 1 входит только одна операция (0, 1) продолжительностью τ_{o1}=2, $tрн_i=tрн_o+\tau_{o1}==0+2=2$. Этот результат записан в квадрате у события 1. Рассмотрим далее событие 2. [Заметим, что событие 3 пока рассматривать нельзя, так как срок $tрн_2$ (событие 2) еще неизвестен.] Таким образом, $tрн_2=tрн_0+\tau_{02}=0+3=3$. Поместим этот результат в квадрат у события 2. Перейдем теперь к событию 3. Поскольку в него входят две операции (1, 3) и (2, 3),

$tрн_3 = \max \{ tрн_i + \tau_{i3}\} = \max \{2 + 2{,}3 + 3\} = 6$, i=1,2.

Этот результат также записан в квадрате у события 3.

Вычисления продолжаются аналогичным образом, пока не будут определены значения $tрн_j$, для всех j. Имеем

$tрн_4 = \max \{tрн_i + \tau_{i4}\} = \max \{3 + 2{,}6 + 0\} == 6$, i=2, 3

$tрн_5 = \max \{tрн_I + \tau_{i5}\} = \max \{6 + 3{,}6 + 7\} == 13$, i=3,4

$tрн_6 = \max \{tрн_i + \tau_{i6}\} = \max \{б + 2{,}6 + 5{,}13 + 6\} = 19$, i=3, 4,6

На этом вычисления прямого прохода заканчиваются.

Обратный проход начинается с завершающего события сети. При этом целью является определение $tпо_i$; — *поздних сроков окончания* всех операций, входящих в событие i. Если принять i=n, где n — завершающее событие сети, то $tпо_n=tрн_n$

является отправной точкой обратного прохода. В общем виде для любого события i $tпо_i=\min\{tпо_j—\tau_{ij}\}$ для всех операций (i, j).

Значения tпо (указанные в треугольниках) вычисляются следующим образом:

$tпо_6=tрн_6==19$,

$tпо_5=tпо_6 –\tau_{56}$ = 19-3=13,

$tпо_4=\min\{tпо_j—\tau_{4j}\}=\min=\{13—7, 19—5\}=6$, i = 5,6

$tпо_3=\min\{tпо_j—\tau_{3j}\}=\min\{6—0, 13—3, 19—2\} =6$, i=4, 5, 6

$tпо_2=\min\{tпо_j—\tau_{2j}\}=\min\{6—3, 6—2\}=3$, i=3,4

$tпо_1 = tпо_3—\tau_{13}$ == 6 — 2 = 4,

$tпо_0=\min\{tпо_j—\tau_{0j}\}==\min\{4—2, 3—3\}==0$, i=1,2

Вычисления при обратном проходе закончены.

Теперь, используя результаты вычислений при прямом и обратном проходах, можно определить операции критического пути. Операция (i,j) принадлежит критическому пути**,** если она удовлетворяет следующим трем условиям:

$tрн_i=tпо_i$ **(**1),

$tрн_j=tпо_j$ **(**2),

$tрн_j—tрн_i=tпо_j—tпо_i=\tau_{ij}$ (3).

По существу, эти условия означают, что между ранним сроком начала (окончания) и поздним сроком начала (окончания) критической операции запас времени отсутствует. В сетевой модели это отражается в том, что для критических операций числа, проставленные в квадратах и треугольниках у начальных и конечных событий, совпадают, а разность между числом в квадрате (или треугольнике) у конечного события и числом у начального события равна продолжительности соответствующей операции в квадрате (или треугольнике).

На рис.6.2 критический путь включает операции (0, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5) и (5, 6). Критический путь определяет минимальную продолжительность всей программы в целом. Заметим, что операции (2, 4), (3, 5), (3, 6) и (4, 6) удовлетворяют условиям (1) и (2), но не условию (3). Поэтому они не являются критическими.

Критический путь представляет собой непрерывную цепочку операций, соединяющую исходные события сети с завершающим.

Определение резервов времени

При определении критического пути необходимо вычислить резервы времени для некритических операций. Очевидно, что резерв времени критической операции должен быть равен нулю. Поэтому она и называется критической.

Прежде чем приступить к вычислению резервов времени, нужно ввести определения еще двух сроков, связанных с каждой операцией. Это срок **позднего начала (tпн)** и срок **раннего окончания** (**tро**), которые для любой операции (i, j) задаются соотношениями

$$tпн_{ij}=tпо_j—\tau_{ij},$$

$$tро_{ij}=tрн_i+\tau_{ij}.$$

Различают два основных вида резервов времени: **полный резерв** (**r**) и **свободный резерв** (**ρ**). Полный резерв времени операции (i,j) представляет собой разность между максимальным отрезком времени, в течение которого может быть выполнена операция (**tпоj—tрн**$_J$), и ее продолжительностью $\boldsymbol{\tau_{ij}}$, т. е.

$$r_{ij}=tпо_j—tрн_j—\tau_{ij}=tпо_j—tро_{ij}=tпн_{ij}—tрн_i.$$

Свободный резерв времени определяется в предположении, что все операции в сети начинаются в ранние сроки. При этом условии величина ρ_{ij} для операции {i, j} представляет собой превышение допустимого отрезка времени (**tрн**$_j$ **—tрн**$_i$) над продолжительностью операции ($\boldsymbol{\tau_{ij}}$}, т. е.

$$\rho_{ij} =tрн_j+tрн_i-\tau_{ij}$$

Результаты расчета критического пути и резервов времени некритических операций можно свести в удобную для пользования таблицу. В столбцах (1),(2),(3) и (6) приведены результаты расчета сети, рассмотренной в примере. Остальные данные легко вычислить по приведенным выше формулам.

В таблице рис.6.3 приведены результаты типичного расчета сетевой модели. Она содержит всю необходимую для построения календарного плана (графика) информацию. Заметим, что только критические операции должны иметь нулевой полный резерв времени.

Результаты расчета критического пути и резервов времени некритических операций можно свести в удобную для пользования таблицу, представленную на рис. 6.3. В столбцах (1),(2),(3) и (6) приведены результаты расчета рассмотренной сети. Остальные данные вычислены по приведенным выше формулам.

Операция (i, j)	Продолжительность	Раннее		Позднее		Полный резерв	Свободный резерв
		начало	окончание	начало	окончание		
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
(0, 1)	2	0	2	2	4	2	0
(0, 2)	3	0	3	0	3	0 [a]	0
(1, 3)	2	2	4	4	6	2	2
(2, 3)	3	3	6	3	6	0 [a]	0
(2, 4)	2	3	5	4	6	1	I
(3, 4)	0	6	6	6	6	0 [a]	0
(3, 5)	3	6	9	10	13	4	4
(3, 6)	2	6	8	17	19	11	11
(4, 5)	7	6	13	6	13	0 [a]	0
(4, 6)	5	6	11	14	19	8	8
(5, 6)	6	13	19	13	19	0 [a]	0

[a] Критическая операция.

Рис. 6.3 . Итоговая таблица результатов расчетов календарного плана

Таблица содержит всю необходимую информацию для построения календарного плана (графика). Заметим, что только критические операции должны иметь нулевой *полный* резерв времени. Когда полный резерв равен нулю, свободный резерв также должен быть равен нулю. Однако обратное неверно, поскольку свободный, резерв некритической операции также может быть нулевым. Так, например, свободный резерв времени некритической операции (0, 1) равен нулю.

Практическая работа №7

АНТАГОНИСТИЧЕСКИЕ ИГРЫ

Самым простым случаем, подробно разработанным в теории игр, является конечная парная игра с нулевой суммой, то есть игра, в которой противоборствуют две стороны *A* и *B* и выполнено условие $ПA(u_{ij}) = -ПB(u_{ij}) = a_{ij}$, т.е. все, что выигрывает *A*, проигрывает *B*, и наоборот. Такая игра называется антагонистической.

Игроки *A* и *B*, имеют противоположные интересы: выигрыш одного равен проигрышу другого. Можно интересоваться только выигрышем игрока *A*. Естественно, что *A* хочет увеличить выигрыш, а *B* хочет его уменьшить. Пусть *A* имеет *m* возможных стратегий s_{1a}, s_{2a}, ... , s_{ma}, а противник *B* – *n*, возможных стратегий s_{1b}, s_{2b}, ... , s_{nb}. Обозначим через a_{ij} выигрыш стороны *A*, если она пользуется стратегией s_{ai}, а противник пользуется стратегией s_{bj}. В принципе мы можем составить прямоугольную матрицу, в которой перечислены стратегии игроков и соответствующие им выигрыши (табл. 7.1).

Таблица 7.1. Матрица игры m*n

A \ B	s_{1b}	s_{2b}	…	s_{nb}
s_{1a}	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
s_{2a}	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…
s_{ma}	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}

Если такая таблица составлена, то говорят, что игра приведена к матричной форме

Предположим, что сторона *A* пытается найти наилучшую из своих стратегий, оценивая выигрыши a_{ij} поочерёдно для каждой своей стратегии. При использовании стратегии s_{1a}, гарантированным будет наименьшее из значений a_{11}, a_{12}, ... , a_{1n}. Лучшего результата ожидать не приходится из-за активных действий противника, который стремится уменьшить выигрыши *A* за счёт выбора своих стратегий. Следовательно, произвольно взятая стратегия $s_{ai}(1 \le i \le m)$ характеризуется показателем $\alpha_i = \min\{a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}\} = \min\limits_{1 \le j \le n} a_{ij}$, и наилучшей с точки зрения *A* является та стратегия, для которой величина α_i максимальна и равна α. Она называется максиминной стратегией, обеспечивающей выигрыш: $\alpha = \max\limits_{1 \le i \le m} \alpha_i = \max\limits_i \min\limits_j \alpha_{ij}$.

При этом подходе отсутствует какой бы то ни было риск или расчет на возможные ошибки со стороны *B*. Если *A* будет придерживаться максиминной стратегии, то выиграет не меньше α, называемой нижней ценой игры или максиминным выигрышем.

Предположим, что аналогичные рассуждения ведёт сторона *B*, но речь идет о проигрышах стороны *A*. Следовательно, произвольно взятая стратегия $s_{jb}(1 \le j \le n)$ должна характеризоваться показателем $\beta_j = \max\{a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{mj}\} = \max\limits_{1 \le i \le m} a_{ij}$, определяющим наибольший из ожидаемых проигрышей. Очевидно лучшей стратегией становится для *B*, стратегия дающая минимум β_j, равный β. Она называется минимаксной стратегией, так как $\beta = \min\limits_{1 \le j \le n} \beta_j = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij}$. Величина β называется верхней ценой игры или минимаксным проигрышем.

Оперирующие стороны могут использовать принцип гарантированного результата (минимакса) в качестве основы принятия решений и добиваться за счёт этого заранее предсказанных результатов.

Чистые и смешанные стратегии

Самым простым, но редко встречающимся, является случай, когда нижняя цена игры совпадает с верхней, то есть $\alpha = \beta$. Примером может служить следующая матрица (табл.7.2).

Здесь $\alpha = \max_i \alpha_i = \beta = \min_j \beta_j = a_{23} = 8$.

Таблица 7.2. Матрица игры с седловой токой.

α_i	B \ A	1	2	3	4	5
-22	1	16	-22	-7	14	-8
8	2	11	10	8	15	21
-13	3	6	-9	6	13	-13
-5	4	2	6	-5	-3	4
β_j		16	10	8	15	21

Этот элемент a_{23} представляет собой седловую точку, соединяющую в себе свойства точки максимума (по одной группе переменных) и точки минимума (по другой группе переменных).

В играх с седловой точкой возникает ситуация равновесия, то есть положение, при котором ни одна из сторон не имеет никаких разумных оснований для изменения своей стратегии, и сохраняется оно сколь угодно долго, если стороны используют, так называемые, чистые стратегии.

На практике наиболее распространённым является случай, когда платёжная матрица вообще не имеет седловой точки и $\alpha \neq \beta$. Проанализируем эту ситуацию на примере (табл.7.3).

Таблица 7.3. Игра без седловой точки

B \ A	s_{1b}	s_{2b}	s_{3b}	s_{4b}	s_{5b}
s_{1a}	6	11	-5	2	8
s_{2a}	17	-2	1	0	-15
s_{3a}	-9	14	3	8	5
s_{4a}	-1	-7	10	4	12

$\alpha = \max\{-5,-15,-9,-7\} = -5$ и $\beta = \min\{17,14,10,8,12\} = 8$.

Следовательно минимаксной стратегией A является s_{1a}, а для B - s_{4b}. Это решение будет наилучшим, если стороны делают только один ход. Если ход не один, и имеется полная информация о прошлом, то каждая сторона, изменяя свои стратегии, может добиться преимущества. В результате каждый ход станет проблематичным и потребует разработки специальных правил. Решение в чистых стратегиях оказывается неустойчивым, в связи с хорошей информированностью сторон о действиях друг друга. Поэтому необходимо как-то скрыть своё поведение от противника, чтобы ослабить влияние информации и получить преимущество. Это достигается путём введения элемента случайности. При этом каждый отдельный ход остаётся непредсказуемым, но вся совокупность ходов обладает определёнными, заранее заданными свойствами. Участники игры просто чередуют свои стратегии в соответствии с разработанной схемой, обеспечивающей нужную вероятность реализации каждой стратегии.

Если p_{ia} - вероятность появления $s_{ia}(i = 1,2,...)$, то можно говорить о распределении вероятностей на множестве стратегий стороны *A*, причем всегда $\sum_{i=1}^{m} p_{ia} = 1$. Произвольно взятое распределение $\{p_{1a},..., p_{ma}\} = S_A$ называется смешанной стратегией стороны *A*, распределение $\{p_{1b},..., p_{nb}\} = S_B$ - смешанной стратегией стороны *B*. Наряду с распределениями $\{p_{1a},..., p_{ma}\} = S_A$ и $\{p_{1a},..., p_{ma}\} = S_A$ для упрощения записи применяют и другие обозначения $\{p_1,..., p_m\} = S_A$ для игрока А и $\{q_1,..., q_n\} = S_B$ для игрока B.

Возможность широкого выбора смешанных стратегий S_A, S_B делает содержательным исследование игр в случае $\alpha \neq \beta$. Более того, введённые понятия сохраняют смысл и в случае $\alpha=\beta$. Возникает вопрос: какими соображениями надо пользоваться при выборе смешанных стратегий? Но оказывается, что принцип минимакса сохраняет своё значение и в этом случае.

Пусть $\{S_A\}$ - множество всех смешанных стратегий стороны *A* в какой либо матричной игре, а $\{S_B\}$ - Множество смешанных стратегий стороны *B*. Если *A* выбирает стратегию $S_A \in \{S_A\}$, а *B* – стратегию $S_B \in \{S_B\}$, то средняя величина платежа определится суммой $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_{ia} p_{jb}$, которая может рассматриваться как характеристика выбранных S_A, S_B. Её удобно обозначить через $a(S_A, S_B)$. Будем считать $a(S_A, S_B)$ выигрышем стороны *A* и проигрышем стороны *B*.

Формируя свою стратегию S_A в игре с полной информацией, сторона *A* должна ориентироваться на худшее, то есть на $\min\limits_{S_B \in \{S_B\}} a(S_A, S_B)$. Тогда оптимальной оказывается стратегия S_A^*, позволяющая достичь $\max\limits_{S_A \in \{S_A\}} \min\limits_{S_B \in \{S_B\}} a(S_A, S_B) = a_A$. Аналогичные рассуждения по поиску оптимальной стратегии стороны *B* приводят к стратегии S_B^*, дающую $\min\limits_{S_B \in \{S_B\}} \max\limits_{S_A \in \{S_A\}} a(S_A, S_B) = a_B$. Таким образом, S_A^*- максиминная, а S_B^*- минимаксная стратегии. Произведенный анализ общих условий ведения антагонистических игр позволяет сформулировать универсальный принцип действия сторон *A* и *B*, основанный на идее гарантированного результата.

Упрощение игры

Простейшим является случай существования седловой точки игры. Поиск оптимального решения сводится здесь к перебору элементов матрицы $||a_{ij}||$ с целью выявить $a_{pq}=\alpha=\beta$. Другими словами, исследование свойств игры автоматически приводит к отысканию оптимальных чистых стратегий s_{pa}, s_{qb}, если обнаруживается равенство $\alpha=\beta$. Для теории этот случай не представляет большого интереса, хотя он встречается на практике.

Пусть установлено, что некоторая игра m×n не имеет седловой точки и, следовательно, ее решение нужно искать в смешанных стратегиях, анализируя те или иные распределения вероятностей

$\{p_{1a}, \ldots, p_{ma}\}=S_A$, $\{p_{1b}, \ldots, p_{nb}\}=S_B$.

Можно ожидать, что процесс отыскания оптимальных стратегий S^*_A, S^*_B окажется довольно трудоемким, особенно при больших m и n, поэтому целесообразно для начала рассмотреть вопрос об упрощении игр как средстве, с помощью которого ускоряется подготовка решений.

Паретовские правила отношений в антагонистических играх можно трактовать следующим образом. Если матрица $||a_{ij}||$ обладает свойствами $a_{kj} \geq a_{rj}$ ($1 \leq k, r \leq m$; $k \neq r$; $j=1, n$) и $a_{kj} > a_{rj}$ хотя бы для одного номера j, то ее k-я строка доминирует над r-й строкой, в случае равенства строки эквивалентны. Аналогично, при $a_{il} \leq a_{ih}$ ($1 \leq l, h \leq n$; $l \neq h$; $i=\overline{1,m}$) и $a_{ih} < a_{il}$ хотя бы для одного номера l столбец i доминирует над столбцом h, в случае равенства столбцы эквивалентны. Очевидно, сторона A всегда должна предпочесть стратегию s_{ka} стратегии s_{ra}, а сторона B s_{ib} стратегии s_{hb} (предполагается, что речь идет о выигрышах A и о проигрышах B). Следовательно, цена игры должна остаться неизменной при сохранении в матрице $||a_{ij}||$ только доминирующих строк и столбцов, что позволяет уменьшить m и n, т. е. упростить исследования.

Таким образом, приступая к исследованию любой игры $m \times n$, необходимо сначала проверить, имеет ли матрица $||a_{ij}||$ седловые точки и связанные с ними решения в чистых стратегиях. Если этого нет, то нужно попытаться выявить доминирующие стратегии (строки и столбцы), а также стратегии, приводящие к одинаковым (дублированным) результатам

В итоге определяется игра $m' \times n'$ ($2 \leq m' \leq m$; $2 \leq n' \leq n$) без седловых точек, представляющая собой аналог исходной игры $m \times n$.

Если рассматриваемые операции дадут желаемый результат, то упростится поиск оптимальных решений (за счет снижения размерности задачи).

Игровые модели. Графоаналитический метод решения

Цель работы: Изучение теоретических и практических приёмов решения игровых моделей.

Графоаналитический метод решения применим к играм вида **$2 \times n$ и $m \times 2$**, в которых хотя бы один игрок имеет только две стратегии. Рассмотрим .следующую игру вида 2 x n (табл.7.4). Предполагается, что игра не имеет седловой точки.

Поскольку игрок *A* имеет только две стратегии, то p_2=1-p1 и ожидаемые выигрыши игрока A, соответствующие *чистым* стратегиям игрока B, представлены в таблице 7.5.

Таблица 7.4. Платежная матрица игры 2 x n

B / A	q_1	q_2	…	q_n
p_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
p_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}

Таблица 7.5. Ожидаемые выигрыши.

Чистые стратегии игрока B	Ожидаемые выигрыши игрока А
1	$(a_{11} - a_{21})\, p_1 + a_{21}$
2	$(a_{12} - a_{22})\, p_1 + a_{22}$
…	…
n	$(a_{1\,n} - a_{2\,n})\, p_1 + a_{2\,n}$

Отсюда видно, что ожидаемый выигрыш игрока *А* линейно зависит от p_1. В соответствии с критерием минимакса для игр в смешанных стратегиях игрок *А* должен выбирать p_1 так, чтобы максимизировать свой минимальный ожидаемый выигрыш. Эта задача может быть решена графически построением прямых линий, соответствующих линейным функциям от p_1.

Рассмотрим решение на примере (табл.7.6).

Таблица 7.6. Платежная матрица вида 2x4

B / A	1	2	3	4
1	2	2	3	-1
2	4	3	2	6

Эта игра не имеет седловой точки. Ожидаемые выигрыши игрока *А,* соответствующие чистым стратегиям *В,* представлены в таблице 7.7.

На рис. 7.1 изображены четыре прямые, являющиеся графиками этих функций от p_1.

Таблица 7.7. Ожидаемые выигрыши.

Чистые стратегии игрока В	Уравнения прямых для выигрышей игрока А	Ожидаемые выигрыши игрока А
1	$\nu_1 \le 2p_1+4p_2$	$-2p_1+4$
2	$\nu_2 \le 2p_1+3p_2$	$-p_1+3$
3	$\nu_3 \le 3p_1+2p_2$	p_1+2
4	$\nu_1 \le -p_1+6p_2$	$-7p_1+6$

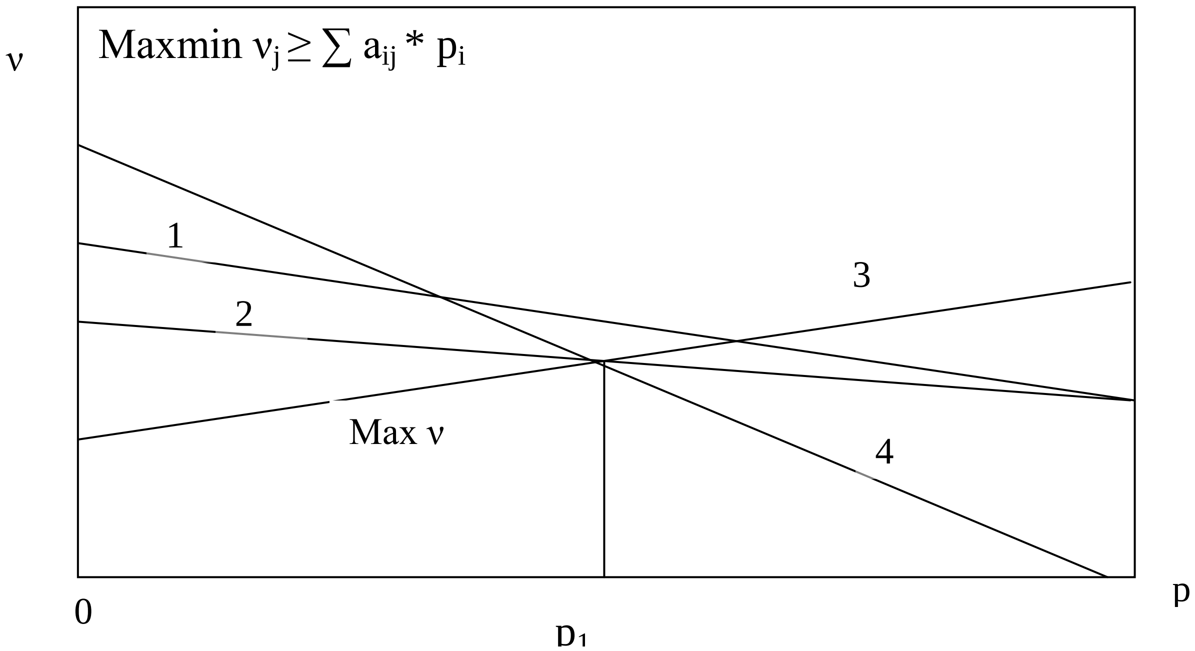

Рис 7.1. Графическое решение игры по отношению к игроку А

Максимин достигается при $p_1 = ½$. В этой точке пересекаются *любые* две из прямых 2, 3 и 4. Следовательно, оптимальной стратегией игрока *А* является ($p_1 = ½$, $p_2 = ½$) и значение игры находится подстановкой p_1 в уравнение любой из прямых, проходящих через максиминную точку. Это дает $\nu^* = 5/2$.

Интересно отметить, что при определении оптимальных стратегий игрока *В* три прямые проходят через максиминную точку. Это означает, что оптимальная стратегия *В* представляет собой совокупность трех стратегий. Любые две прямые, имеющие *противоположные* наклоны, определяют одно возможное оптимальное решение. Таким образом, из трех комбинаций (2, 3), (2, 4) и (3, 4) комбинация (2, 4) должна быть исключена как неоптимальная.

Комбинация (2, 3) дает $q_1=q_4=0$. Следовательно, $q_3 = 1- q_2$. Ожидаемые проигрыши игрока *B,* соответствующие чистым стратегиям *A,* представлены в таблице 7.8.

Таблица 7.8. Ожидаемые проигрыши

Чистые стратегии игрока А	Ожидаемые проигрыши игрока В
1 2	$-q_2+3$ q_2+2

Значение $q_2 = ½$ (соответствующее минимаксной точке) определяется из равенства

$$-q_2+3=q_2+2$$

Отметим, что подстановкой $q_2 = ½$ в выражение для ожидаемого проигрыша игрока *B* можно найти минимаксное значение, равное 5/2, совпадающее, как и должно быть, со значением игры ν^*.

Аналогично может быть рассмотрена и комбинация (3, 4), дающая другое оптимальное решение. Любое взвешенное среднее комбинаций (2, 3) и (3, 4) также будет давать оптимальное решение, в которое входят стратегии 2, 3 и 4.

Пример. Рассмотрим следующую игру вида 4х2 (табл. 7.9).

Таблица 7.9. Игра вида m x 2

A \ B	q_1	q_2
p_1	2	4
p_2	2	3
p_3	3	2
p_4	-2	6

Эта игра не имеет седловой точки. Пусть q_1 и $q_2(=1-q_1)$ - смешанные стратегии игрока *B*. Ожидаемые проигрыши игрока В приведены в таблице 7.10.

Четыре прямые из табл.7.10 изображены на рис. 7.2.

Таблица 7.10. Ожидаемые проигрыши

Чистые стратегии игрока А	Ожидаемые проигрыши игрока В
1	$-2q_1+4$
2	$-q_1+4$
3	q_1+2
4	$-8q_1+6$

Минимаксная точка определяется как самая нижняя точка на огибающей сверху. *V*\ определяет точка пересечения прямых 1 и 3, что дает $q_1=2/3$ и $\nu^*=8/3$.

Прямые, пересекающиеся в минимаксной точке, соответствуют чистым стратегиям 1 и 3 игрока *А*. Это дает $p_2 = p_4 = 0$. Следовательно, $p_1 = 1- p_3$.

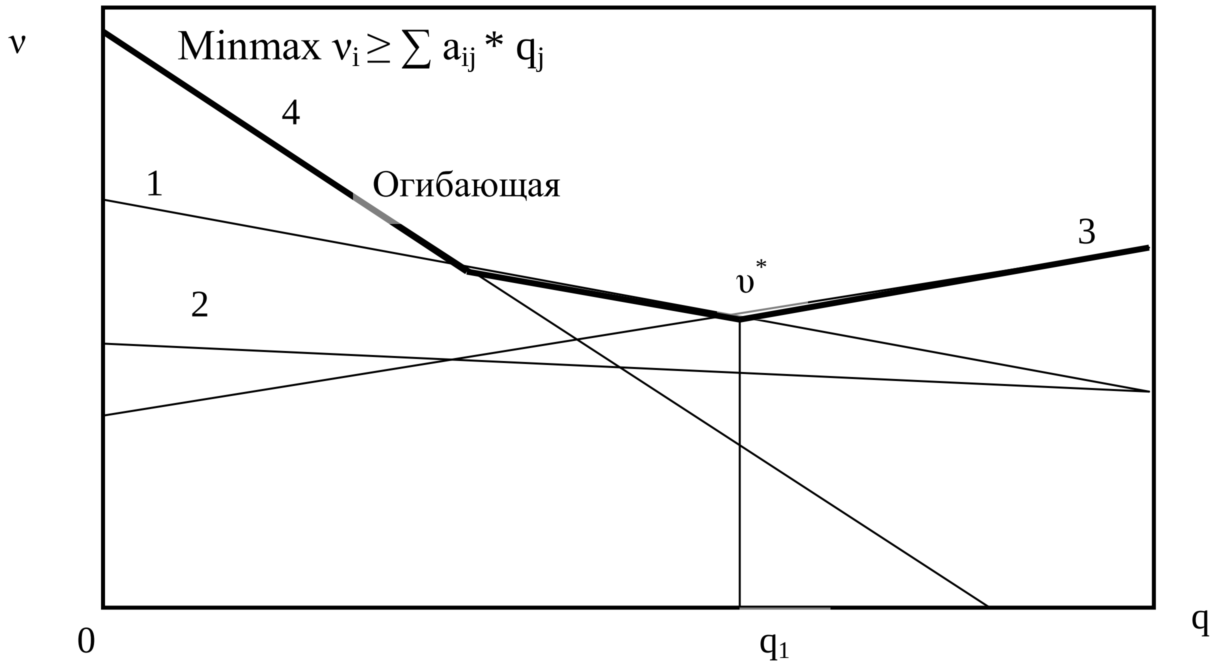

Рис. 7.2. Графическое решение игры по отношению к игроку В

Ожидаемые выигрыши игрока *А,* соответствующие чистым стратегиям игрока *В,* приведены ниже в таблице 7.11.

Значение $p_1 = 1/3$ определяется из уравнения $\mathbf{-p_1+3=2p_1+2}$**,** $p_3=2/3$, $\nu^*=8/3$.

Таблица 7.11. Ожидаемые выигрыши

Чистые стратегии игрока В	Ожидаемые выигрыши игрока А
1	$-p_1+3$
2	$2p_1+2$

Варианты заданий моделей антагонистических игр приведены в таблице П.6. Найти оптимальное решение игры. Предварительно найти оценки игры и упростить игру, используя Паретовские правила отношений.

Практическая работа №8

ИГРОВЫЕ МОДЕЛИ. РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ ИТЕРАЦИЙ

Цель работы: Изучение теоретических и практических приёмов решения игровых моделей методом итераций.

В практических задачах часто нет необходимости находить точное решение игры; достаточно бывает найти приближённое решение, обеспечивающее средний выигрыш, близкий к цене игры.

Ориентировочную цену игры ν можно определить непосредственно из матрицы, зная нижнюю цену игры α и верхнюю β. Если α и β близки, то практически нет надобности заниматься поисками точного решения, а достаточно будет в качестве оптимальных взять чистые минимаксные стратегии. В тех же случаях, когда α и β не близки, приближённое решение игры можно получить, пользуясь **методом итераций** (иначе метод Брауна- Робинссона).

Идея этого метода сводится к следующему. Разыгрывается «мысленный эксперимент», в котором стороны А и В применяют друг против друга свои стратегии. Эксперимент состоит из последовательности отдельных «партий» данной игры. Начинается он с того, что один из игроков (скажем А или «мы») выбирает произвольно одну из своих стратегий, например A_i. Противник В отвечает той из своих стратегий B_j, которая наименее выгодна для нас, т. е. обращает выигрыш при стратегии A_i в минимум. На этот ход мы отвечаем той своей стратегией A_k, которая даёт максимальный выигрыш при стратегии противника B_j. Далее – снова очередь противника. Он отвечает на пару ходов A_i и A_k той своей стратегией B_1, которая даёт наименьший средний выигрыш на одну партию при этих двух стратегиях, и т. д.

На каждом шаге итерационного процесса каждый игрок отвечает на очередной ход другого той своей стратегией, которая является *оптимальной относительно всех предыдущих ходов противника,* рассматриваемых как некая «смешанная стратегия», в которую чистые стратегии входят в пропорциях, определяемых частотой их применения.

Вместо того чтобы вычислять каждый раз средний выигрыш, можно пользоваться просто «накопленным» за предыдущие ходы выигрышем и выбирать ту свою стратегию, при которой этот накопленный выигрыш максимален (минимален).

Можно доказать, что процесс итераций сходится; если такую чередующуюся последовательность партий продолжать достаточно долго, то средний выигрыш, приходящийся на одну партию, будет стремиться к цене игры ν, а частоты P_1^*, P_2^*, …, P_m^*; Q_1^*, Q_2^*, …, Q_n^*, с которыми применялись стратегии A_1, A_2, …, A_m; B_1, B_2, …, B_n, в этом «розыгрыше», будут приближаться к вероятностям p_1, p_2, …, p_m; q_1, q_2, …, q_n в оптимальных смешанных стратегиях: $S_A^*=(p_1, p_2, \dots, p_m)$; $S_B^*=(q_1, q_2, \dots, q_n)$.

Преимущество метода итераций состоит в том, что его сложность сравнительно медленно возрастает с увеличением размера таблицы $m \times n$, тогда как сложность решения задачи линейного программирования резко растёт при увеличении m и n.

Пример. Решить методом итераций игру 3х3 с платежной матрицей (табл.8.1):

Таблица 8.1. Платежная матрица игры 3х3

	B_1	B_2	B_3
A_1	7	2	9
A_2	2	9	0
A_3	9	0	11

Решение. В табл. 8.2 приведены первые 30 шагов процесса итераций. В первом столбце дан номер партии (пары выборов) **k**, во втором – номер **i** выбранной данной партии стратегии игрока А. В последующих трёх столбцах – «накопленный выигрыш» за первые k партий при тех стратегиях, которые применяли оба игрока в предыдущих партиях, при стратегии A_i игрока А в данной партии при стратегиях B_1, B_2, B_3 игрока В в данной партии. Из этих накопленных выигрышей подчеркнут минимальный (если таких минимальных выигрышей несколько, то подчёркиваются они все). Подчёркнутое число определяет собой наивыгоднейшую стратегию игрока В в данной партии – она соответствует той стратегии B_j, для которой достигается минимум накопленного выигрыша (если таких минимумов несколько, берётся любой из них, например, случайным розыгрышем). Номер оптимальной ответной стратегии противника **j** проставляется в следующем столбце. В последующих трёх столбцах приводится накопленный выигрыш за k партий соответственно при стратегиях A_1, A_2, A_3 игрока А. Из этих значений двойным подчёркиванием выделено максимальное; оно определяет собой выбор стратегии игрока А в следующей партии (следующей строке таблицы). В дальнейших столбцах таблицы помещаются такие данные:

$\underline{\nu}$ – минимальный накопленный выигрыш игрока В, делённый на число партий k;

$\underline{\underline{\nu}}$ – максимальный накопленный выигрыш игрока А, делённый на число

партий k;

$\nu^* = (\underline{\nu} + \underline{\underline{\nu}}) / 2$ –среднее арифметическое.

Величина ν^* может служить приближённым значением цены игры.

Подсчитывая число случаев применения игроком каждой стратегии и деля его на число партий k, получим приближённые значения вероятностей, с которыми применяются стратегии в оптимальной смеси

$S_A^* = (p_1, p_2, p_3)$; $S_B^* = (q_1, q_2, q_3)$.

Таблица 8.2 . Экспериментальные данные розыгрыша.

K	i	B1	B2	B3	j	A1	A2	A3	$\underline{\nu}$	ν^*	$\underline{\underline{\nu}}$
1	3	9	0	11	2	2	9	0	0	4.5	9
2	2	11	9	11	2	4	18	0	4.5	6.75	9
3	2	13	18	11	3	13	18	11	3.67	4.84	6
4	2	15	27	11	3	22	18	22	2.75	4.13	5.50
5	1	22	29	20	3	31	18	33	4.00	5.30	6.60
6	3	31	29	31	2	33	27	33	4.84	5.17	5.50
7	1	38	31	40	2	35	36	33	4.43	4.79	5.14
8	2	40	40	40	2	37	45	33	5.00	5.30	5.61
9	2	42	49	40	3	46	45	44	4.45	4.78	5.11
10	1	49	51	49	1	53	47	53	4.90	5.10	5.30
11	3	58	51	60	2	55	56	53	4.64	4.87	5.09
12	2	60	60	60	2	57	65	53	5.00	5.20	5.41
13	2	62	69	60	3	66	65	64	4.61	4.84	5.07
14	1	69	71	69	1	73	67	73	4.93	5.07	5.21
15	3	78	71	80	2	75	76	73	4.74	4.90	5.06
16	2	80	80	80	2	77	85	73	5.00	5.16	5.31
17	2	82	89	80	3	86	85	84	4.71	4.89	5.07
18	1	89	91	89	1	93	87	93	4.95	5.06	5.17
19	3	98	91	100	2	95	96	93	4.79	4.93	5.06
20	2	100	100	100	2	97	105	93	5.00	5.15	5.31
21	2	102	109	100	3	106	105	104	4.76	4.90	5.04
22	1	109	111	109	1	113	107	113	4.97	5.05	5.14
23	3	118	111	120	2	115	116	113	4.83	4.94	5.04
24	2	120	120	120	2	117	125	113	5.00	5.10	5.20
25	2	122	129	120	3	126	125	124	4.80	4.92	5.04
26	1	129	131	129	1	133	127	133	4.96	5.04	5.11
27	3	133	131	140	2	135	136	133	4.86	4.95	5.04
28	2	140	140	140	2	137	145	133	5.00	5.10	5.09
29	2	142	149	140	3	146	145	144	4.84	4.94	5.04
30	1	149	151	149	1	153	147	153	4.97	5.04	5.10

Как видно из таблицы 8.2, величина ν^* незначительно колеблется около цены игры $\nu = 5$. Подсчитывая по таблице частоты применения стратегий A_1, A_2, A_3 в первых 30 партиях, получим:

$P_1^* = 8/30 \approx 0{,}276$; $P_2^* = 15/30 = 0{,}5$; $P_3^* = 7/30 \approx 0{,}233$;

Они оказались довольно близкими к истинным вероятностям:

$p_1 = ¼ = 0{,}25$; $p_2 = ½ = 0{,}5$; $p_3 = ¼ = 0{,}25$.

Аналогично для игрока В находим частоты стратегий B_1, B_2, B_3 в первых 30 партиях:

$q_1^* = 6/30 = 0.2$; $q_2^* = 15/30 = 0.5$; $q_3^* = 9/30 = 0.3$;

Истинные значения: $q_1 = 0.25$; $q_2 = 0.5$; $q_3 = 0.25$.

Если противник будет пользоваться смешанной стратегией

$S_B^* = (0,2; 0,5; 0,3)$,

то наш выигрыш (его проигрыш) ≈5,10 (последняя строка в табл. 8.2), что лишь немного отличается от цены игры 5,0. Заметим, что ставя практическую игровую задачу, мы обычно делаем упрощения и допущения, которые делают излишней погоню за большой точностью решения, так что ориентировочное решение игры, получаемое методом итераций (даже при небольшом числе «партий»), часто может оказаться достаточным.

Таким образом, даже при небольшом числе итераций (k = 30) цена игры и решение находятся с удовлетворительной точностью.

Варианты заданий моделей антагонистических игр приведены в таблице П.6. Найти оптимальное решение игры методом итераций.

Практическая работа №9

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ПОМОЩЬЮ ИГРОВЫХ МОДЕЛЕЙ

Цель работы: Изучение теоретических и практических приёмов составления игровых моделей для задач линейного программирования.

Если игровая модель всегда сводится к паре моделей задач линейного программирования, то обратное утверждение неверно. Рассмотрим перевод задачи линейного программирования к игровой модели.

В общем случае целевая функция $z=\sum c_i * x_i$

Заменой переменных $(c_i * x_i) / z= p_i$ целевая функция приводится к виду $1=\sum p_i$, это основное условие перехода к игровой модели. Так как $p_i \geq 0$, то должно быть выполнено требование $(c_i * x_i) / z \geq 0$ и $z \neq 0$ ввиду невозможности деления на нуль. При $x_i \geq 0$, что обычно ставится одним из условий задач линейного программирования, основным требованием является $\mathrm{sign}(c_i) * \mathrm{sign}(z) \geq 0$. Если условие не выполняется, то можно построить неполную модель игры, принимая отрицательные p_i равными нулю и тем самым полагая равными нулю соответствующие исходные переменные. Неполная модель дает верхнюю оценку целевой функции. Далее будем считать, что требование неотрицательности коэффициентов в целевой функции выполнено. Рассмотрим отдельно задачи на min и max.

Пусть целевая функция $\min z=\sum c_i * x_i$

В ограничения вида

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{m1}x_m \geq b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{m2}x_m \geq b_2 \\ \ldots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{mn}x_m \geq b_n \end{array}\right\}$$

подставим $x_i = (p_i * z) / c_i$, левые и правые части ограничений разделим на z и нормируем ограничения поделив каждое на b_i (по условию b_i положительно определённые коэффициенты). Ограничения с $b_j = 0$ из системы исключаем в дополнительные условия, которым должно удовлетворять конечное решение. Очевидно, что нормировка правой части ограничений может быть выполнена и в начале. В результате получим игровую модель

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{a}_{11}p_1 + \tilde{a}_{21}p_2 + \ldots + \tilde{a}_{m1}p_m \geq \nu_1 \\ \tilde{a}_{12}p_1 + \tilde{a}_{22}p_2 + \ldots + \tilde{a}_{m2}p_m \geq \nu_2 \\ \ldots \\ \tilde{a}_{1n}p_1 + \tilde{a}_{2n}p_2 + \ldots + \tilde{a}_{mn}p_m \geq \nu_n \end{array}\right\}, \ \sum p_i = 1.$$

Учитывая, что в исходной задаче $z \to \min$, то $\eta \to \max$, так что здесь реализуется максиминный критерий для игрока А.

Аналогично для линейной модели на $\max z=\sum c_i * x_i$ с ограничениями вида

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{m1}x_m \leq b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{m2}x_m \leq b_2 \\ \ldots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{mn}x_m \leq b_n \end{array}\right\}$$

подстановка и нормировка приводят к следующей игровой модели

$$\left.\begin{array}{l}\tilde{a}_{11}q_1+\tilde{a}_{21}q_2+\ldots+\tilde{a}_{m1}q_m\le\nu_1\\ \tilde{a}_{12}q_1+\tilde{a}_{22}q_2+\ldots+\tilde{a}_{m2}q_m\le\nu_2\\ \ldots\\ \tilde{a}_{1n}q_1+\tilde{a}_{2n}q_2+\ldots+\tilde{a}_{mn}q_m\le\nu_n\end{array}\right\},\ \sum q_i=1.$$

Учитывая, что в исходной задаче $z\to\max$, то $\eta\to\min$, так что здесь реализуется минимаксный критерий для игрока B.

Необходимо отметить, что вид экстремума меняется в двойственной задаче с одновременной заменой знака отношений в ограничениях. Игровая модель (матрица игры) одна и та же как для прямой, так и для двойственной задач, так как решения для игроков как раз и определяют свойство двойственности.

После решения игры (например, методом итераций) определяем решение исходной задачи линейного программирования с помощью восстановления цепочки замены переменных.

Рассмотрим решение на примере известной из раздела линейного программирования задачи:

найти $\max z=2x_1+3x_2$

при ограничениях

$$\begin{array}{l}2x_1+x_2\le 6\\ x_1+2x_2\le 8\\ x_1-x_2\le 1\\ x_1\le 2\end{array},\quad \forall x_i\ge 0.$$

Сравнивая вид неравенств в ограничениях с игровыми моделями выше, видим, что модель игры нужно строить как минимаксную для игрока B.

Разделим целевую функцию на z и положим ее равной единице, т.е.

$1=q_1+q_2$, откуда $\mathbf{x_1=(1/2)\,q_1\,z,\ x_2=(1/3)\,q_2\,z}$ и подстановка в ограничения после нормировки и деления на z даёт следующую игровую модель

$$\begin{aligned} &\frac{1}{6}q_1 + \frac{1}{18}q_2 \le \nu \\ &\frac{1}{16}q_1 + \frac{1}{12}q_2 \le \nu \\ &\frac{1}{2}q_1 - \frac{1}{3}q_2 \le \nu \\ &\frac{1}{4}q_1 \le \nu \end{aligned}$$, соответствующая матрица игры $A=\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{18} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$

На рисунке 9.1 приведено графическое решение игровой модели.

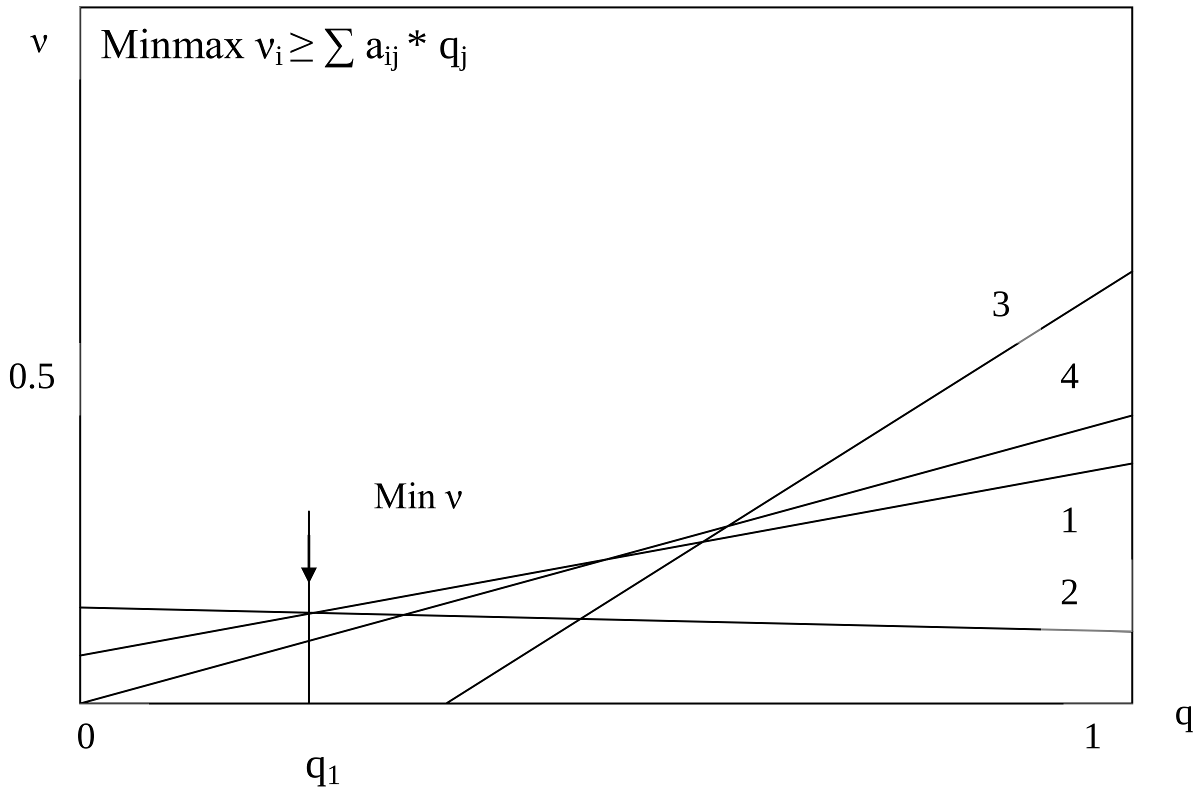

Рис 9.1. Графическое решение задачи

Экстремальная точка определяется первым и вторым уравнением. С учетом условия нормировки вероятностей имеем три уравнения для трех переменных. Их решение дает q_1 = 4/19 q_2 = 15/19, ν = 3/38, обратная подстановка приводит к исходным данным: x_1 = 4/3, x_2 = 10/3, z = 38/3, что совпадает с ранее найденным решением.

Заметим, что результирующая матрица игры состоит всего из двух первых строк.

Рассмотрим теперь двойственную задачу. Модель для нее:

$\min z=6y_1+8y_2+y_3+2y_4$

при ограничениях

$$\begin{matrix} 2y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \geq 2 \\ y_1 + 2y_2 - y_3 \geq 3 \end{matrix}, \ \forall y_i \geq 0.$$

После нормировки

$$\begin{matrix} y_1 + \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3 + \frac{1}{2}y_4 \geq 1 \\ \frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 - \frac{1}{3}y_3 \geq 1 \end{matrix},$$

т.е. имеем maxmin и модель для игрока А.

Из z y_1=1/6p_1z, y_2=1/8p_2z, y_3=p_3z, y_4=1/2p_4z и подстановка в ограничения после деления на z дает следующие соотношения

$$\begin{matrix} \frac{1}{6}p_1 + \frac{1}{16}p_2 + \frac{1}{2}p_3 + \frac{1}{4}p_4 \geq \nu \\ \frac{1}{18}p_1 + \frac{1}{12}p_2 - \frac{1}{3}p_3 \geq \nu \end{matrix}.$$

Соответствующая матрица игры совпадает с ранее найденной.

Модель с положительными и отрицательными коэффициентами в целевой функции

Оценка решения

Наиболее просто отыскивается оценка решения. Считая, что в целевой функции должны быть положительные слагаемые (так как соответствующие им вероятности есть положительные числа), можно положить равными нулю переменные с отрицательными слагаемыми и решить полученную задачу.

Рассмотрим **модель с положительными и отрицательными коэффициентами в целевой функции**.

Пусть задана линейная модель в виде:

Min z = $5x_1$-$2x_3$,

ограничения $\begin{pmatrix} -5x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 2 \\ -x_1 + x_3 + x_4 \leq 5 \\ -3x_1 + 5x_4 \leq 7 \end{pmatrix}, \ \forall x_i \geq 0.$

По виду ограничений соответствующая игровая модель - minmax для игрока В, поэтому вид экстремума нужно изменить. Так как min z = max(-z), то получим целевую функцию в виде max z = -$5x_1$+$2x_3$. Первый коэффициент отрицательный, поэтому адекватную линейной модели игровую модель построить нельзя. Полагая $q_1=0$, и, следовательно, $x_1=0$, получим $q_2=0$, $q_4=0$, $x_2=0, x_4=0$ соответствующая игровая модель

$$\begin{matrix} \frac{1}{2}q_3 \le \nu \\ \frac{1}{10}q_3 \le \nu \end{matrix} \quad \text{и матрица игры } A=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{10} \end{bmatrix}.$$

Минимальный проигрыш соответствует нижнему элементу матрицы, решение получено в чистых стратегиях: $q_3 = 1$, $\nu = 1/10$, $\max(-z)=10$, $x_1 =0$, $x_3=1/2\ q_3 * 10 = 5$, $z = -10$.

Подставим найденное решение в исходную систему ограничений:

$-x2 + 2*5 \le 2$, $5 +x4 \le 5$. Отсюда $x_4 =0$, $x_2 = 8$.

Решив задачу симплекс-методом, получим X = (0, 8, 5, 0, 0, 0, 7), min z = -10.

В общем случае нужно помнить, что мы получаем оценку решения, но, заметьте, насколько прост метод.

Приведение модели с положительными и отрицательными коэффициентами в целевой функции к стандартному виду

Такое приведение осуществляется с помощью замены переменных вида $M_i - x_i = y_i$ так, чтобы выполнялось $y_i \ge 0$, а правые части ограничений были положительно определенными. Замена переменных не меняет решения. Если окажется, что правые части могут быть представлены как больше нуля, а знаки неравенств одного вида, то задача решается стандартным способом, в противном случае решение усложняется.

Рассмотрим пример:

Найти $\max z =3x_1 - 2x_2$ при ограничениях:

$2x_1 +x_2 \le 11$,

$-3x_1 + 2x_2 \le 10$,

$3x_1 + 4x_2 \ge 20$, $\forall x_i \ge 0$.

Сделаем замену переменной, положив $y_2 = (M - x_2)$, получим

Найти $\max z =3x_1 + 2y_2$ при ограничениях:

$2x_1 - y_2 \le 11 - M$, $M \le 11$,

$-3x_1 - 2y_2 \le 10-2M$, $M \le 5$,

$-3x_1 + 4y_2 \le - 20 +4M,\ M \ge 5.$

Неравенства выполняются при M=5 и принимают вид :

$2x_1 - y_2 \le 6,$

$-3x_1 – 2y_2 \le 0,$

$-3x_1 + 4y_2 \le 0.$

Введя замену переменных $3x_1 / z = q_1$, $2y_2 / z = q_2$, получим

$q_1 / 9 - q_2 / 12 \le \nu$, $\nu = 1 /z$,

$-q_1 - q_2 \le 0,$

$-q_1 + 2q_2 \le 0,$

$q_1 + q_2 = 1$ из условия z.

Второе неравенство выполняется всегда и может быть отброшено, третье неравенство не зависит от ν и из условия наличия экстремума на границе области из последних двух уравнений $q_1 = 2q_2$ и $q_1 + q_2 = 1$ находим $q_1 = 2/3$, $q_2 = 1/3$. Подстановка в первое уравнение даёт $\nu = 5/108$ и обратная развертка даёт искомое решение: $z =108/5$, $x_1= 24/5$, $y_2 = 18/5$, $x_2 = 7/5$, что совпадает с точным решением.

При большей размерности задач для решения игровой модели можно использовать метод итераций.

Варианты заданий моделей задач линейного программирования приведены в таблице П.1 практического пособия (часть I). Построить игровую модель и найти решение (и/или оценки) задачи линейного программирования методами теории игр.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вентцель Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология. М., Наука, 1980.
2. Вентцель Е. С. «Исследование операций»-М.: Наука, 1980
3. Геронимус Б.А. Экономико-математические методы в планировании на автомобильном транспорте. М.: Транспорт, 1982
4. Данциг Дж. Линейное программирование, его применения и обобщения. М.: Прогресс, 1966.
5. Давыдов Э. Г. Исследование операций : Учебное пособие для студентов вузов. - М. : Высш. шк., 1990.
6. Дегтярев Ю. И. Исследование операций : Учебник для вузов по спец. АСУ.- М. : Высш. шк., 1986.
7. Зайченко Ю.П. Исследование операций. Киев, Вища школа, 1988.
8. Зайченко Ю.П., Шумилова С.А. Исследование операций: Сб. задач 2-е изд., перераб. и доп. - К.: Высш. шк.,1990.
9. Мину М. Математическое программирование. Теория и алгоритмы: Пер. с фр. и предисловие А.И. Штерна. - М.: Наука. Гл. ред. физ. - мат. лит.,1990.
10. Таха Х. Введение в исследование операций: В 2-х книгах. Кн.2. Пер. с англ. - М.: Мир, 1985.
11. Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. Линейное программирование. М., Физматгиз, 1963.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица П1. Варианты заданий транспортной модели

N	Стоимость перевозки							N	Стоимость перевозки					
1						A_i		2						A_i
		1	8	2	3	30			2	6	3	4	8	40
		4	7	5	1	50			1	5	6	9	7	30
		5	3	4	4	20			3	4	1	6	10	35
B_j		15	15	40	30			B_j	20	34	16	10	25	
3						A_i		4						A_i
		2	4	5	1	60			4	5	6	8	10	130
		2	3	9	4	70			10	3	2	3	15	90
		3	4	2	5	20			4	10	5	1	16	40
B_j		40	30	30	50			B_j	110	30	50	80	90	
5						A_i		6						A_i
		2	4	5	1	60				2	4	1	3	30
		2	3	9	4	70				5	6	5	4	20
		3	4	2	5	20				3	7	9	5	40
										1	2	2	7	50
B_j		40	30	30	50			B_j		35	20	55	30	
7						A_i		8						A_i
		4	5	5	7	100				1	3	3	4	50
		8	7	5	4	120				5	2	7	5	20
		9	6	4	5	150				6	4	8	2	30
		3	2	9	3	130				7	1	5	7	20
B_j		140	130	90	140			B_j		40	30	35	15	
9						Ai		10						Ai
		1	2	6	4	40				2	4	3	2	60
		3	1	3	2	30				3	1	2	3	65
		5	7	5	1	20				5	4	1	5	70
Bj		30	25	18	20			Bj		40	60	70	25	
11						Ai		12						Ai
		10	5	7	4	40				3	2	4	1	50
		7	4	9	10	25				2	3	1	5	40
		6	14	8	7	35				3	2	4	4	20
Bj		15	40	30	15			Bj		30	25	35	20	

N	Стоимость перевозки					
13						Ai
	8	12	4	9	10	60
	7	5	15	3	6	40
	9	4	6	12	7	100
	5	3	2	6	4	50
Bj	30	80	65	35	40	
15						Ai
		18	2	9	7	68
		30	4	1	55	55
		6	4	8	3	20
		2	3	3	16	20
Bj		60	30	50	23	
17						Ai
		2	3	9	7	20
		3	4	6	1	16
		5	1	2	2	14
		4	5	8	1	11
Bj		16	18	12	15	
19						Ai
		1	3	3	8	20
		8	6	2	6	20
		7	7	3	8	40
		5	2	4	5	45
Bj		25	30	40	15	
21						Ai
		1	7	2	5	40
		3	8	4	1	30
		6	3	5	3	50
Bj		20	18	44	75	
23						Ai
		1	9	7	2	30
		3	1	5	5	40
		6	8	3	4	70
		2	3	1	3	60
Bj		35	80	25	70	

N	Стоимость перевозки					
14						Ai
	3	6	8	2	10	130
	1	2	3	5	6	90
	4	4	1	4	8	100
	8	5	1	3	6	140
Bj	50	30	80	100	90	
16						Ai
		1	2	9	7	60
		3	40	15	5	55
		6	4	8	3	40
		24	3	3	1	35
Bj		70	5	45	70	
18						Ai
	3	7	1	5	4	30
	7	5	8	6	3	5
	6	4	8	3	2	45
	3	1	7	4	2	70
Bj	10	35	15	25	35	
20						Ai
		2	5	3	4	45
		6	1	2	5	35
		3	4	3	8	70
Bj		20	60	55	45	
22						Ai
		2	7	3	6	30
		9	4	5	7	70
		5	7	6	2	50
Bj		10	40	20	60	
24						Ai
		1	3	3	8	10
		8	6	2	6	20
		4	7	7	3	35
		5	2	4	5	45
Bj		25	30	40	15	

N	Стоимость перевозки					
25						Ai
	1	5	2	2	1	100
	3	6	2	4	3	15
	8	10	4	5	6	90
	7	3	7	9	1	55
Bj	30	40	65	80	45	
27						Ai
	3	5	8	4	4	100
	8	9	2	3	8	80
	7	4	7	6	10	45
	9	6	5	2	11	75
	5	6	7	8	2	30
Bj	50	80	60	40	70	
29						Ai
	5	2	6	5	4	80
	6	4	2	2	3	80
	8	9	4	7	8	40
	6	2	5	4	5	30
Bj	40	60	65	20	95	
31						Ai
	7	6	1	4	2	10
	5	3	6	2	7	15
	2	7	5	4	7	5
	2	6	5	4	8	20
	6	2	4	2	8	36
	7	3	6	9	4	14
Bj	16	14	28	22	20	
33						Ai
	8	7	6	4	2	25
	10	10	80	1	10	25
	5	3	6	7	9	20
	3	4	5	9	8	20
	2	6	3	2	4	70
Bj	40	20	35	25	40	

N	Стоимость перевозки					
26						Ai
	5	6	12	7	8	105
	4	2	10	9	5	30
	6	9	5	4	8	80
	10	4	3	9	6	20
	3	8	4	2	7	20
Bj	43	10	17	50	100	
28						Ai
	4	2	9	8	4	80
	3	3	5	4	2	30
	8	4	6	2	3	50
	5	6	5	5	0	50
	6	2	8	4	5	40
Bj	40	80	35	75	20	
30						Ai
	10	5	5	3	6	20
	11	12	10	8	7	80
	4	9	16	2	11	40
	3	8	15	6	10	25
	15	8	14	2	5	70
	2	7	4	11	4	40
Bj	60	50	40	50	75	
32						Ai
	9	4	1	8	2	100
	4	5	8	1	5	150
	4	3	3	9	9	50
	9	5	2	5	7	200
	6	2	3	3	9	360
	8	4	3	6	4	140
Bj	160	140	280	220	200	
34						Ai
	5	2	7	2	3	60
	4	4	5	5	8	40
	10	3	4	6	4	30
	9	2	3	7	10	50
	8	5	8	6	1	50
Bj	35	20	70	40	65	

N	Стоимость перевозки						N	Стоимость перевозки					
35						Ai	36						Ai
	6	5	1	3	2	40		6	5	6	9	3	30
	2	6	6	4	7	80		4	2	3	4	4	30
	4	7	6	4	7	75		3	4	5	4	3	30
	9	8	5	2	3	15		8	7	2	2	4	30
	5	3	4	4	3	30		5	4	5	1	6	30
Bj	40	50	60	30	60		Bj	15	15	35	45	40	
37						Ai	38						Ai
	5	5	4	6	2	30		4	8	5	1	4	60
	6	6	5	5	1	50		2	3	6	2	3	40
	7	7	2	7	5	50		5	4	2	3	2	40
	8	4	4	8	4	50		1	2	1	6	5	50
Bj	40	40	20	20	60		Bj	40	30	40	30	50	
39						Ai	40						Ai
	4	8	9	6	3	200		4	10	5	3	4	200
	3	3	10	8	6	100		5	5	4	7	6	120
	5	7	5	4	1	170		8	7	4	5	3	130
	6	3	4	3	5	130		4	5	4	7	8	50
Bj	100	300	100	70	30		Bj	40	70	100	240	50	
41						Ai	42						Ai
	4	11	9	10	7	400		4	6	3	8	5	200
	5	9	8	4	12	160		3	6	7	8	9	250
	6	8	15	12	5	400		4	15	10	12	4	250
	7	15	6	7	2	60		7	8	6	3	4	200
Bj	400	200	100	80	160		Bj	100	100	400	150	150	
43						Ai	44						Ai
	4	5	6	7	8	90		4	10	4	8	9	100
	4	3	8	6	7	100		5	10	6	6	3	400
	1	4	6	7	8	160		6	10	5	6	4	60
	4	6	3	8	5	200		3	6	7	8	5	60
	4	3	2	4	6	80		5	3	1	4	5	60
Bj	80	120	130	240	60		Bj	200	100	80	200	100	

Таблица П2. Варианты заданий задачи о назначениях

N	Стоимость работы							N	Стоимость работы					
1								2						
	1	1	8	2	3	3			2	6	3	4	8	4
	2	4	7	5	1	5			1	5	6	9	7	3
	3	5	3	4	4	2			3	4	1	6	1	5
	2	5	5	4	3	2			2	3	1	1	5	3
	5	4	3	3	5	4			2	3	5	8	9	1
	1	2	4	5	1	6			6	2	4	1	3	3
3								4						
	6	2	4	5	1	6			4	5	6	8	10	13
	4	2	3	9	4	7			10	3	2	3	15	9
	3	3	4	2	5	2			4	10	5	1	16	4
	5	4	3	3	5	4			2	3	5	8	9	1
	2	4	7	5	1	5			1	5	6	9	7	3
	3	5	3	4	4	2			3	4	1	6	1	5
5								6						
	1	2	4	5	1	6			6	2	4	1	3	3
	5	2	3	9	4	7			2	5	6	5	4	2
	2	3	4	2	5	2			5	3	7	9	5	4
	3	3	4	2	5	2			5	1	2	2	7	5
	3	4	3	3	5	1			3	3	2	5	3	1
	2	4	7	5	1	5			1	5	6	9	7	3
7								8						
	4	4	5	5	7	10			2	1	3	3	4	5
	6	8	7	5	4	12			5	5	2	7	5	2
	7	9	6	4	5	15			3	6	4	8	2	3
	2	3	2	9	3	13			1	7	1	5	7	2
	2	14	13	9	14	45			3	4	3	3	1	6
	2	4	7	5	1	5			1	5	6	9	7	3
9								10						
	4	1	2	6	4	4				2	4	3	2	6
	1	3	1	3	2	3				3	1	2	3	5

N	Стоимость работы					
	4	5	7	5	1	2
	6	3	2	1	2	5
	3	4	3	3	5	1
	2	4	7	5	1	5
11						
	5	10	5	7	4	4
	4	7	4	9	10	2
	2	6	14	8	7	3
	3	5	4	3	5	5
	3	4	3	3	5	1
	2	4	7	5	1	5
	6	3	2	1	2	5
13						
	8	12	4	9	10	6
	7	5	15	3	6	4
	9	4	6	12	7	10
	5	3	2	6	4	5
	3	8	6	5	4	3
	4	7	4	9	10	2
15						
	2	18	2	9	7	6
	4	30	4	1	55	5
	4	6	4	8	3	2
	3	2	3	3	16	2
	5		3	5	2	3
	4	7	4	9	10	2
17						
	1	2	3	9	7	2
	8	3	4	6	1	6
	8	5	1	2	2	4
	7	4	5	8	1	1
	1	6	8	2	5	3

N	Стоимость работы					
		5	4	1	5	7
		4	6	7	2	3
	3	3	2	5	3	1
	1	5	6	9	7	3
12						
		3	2	4	1	5
		2	3	1	5	4
		3	2	4	4	2
		3	5	3	2	3
	3	3	2	5	3	1
	1	5	6	9	7	3
		4	6	7	2	3
14						
	3	6	8	2	10	13
	1	2	3	5	6	9
	4	4	1	4	8	10
	8	5	1	3	6	14
	5	3	8	10	9	11
		2	3	1	5	4
16						
	2	1	2	9	7	6
	4	3	4	15	5	5
	4	6	4	8	3	4
	3	4	3	3	1	3
	3	7	5	4	7	5
		2	3	1	5	4
18						
	3	7	1	5	4	3
	7	5	8	6	3	5
	6	4	8	3	2	4
	3	1	7	4	2	7
	10	3	1	5	3	2

N	Стоимость работы					
	4	6	4	8	3	2
19						
	7	1	3	3	8	2
	5	8	6	2	6	2
	4	7	7	3	8	4
	1	5	2	4	5	5
	3	2	3	4	5	3
	1	2	3	9	7	2
21						
	5	1	7	2	5	4
	1	3	8	4	1	3
	4	6	3	5	3	5
	2	2	8	4	5	1
	3	2	3	4	5	3
	1	2	3	9	7	2
23						
	3	1	9	7	2	3
	6	3	1	5	5	4
	7	6	8	3	4	7
	2	2	3	1	3	6
	3	5	8	2	7	5
	2	2	8	4	5	1
25						
	1	5	2	2	1	10
	3	6	2	4	3	5
	8	10	4	5	6	9
	7	3	7	9	1	5
	3	8	4	2	7	2
	3	4	6	8	5	1
27						

N	Стоимость работы					
	4	6	4	8	3	4
20						
	7	2	5	3	4	4
	5	6	1	2	5	3
	4	3	4	3	8	7
	1	5	2	4	5	5
	3	2	6	5	4	3
	3	7	1	5	4	3
22						
	5	2	7	3	6	3
	1	9	4	5	7	7
	4	5	7	6	2	5
	2	1	4	2	6	4
	3	2	6	5	4	3
	3	7	1	5	4	3
24						
	1	1	3	3	8	1
	3	8	6	2	6	2
	6	4	7	7	3	3
	2	5	2	4	5	4
	5	2	3	40	1	5
	2	1	4	2	6	4
26						
	5	6	12	7	8	5
	4	2	10	9	5	3
	6	9	5	4	8	8
	10	4	3	9	6	2
	3	8	4	2	7	2
	4	1	7	5	10	3
28						

N	Стоимость работы					
	3	5	8	4	4	10
	8	9	2	3	8	8
	7	4	7	6	10	4
	9	6	5	2	11	7
	5	6	7	8	2	3
	5	8	6	4	7	2
29						
	5	2	6	5	4	8
	6	4	2	2	3	8
	8	9	4	7	8	4
	6	2	5	4	5	3
	15	8	14	2	5	7
	2	7	4	11	4	4
31						
	7	6	1	4	2	10
	5	3	6	2	7	1
	2	7	5	4	7	5
	2	6	5	4	8	2
	6	2	4	2	8	3
	7	3	6	9	4	4
33						
	8	7	6	4	2	2
	10	10	80	1	10	5
	5	3	6	7	9	2
	3	4	5	9	8	2
	2	6	3	2	4	7
	4	2	3	2	4	9
35						
	6	5	1	3	2	4
	2	6	6	4	7	8
	4	7	6	4	7	7
	9	8	5	2	3	1

N	Стоимость работы					
	4	2	9	8	4	8
	3	3	5	4	2	3
	8	4	6	2	3	5
	5	6	5	5	0	5
	6	2	8	4	5	4
	4	8	3	7	2	2
30						
	10	5	5	3	6	2
	11	12	10	8	7	8
	4	9	16	2	11	4
	3	8	15	6	10	2
	15	8	14	2	5	7
	2	7	4	11	4	4
32						
	9	4	1	8	2	1
	4	5	8	1	5	15
	4	3	3	9	9	5
	9	5	2	5	7	2
	6	2	3	3	9	3
	8	4	3	6	4	4
34						
	5	2	7	2	3	6
	4	4	5	5	8	4
	10	3	4	6	4	3
	9	2	3	7	10	5
	8	5	8	6	1	5
	3	2	7	4	6	5
36						i
	6	5	6	9	3	3
	4	2	3	4	4	3
	3	4	5	4	3	3
	8	7	2	2	4	3

N	Стоимость работы							N	Стоимость работы					
	5	3	4	4	3	3			5	4	5	1	6	3
	4	5	6	3	6	5			1	5	3	4	4	7
37								38						
	5	5	4	6	2	3			4	8	5	1	4	6
	6	6	5	5	1	5			2	3	6	2	3	4
	7	7	2	7	5	5			5	4	2	3	2	4
	8	4	4	8	4	5			1	2	1	6	5	5
	4	4	2	2	6	1			4	3	4	3	5	7
	6	4	8	2	2	3			16	14	8	2	2	3
39								40						
	4	8	9	6	3	20			4	10	5	3	4	20
	3	3	10	8	6	10			5	5	4	7	6	12
	5	7	5	4	1	17			8	7	4	5	3	13
	6	3	4	3	5	13			4	5	4	7	8	5
	10	30	10	7	3	5			4	7	10	24	5	4
	6	4	8	2	2	3			16	14	8	2	2	3
41								42						
	4	11	9	10	7	40			4	6	3	8	5	20
	5	9	8	4	12	16			3	6	7	8	9	25
	6	8	15	12	5	40			4	15	10	12	4	25
	7	15	6	7	2	6			7	8	6	3	4	20
	40	20	10	8	16	15			10	10	40	15	15	7
	6	4	8	2	2	3			16	14	8	2	2	3
43								44						
	4	5	6	7	8	90			4	10	4	8	9	10
	4	3	8	6	7	10			5	10	6	6	3	40
	1	4	6	7	8	16			6	10	5	6	4	6
	4	6	3	8	5	20			3	6	7	8	5	6
	4	3	2	4	6	8			5	3	1	4	5	6
	8	12	13	24	6	7			2	10	8	20	10	9

Таблица П3. Варианты задач определения кратчайшего пути

N	Расстояние							N	Расстояние					
1								2						
		1		2	3					6	3	4		
	2		7		1	5			1		6	9	7	3
		5		4		2			3	4			1	5
	2		5		3				2	3			5	
	5	4		3		4				3	5	8		1
		2	4		1					2	4		3	
3								4						
		2	4	5	1					5	6	8	10	
	4		3	9		7			10		2	3		9
	3	3		2	5				4	10		1		4
	5	4	3			4			2	3	5		9	
	2			5		5			1			9		3
		5		4	4					4		6	1	
5								6						
		2	4	5	1					2	4	1	3	
	5		3		4	7			2		6	5		2
	2	3		2		2			5	3				4
	3		4		5	2			5				7	
	3	4		3					3	3		5		1
		4	7	5						5	6		7	
7								8						
		4	5		7					1	3	3	4	
	6		7	5		12			5		2	7	5	2
	7	9			5				3	6			2	3
		3			3	13			1	7				2
	2		13	9					3	4	3			
		4		5						5	6	9		
9								10						
			2	6	4					2	4		2	
			1	3		3			2			2	3	5

N	Расстояние					
	4	5			1	
	6	3			2	5
	3		3	3		1
		4		5	1	
11						
			5	7	4	
			4	9		2
	2	6				3
	3	5			5	
	3			3		1
		4	7	5		
13						
		12	4	9	10	6
	7		15	3	6	4
	9	4		12	7	10
	5	3	2		4	5
	3	8	6	5		3
	4	7	4	9	10	
15						
			2	9	7	
			4	1		5
	4	6			3	2
	3	2				2
	5		3			
		7	4	9		
17						
		2		9	7	
	8		4	6		6
		5		2	2	4
	7	4	5			
	1		8			3
		6	4		3	

N	Расстояние					
	4			1		7
		4	6		2	
	3	3		5		1
		5	6		7	
12						
		3	2	4	1	
	3			1	5	4
	2			4	4	2
	4	3	5			
	1	3	2			1
		5	6		7	
14						
		6	8	2	10	13
	1		3	5	6	9
	4	4		4	8	10
	8	5	1		6	14
	5	3	8	10		11
		2	3	1	5	
16						
		1	2		7	
	4		4		5	5
	4	6		8	3	
			3		1	3
	3	7		4		5
		2	3	1	5	
18						
		7	1	5		
	7		8	6	3	5
	6	4			2	4
	3	1			2	
		3	1	5		2
		6	4		3	

N	Расстояние					
19						
		1	3		8	
	5		6	2	6	
	4	7		3		4
		5	2		5	5
	3	2		4		3
			3	9	7	
21						
			7	2	5	
			8	4		3
	4	6		5	3	
	2	2	8			1
	3		3			3
	1	2		9	7	
23						
		1	9	7	2	
	6		1		5	
	7	6		3		7
	2		3		3	6
	3	5		2		5
			8	4	5	
25						
		5	2		1	
	3			4	3	5
	8			5	6	9
		3	7			5
	3	8	4			
		4	6	8		
27						
		5	8		4	

N	Расстояние					
20						
			5	3	4	
			1	2		3
	4	3			8	7
	1	5			5	5
	3		6	5		
		7	1	5		
22						
		2	7		6	
	1		4		7	7
	4	5		6	2	
			4			4
	3	2	6			3
		7		5	4	
24						
		1	3		8	
	3		6	2	6	
	6	4		7	3	3
		5	2			4
	5	2	3			5
			4	2	6	
26						
		6			8	
	4			9		3
				4	8	8
		4	3		6	2
	3		4	2		
		1	7	5		
28						
		2	9	8		

N	Расстояние						N	Расстояние					
	8		2	3	8			3			4		3
	7	4		6		4		8				3	
		6	5			7		5	6				5
	5	6				3				8	4		4
			6	4	7				8		7	2	
29							30						
		2	6	5						5	3		
	6		2		3	8					8	7	8
	8	9		7		4		4					4
	6		5		5			3	8				
		8		2		7			8				7
		7	4		4				7	4		4	
31							32						
		6	1	4	2				4	1		2	
	5				7			4		8	1	5	
	2			4		5		4	3		9		5
	2		5		8	2			5	2			2
	6	2		2		3		6	2				3
			6	9	4					3	6	4	
33							34						
			6	4	2				2		2	3	
				1		5		4			5	8	
	5				9	2					6	4	3
	3	4			8	2		9	2	3			5
	2		3	2				8	5	8			5
		2	3	2						7	4	6	
35							36						
		5	1	3	2	4			5		9	3	
	2		6	4	7	8		4		3		4	3
	4	7		4	7	7			4		4	3	3
	9	8	5		3	1		8		2			3
	5	3	4	4		3		5	4	5			

N	Расстояние							N	Расстояние					
	4	5	6	3	6				1		3	4		
37								38						
			4	6	2					8	5		4	
			5	5		5			2			2	3	
	7	7			5				5			3		4
	8					5				2			5	
	4		2			1			4	3	4	3		7
		4		2	2						8		2	3
39								40						
		8	9		3						5	3	4	
	3		10	8		10					4		6	12
	5	7		4	1				8	7		5		
		3	4			13			4		4			5
	10		10			5			4	7				4
		4		2	2					14		2	2	
41								42						
		11	9	10						6	3	8		
	5		8			16			3		7			25
	6	8			5				4	15		12		
	7				2	6			7	8			4	
			10	8		15						15		7
		4		2	2					14			2	

Таблица П4. Задания по определению максимального потока

N	Пропускная способность							N	Пропускная способность					
1								2						
		1	8	2	3					6	3	4	8	4
	2		7	5	1	5			1		6		7	3
	3	5		4	4	2			3	4		6	1	5
	2	5	5		3				2		1			3
	5	4	3	3		4			2	3	5			1
		2	4		1				6	2	4	1	3	

N	Пропускная способность					
3						
		2	4	5	1	
	4		3	9	4	7
	3	3			5	2
	5	4			5	
	2	4	7	5		5
		5	3		4	
5						
		2	4	5	1	
	5		3	9		7
	2	3		2	5	2
	3	3	4			2
	3		3			1
		4	7	5	1	
7						
		4	5	5	7	
	6			5	4	12
	7			4	5	
	2	3	2		3	13
	2	14	13	9		45
	2	4		5		
9						
		1	2	6	4	
	1		1		2	3
	4	5		5	1	
	6		2		2	5
	3	4	3	3		1
		4		5	1	
11						
		10	5		4	
	4		4	9	10	2

N	Пропускная способность					
4						
		5	6	8	10	
	10		2		15	9
	4	10		1	16	4
	2		5		9	1
	1	5	6	9		3
		4	1	6	1	
6						
		2		1	3	3
	2		6	5	4	2
		3		9	5	4
	5		2		7	
	3	3	2			1
	1	5	6	9	7	
8						
		1	3	3	4	
	5			7	5	2
	3			8	2	3
	1	7	1			2
	3	4	3			6
		5	6	9	7	
10						
		2	4		2	
	3		1	2	3	5
	2	5		1	5	7
		4	6			3
	3	3	2			1
		5	6	9	7	
12						
		3	2	4	1	
	2		3	1	5	4

N	Пропускная способность					
	2	6		8	7	3
		5	4			5
	3	4	3			1
		4	7	5	1	
13						
		12		9	10	
	7		15	3	6	4
		4			7	10
	5	3			4	5
	3	8	6	5		3
		7	4	9	10	
15						
			2	9	7	
			4	1	55	5
	4	6		8	3	2
	3	2	3			2
	5		3	5		3
		7	4		10	
17						
		2		9	7	
	8		4	6	1	6
		5		2		4
	7	4	5		1	1
	1	6		2		3
		6	4	8	3	
19						
		1	3	3	8	
	5			2	6	
	4			3	8	4
	1	5	2		5	5
	3	2	3	4		3
			3	9	7	

N	Пропускная способность					
	3	3		4	4	2
	3	3	5			
	3	3	2			1
		5	6		7	
14						
		6	8	2	10	
	1		3	5	6	9
	4	4		4	8	10
	8	5	1			
	5	3	8			11
			3	1		
16						
		1	2	9	7	
	4		4		5	5
		6		8	3	
	3	4	3		1	3
	3	7		4		5
			3	1	5	
18						
		7	1	5		
	7		8	6	3	5
	6	4		3	2	
	3	1	7		2	7
		3	1	5		2
		6		8	3	
20						
		2	5	3	4	
	5		1	2	5	
	4	3		3		7
	1	5			5	5
	3	2	6	5		3
			1	5	4	

N	Пропускная способность					
21						
		1	7	2	5	
	1		8	4	1	3
	4	6			3	5
	2	2			5	
	3	2	3	4		3
		2	3		7	
23						
			9	7	2	
			1	5	5	4
	7	6		3	4	7
	2	2	3		3	6
	3	5	8	2		
		2	8	4		
25						
		5	2	2	1	
	3			4	3	5
	8				6	9
	7	3	7			5
	3	8	4	2		2
		4	6	8	5	
27						
		5	8	4	4	
	8		2	3	8	8
	7	4		6		4
	9	6	5			7
	5	6				3
		8	6	4	7	
29						
		2	6	5		

N	Пропускная способность					
22						
		2	7	3	6	
	1		4	5	7	7
	4	5			2	5
	2	1			6	4
	3	2	6	5		
		7	1	5		
24						
		1	3	3	8	
	3		6	2	6	2
	6	4		7	3	3
	2	5	2			4
	5	2	3			5
		1	4	2	6	
26						
		6			8	5
	4			9	5	3
				4	8	8
		4	3		6	2
	3	8	4	2		2
	4	1	7	5		
28						
		2	9	8	4	
	3		5	4	2	3
	8	4		2		5
	5	6	5		0	5
	6	2		4		4
		8	3	7	2	
30						
		5	5	3		2

N	Пропускная способность					
	6		2	2	3	8
	8	9		7		4
	6	2	5		5	
		8		2		7
		7	4		4	
31						
		6	1	4	2	
	5		6	2	7	1
	2	7		4	7	5
	2	6	5			
	6	2	4			3
		3	6		4	
33						
			6	4	2	2
				1		5
	5			7	9	
	3	4	5		8	2
	2		3	2		7
	4	2		2	4	
35						
		5	1		2	
	2	6	6	4	7	
	4	7		4	7	7
		8	5		3	1
	5	3	4	4		3
			6	3	6	
37						
		5	4		2	
	6		5	5	1	5
	7	7		7	5	5
		4	4		4	5
	4	4	2	2		1

N	Пропускная способность					
	11		10	8	7	8
	4	9		2		4
	3	8	15			2
		8				7
	2	7	4	11	4	
32						
		4	1	8	2	1
	4		8	1	5	
	4	3		9		5
	9	5	2		7	2
	6	2		3		3
	8		3	6	4	
34						
		2		2	3	
	4		5	5	8	4
		3		6	4	3
	9	2	3			5
	8	5	8			5
		2	7	4	6	
36						
		5	6		3	
	4		3	4	4	3
	3	4		4	3	
		7	2		4	3
	5	4	5	1		3
		5		4	4	
38						
		8	5	1	4	
	2		6	2	3	
	5	4		3	2	4
	1	2	1		5	5
	4	3	4	3		7

N	Пропускная способность							N	Пропускная способность					
		4	8	2	2						8	2	2	
39								40						
		8	9	6						10	5	3	4	
	3		10	8	6	10			5		4	7	6	
	5	7		4	1				8	7		5	3	13
	6	3	4		5	13			4	5	4			5
		30	10	7		5			4	7	10			4
		4		2	2						8	2	2	
41								42						
		11	9	10	7	40				6	3	8	5	
	5		8	4	12	16			3		7	8	9	25
	6	8		12	5	40			4	15		12		
	7	15	6		2	6			7	8	6		4	20
	40	20	10	8		15			10	10		15		7
	6	4	8	2	2					14		2	2	

Таблица П5. Варианты задач календарного планирования

N	Длительность работы							N	Длительность работы					
1								2						
		1		2	3					6	3	4		
			7		1	5					6		7	3
				4		2							1	5
					3								5	
						4								1
3								4						
		2	4	,	1					5	6	8	,	
			3	9							2	3		9
				2	5							1		4
						4							9	
						5								3

N	Длительность работы					
		,		4	4	
5						
		2		5		
			3		4	
				2		2
					5	2
7						
		4	5		7	
			7	5		12
					5	
					3	13
9						
		5	2	6		
			1	3		3
					1	
					2	5
						1
11						
			5	7	4	
			4	9		2
						3
					5	
						1
13						
		12	4			

N	Длительность работы					
6						
		2			3	
			6	5		
						4
					7	
						1
8						
		1		3		
			2		5	
					2	3
						2
10						
		2	4		2	
				2	3	5
				1		7
					2	
						1
12						
		3	2			
				1	5	
				4	4	2
						1
14						
		6	8	2		

N	Длительность работы					
			15	3		
				12	7	
					4	5
						3
15						
			2	9	7	
			4	1		
					3	2
						2
17						
		2		9	7	
			4	6		6
				2	2	4
					5	
						3
19						
		1	3		8	
			6		6	
				3		4
					5	5
						3
21						
		4	7	2		
			8	4		3
				5	3	
						1
						3

N	Длительность работы					
			3	5		
				4		10
					6	14
						11
16						
		1	2		7	
			4		5	5
				8	3	
					1	3
						5
18						
		7	1	5		
			8	6		5
					2	4
					2	
						2
20						
		2	5	3		
			1	2		3
					8	
					5	5
22						
		2	7			
			4		7	
				6	2	
						4
						3

N	Длительность работы					
23						
		1		7		
			1		5	
				3		
					3	6
						5
25						
		5	2		1	
				4	3	5
				5	6	
					2	5
						6
27						
		5	8		4	
			2	3	8	
				6		4
						7
						3
29						
		2	3			
			6	5		
					3	8
					4	4
						8
31						

N	Длительность работы					
24						
		1	3		8	
			6	2	6	
				7	3	3
						4
						5
26						
		6	4		8	
				9		3
				4	8	
					6	2
						7
28						
		2	9	8		
				4		3
					3	
						5
						4
30						
		4			3	
			5	3		
				8	7	8
						4
						3
32						

N	Длительность работы							N	Длительность работы					
		6	1							4	1			
				9	7						8	1	5	
				4		5						9		5
					8	2								2
						3								3
33								34						
		3	6		2					2	6	2		
				1		5						5	8	
					9	2						6	4	3
					8	2							3	5
														5
35								36						
		5	1	3	2					5		9	3	
			6	4	7						3		4	3
				4	7	7						4	3	3
					3	1								3
						3								
37								38						
		3	4		2					8	5		4	
			5	5		5						2	3	
				1	5							3		4
					3	5							5	
						1								7
39								40						
		8	9		3					4	5			
			10	8		10					4		6	12
				4	1							5	7	
						13							3	5

N	Длительность работы							N	Длительность работы					
						5								4
41								42						
		11	9	10						6	3	8		
			8			16					7			25
				3	5							12	4	
					2	6							4	
						15								7

Таблица П6. Варианты задач игровых моделей

N	Стоимость выигрыша							N	Стоимость выигрыша					
1								2						
	-1	-4	-8	2	-5	-3			-2	6	3	4	8	4
	2	-4	7	5	1	5			-1	5	6	-9	7	3
	3	5	-3	4	-4	2			-3	4	1	-6	-1	5
	-2	5	5	-4	3	-2			-2	3	-1	1	5	-3
3								4						
	6	2	-4	5	1	6			4	5	6	8	10	13
	-4	2	3	9	-4	7			10	3	2	-3	15	9
	-3	3	4	-2	-5	2			4	3	5	1	16	4
	5	4	4	3	-5	-4			-2	3	5	8	9	-1
5								6						
	1	2	4	5	1	-6			6	2	4	1	3	3
	5	2	3	9	-4	7			2	5	-6	5	4	2
	2	-3	-4	2	5	2			5	-3	7	-9	5	4
	-3	3	5	-2	5	-2			5	1	2	-2	-7	5
	3	4	6	3	5	2			-3	-5	2	5	3	-1
7								8						
	4	4	5	-5	7	-10			-2	1	3	3	4	5
	6	8	7	-5	4	12			3	-5	-4	7	5	2

N	Стоимость выигрыша					
	-7	-9	6	-4	5	15
	-2	3	2	1	3	13
	4	14	3	-2	14	-1
9						
	4	1	-2	6	4	4
	3	3	1	3	2	3
	4	5	-7	-5	-6	-2
	6	3	2	1	-2	5
11						
	-5	10	5	7	4	4
	4	7	-4	9	10	2
	2	6	14	8	7	5
	-3	5	4	3	5	-5
13						
	8	12	4	9	-1	6
	7	5	5	-3	3	-4
	9	7	8	12	7	3
	-5	3	2	6	-4	5
	3	8	6	5	4	-3
15						
	-2	18	4	9	7	6
	-4	30	-4	1	55	5
	4	6	4	4	3	2
	3	3	3	3	16	2
	-5	6	3	5	2	-3
17						
		-2	3	9	7	2
		3	4	-6	-7	6
		-5	-1	2	2	4
		4	5	8	-1	5
		6	8	2	-5	7

N	Стоимость выигрыша					
	3	6	-4	8	2	3
	1	7	4	5	7	4
	3	4	-4	3	1	-6
10						
		2	4	-3	2	6
		3	1	2	3	5
		5	-4	1	5	7
		2	3	-7	-4	-3
12						
		3	-2	4	1	5
		2	3	-1	5	4
		-3	-2	4	-4	2
		3	-5	3	2	-3
14						
	3	-6	8	2	10	13
	1	-7	3	-5	6	9
	4	-4	1	4	8	10
	8	5	-1	3	6	14
	-5	-6	8	10	9	-5
16						
	-2	-1	2	9	7	-6
	4	3	4	15	5	4
	-1	6	4	-8	3	-7
	3	4	3	3	-1	-6
	3	7	5	4	7	-5
18						
	3	-7	-1	5	-4	-3
	17	5	8	6	2	5
	6	4	8	-3	3	4
	3	-1	7	-4	2	7
	10	3	1	5	-3	2

N	Стоимость выигрыша					
19						
		1	-3	3	8	-2
		-8	6	2	6	2
		7	7	3	8	4
		5	2	-4	5	-5
		2	3	4	-5	3
21						
		1	7	2	-5	-4
		3	-8	4	1	3
		-6	3	5	-7	5
		2	8	4	-5	-1
23						
		1	9	-7	2	-8
		-3	1	5	5	4
		6	8	-3	4	-7
		2	3	1	-3	-6
		5	8	2	7	-5
25						
	-1	5	-4	2	1	8
	3	-6	-5	4	3	5
	8	10	-2	5	6	9
	7	3	7	-9	1	5
	3	8	4	2	7	2
	3	4	6	-8	5	-1
27						
	3	-5	8	4	4	10
	-8	-9	2	3	8	8
	7	4	-7	6	10	4
	9	-6	5	2	11	-7
	-5	-6	7	-8	2	3

N	Стоимость выигрыша					
20						
		2	5	-3	4	4
		-6	1	2	5	3
		3	-4	3	8	7
		-5	2	4	-5	5
		2	6	5	4	3
22						
		2	-7	-3	-6	3
		-9	4	5	7	-7
		5	-7	6	2	5
		1	4	2	6	4
24						
		3	3	3	8	1
		3	6	2	6	2
		4	-7	7	3	3
		5	-4	5	5	4
		2	3	40	1	-5
26						
	5	6	12	7	8	5
	-4	2	6	5	5	3
	9	9	-5	4	8	8
	10	4	3	-9	6	-2
	3	8	4	2	-7	2
	4	9	7	5	10	3
28						
	4	-2	9	8	4	8
	-3	-3	5	4	2	3
	8	4	6	6	3	5
	5	6	5	5	-4	7
	6	2	8	-4	-5	4

N	Стоимость выигрыша					
	-7	-8	6	4	-7	2
29						
	-5	2	6	-4	-7	5
	6	-4	2	2	-6	7
	8	9	4	-7	-8	4
	6	2	5	-4	-5	3
	15	8	14	2	-5	7
	2	7	4	6	4	-4
	-4	6	5	2	-9	5
31						
	-7	-6	1	-4	2	-4
	5	3	-6	2	7	10
	2	5	5	4	7	5
	2	6	5	-4	8	2
	6	3	4	2	8	7
	-5	7	6	5	-4	4
	1	-4	8	2	2	3
33						
	-8	7	6	4	-2	2
	10	10	80	1	10	-5
	5	-3	6	7	9	-3
	3	4	5	9	8	2
	2	6	3	-2	4	-7
	4	2	3	-2	4	-9
35						
	-6	5	1	3	2	-4
	2	6	6	4	-7	-8
	4	7	6	4	7	7
	-9	8	5	2	3	1
	-5	3	4	-4	3	3
	4	5	-6	3	6	5

N	Стоимость выигрыша					
	4	-8	3	7	2	-2
30						
	10	-5	5	1	-6	2
	11	12	10	8	-7	8
	4	9	16	2	11	4
	3	8	15	-6	10	2
	15	8	14	2	5	7
	2	7	-4	-3	4	4
	6	5	4	-5	-7	-3
32						
	-9	4	1	-8	2	1
	4	5	8	1	5	15
	4	3	3	-9	9	5
	9	5	2	-5	7	2
	6	2	3	3	9	3
	8	4	3	-6	4	4
	16	14	8	2	2	3
34						
	5	-2	7	2	3	-6
	6	4	-3	5	8	4
	1	3	4	-6	4	3
	9	6	5	7	10	5
	8	5	8	-6	-1	6
	5	2	7	4	6	-5
36						
	6	3	-6	9	3	3
	4	2	-3	4	4	3
	3	-4	-5	4	3	3
	8	-7	2	-2	4	3
	5	-4	5	1	6	3
	1	-5	3	-4	4	-7

N	Стоимость выигрыша					
37						
	5	-5	4	-6	-2	3
	-6	6	-5	5	1	5
	7	7	-2	7	5	5
	8	4	6	8	4	5
	4	-4	2	2	6	-1
39						
	-4	-8	9	6	3	7
	3	4	10	8	6	10
	9	7	-1	4	-2	17
	6	3	4	-3	-5	13
	1	3	5	7	3	5
41						
	4	1	-6	-8	-7	4
	-5	9	8	4	12	6
	6	4	15	2	5	4
	7	15	6	-7	8	-6
	4	2	1	-8	6	5
43						
	-4	5	6	7	8	9
	4	-3	8	6	7	5
	1	4	6	7	8	6
	-5	6	3	8	-5	2
	4	3	5	4	6	8
	-8	2	3	-4	6	-7

N	Стоимость выигрыша					
38						
	1	8	5	1	4	6
	3	3	-6	2	3	-4
	5	5	2	3	6	4
	1	2	1	-6	-5	5
	4	3	4	-3	5	7
40						
	4	6	-5	3	4	-8
	5	5	7	7	6	-2
	4	7	4	-2	3	-3
	-4	5	-4	7	8	5
	4	7	6	4	5	-4
42						
	-4	6	-3	8	-7	2
	3	6	-7	8	-9	5
	4	15	1	12	-6	5
	7	-5	-6	-3	7	2
	1	1	-8	5	-8	-7
44						
	4	1	-4	-8	-9	1
	5	1	6	-6	3	4
	6	1	7	6	4	6
	3	-6	7	-8	-5	6
	5	3	1	-4	5	6
	2	1	-8	2	8	9

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

ДАВЫДОВ ВЛАДИМИР СЕМЁНОВИЧ

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Практическое пособие

В 2 частях

Часть II

В авторской редакции

Подписано в печать 01.04.2005 г.(41) Формат 60x84 1/16. Бумага писчая №1. Печать на ризографе. Усл. печ. л. 5,0. Уч-изд. л. 3,4. Тираж 35 экз.

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»
246019, г. Гомель, ул. Советская, 104

Отпечатано в учреждении образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»
246019, г. Гомель, ул. Советская, 104