5 Документация dva [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://github.com/ udvajs/dva. – Дата доступа 25.03.2018.

6 Бэнкс, А. React и Redux. Функциональная веб-разработка / А. Бэнкс, Е. Парселло. – Питер, 2018. – 336 с.

УДК 517.444

И. С. Ковалёва

ФОРМУЛА ОБРАЩЕНИЯ ДЛЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МАРКОВА – СТИЛТЬЕСА МЕР

В статьях [1–3] *исследовались свойства преобразования Маркова – Стилтьеса и обобщенного преобразования Маркова – Стилтьеса функций в пространствах Харди и Лебега. В частности, были установлены комплексные и вещественные формулы обращения указанных преобразований. Настоящая работа посвящена установлению формулы обращения для преобразования Маркова – Стилтьеса мер.*

Определение 1 [4, глава 6]. *Преобразованием Маркова – Стилтьеса комплексной ограниченной меры* μ на $[0,1]$ называется функция, задаваемая для всех $z \in C \setminus [1,+\infty)$ следующим соотношением

$$S\mu(z) = \int_0^1 \frac{d\mu(t)}{1-tz}. \tag{1}$$

При $z \in [1,+\infty)$ интеграл в правой части (1) понимается в смысле главного значения

$$S\mu(z) = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{[0,1]\cap\{|t-1/z|>\varepsilon\}} \frac{d\mu(t)}{1-tz}.$$

Для установления основного результата нам понадобятся леммы 7.1 и 7.2 Уиддера [5, с. 338], согласно которым при $\xi \in (0,1)$

$$\lim_{\eta\to+0} \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{\mu(s)\eta ds}{s^2+\eta^2} = \frac{\mu(+0)}{2} \text{ и } \lim_{\eta\to+0} \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{\mu(s)\eta ds}{(s-\xi)^2+\eta^2} = \frac{\mu(\xi-0)+\mu(\xi+0)}{2}.$$

Теорема 1. *Пусть* μ *– ограниченная комплексная мера,* $\xi \in (0,1)$. *Если* $F = S\mu$, *то*

$$\frac{\mu(\xi-0)+\mu(\xi+0)}{2} - \frac{\mu(+0)+\mu(0)}{2} = \frac{1}{2\pi i}\lim_{\eta\to+0}\int_0^\xi \left(\frac{1}{t-i\eta}F\left(\frac{1}{t-i\eta}\right) - \frac{1}{t+i\eta}F\left(\frac{1}{t+i\eta}\right)\right)dt.$$

Доказательство. Заметим, что

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{t-i\eta}F\left(\frac{1}{t-i\eta}\right) - \frac{1}{t+i\eta}F\left(\frac{1}{t+i\eta}\right)\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{\eta}{(t-s)^2+\eta^2}d\mu(s).$$

Действительно,

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{t-i\eta}F\left(\frac{1}{t-i\eta}\right) - \frac{1}{t+i\eta}F\left(\frac{1}{t+i\eta}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{t-i\eta}\int_0^1 \frac{d\mu(s)}{1-\frac{s}{t-i\eta}} - \frac{1}{t+i\eta}\int_0^1 \frac{d\mu(s)}{1-\frac{s}{t+i\eta}}\right) =$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{t-i\eta}\int_0^1\frac{(t-i\eta)\,d\mu(s)}{t-s-i\eta}-\frac{1}{t+i\eta}\int_0^1\frac{(t+i\eta)\,d\mu(s)}{t-s+i\eta}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\left(\int_0^1\frac{d\mu(s)}{t-s-i\eta}-\int_0^1\frac{d\mu(s)}{t-s+i\eta}\right)=\frac{1}{2\pi i}\left(\int_0^1\frac{1}{t-s-i\eta}-\frac{1}{t-s+i\eta}\right)d\mu(s)=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_0^1\frac{t-s+i\eta-t+s+i\eta}{(t-s-i\eta)(t-s+i\eta)}d\mu(s)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^1\frac{2i\eta}{(t-s)^2-(i\eta)^2}d\mu(s)=\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{\eta}{(t-s)^2+\eta^2}d\mu(s).$$

Проинтегрируем полученное выражение по частям, полагая $\mu(0)=0$.

$$\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{\eta}{(t-s)^2+\eta^2}d\mu(s)=\frac{\eta}{\pi}\left(\left.\frac{\mu(s)}{(t-s)^2+\eta^2}\right|_0^1-\int_0^1\frac{2\mu(s)(t-s)}{\left((t-s)^2+\eta^2\right)^2}ds\right)=$$

$$=\frac{\eta}{\pi}\left(\frac{\mu(1-0)}{(t-1)^2+\eta^2}-\int_0^1\frac{2\mu(s)(t-s)}{\left((t-s)^2+\eta^2\right)^2}ds\right).$$

Введем обозначение

$$I_\eta:=\frac{1}{2\pi i}\int_0^\xi\left(\frac{1}{t-i\eta}F\left(\frac{1}{t-i\eta}\right)-\frac{1}{t+i\eta}F\left(\frac{1}{t+i\eta}\right)\right)dt=$$

$$=\frac{\eta}{\pi}\int_0^\xi\left(\frac{\mu(1-0)}{(t-1)^2+\eta^2}-\int_0^1\frac{2\mu(s)(t-s)}{\left((t-s)^2+\eta^2\right)^2}ds\right)dt=$$

$$=\frac{\eta}{\pi}\left(\mu(1-0)\int_0^\xi\frac{dt}{(t-1)^2+\eta^2}-2\int_0^1\mu(s)\int_0^\xi\frac{(t-s)\,dt}{\left((t-s)^2+\eta^2\right)^2}ds\right)=$$

$$=\frac{\eta}{\pi}\left(\frac{\mu(1-0)}{\eta}\left(arctg\frac{\xi-1}{\eta}+arctg\frac{1}{\eta}\right)-\int_0^1\frac{\mu(s)ds}{s^2+\eta^2}+\int_0^1\frac{\mu(s)ds}{(s-\xi)^2+\eta^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\mu(1-0)\left(arctg\frac{\xi-1}{\eta}+arctg\frac{1}{\eta}\right)-\int_0^1\frac{\mu(s)\eta ds}{s^2+\eta^2}+\int_0^1\frac{\mu(s)\eta ds}{(s-\xi)^2+\eta^2}\right).$$

Переходя к пределу при $\eta\to+0$ и применяя указанные выше леммы 7.1 и 7.2 [5, с. 338], при $\xi\in(0,1)$ имеем

$$\lim_{\eta\to+0}I_\eta=\frac{\mu(\xi-0)+\mu(\xi+0)}{2}-\frac{\mu(+0)}{2}.$$

Выполняя замену $\mu(t)$ на $\mu(t)-\mu(0)$, получим утверждение теоремы.

Следствие. *Пусть* $\mu\in M^b([0,1],R)$. *Тогда*

$$\lim_{\eta\to+0}\mathrm{Re}\frac{1}{\pi i}\int_{-i\eta}^{\xi-i\eta}\frac{1}{s}F(s)ds=\frac{\mu(\xi-0)+\mu(\xi+0)}{2}-\frac{\mu(+0)+\mu(0)}{2}.$$

Доказательство. Обозначим $z=t+i\eta$,

$$G(z)=\frac{1}{t-i\eta}F\left(\frac{1}{t-i\eta}\right).$$

Поскольку мера μ – вещественная, то

$$\overline{G(z)} = G(\overline{z}) \text{ и } G(z) - G(\overline{z}) = G(z) - \overline{G(z)} = 2i\,\mathrm{Im}\big(G(z)\big).$$

Поэтому правую часть формулы обращения можно переписать следующим образом:

$$\lim_{\eta\to+0}\frac{1}{2\pi i}\int_0^{\xi}\left(\frac{1}{t-i\eta}F\left(\frac{1}{t-i\eta}\right)-\frac{1}{t+i\eta}F\left(\frac{1}{t+i\eta}\right)\right)dt =$$

$$=\lim_{\eta\to+0}\frac{1}{2\pi i}\int_0^{\xi}2i\,\mathrm{Im}\left(\frac{1}{t-i\eta}F\left(\frac{1}{t-i\eta}\right)\right)dt = \lim_{\eta\to+0}\frac{1}{\pi}\int_0^{\xi}\mathrm{Im}\left(\frac{1}{t-i\eta}F\left(\frac{1}{t-i\eta}\right)\right)dt =$$

$$=\lim_{\eta\to+0}\mathrm{Im}\frac{1}{\pi}\int_{-i\eta}^{\xi-i\eta}\frac{1}{s}F(s)ds = \lim_{\eta\to+0}\mathrm{Re}\frac{1}{\pi i}\int_{-i\eta}^{\xi-i\eta}\frac{1}{s}F(s)ds.$$

Отсюда и из теоремы 1 вытекает утверждение следствия.

Литература

1 Mirotin, A. R. The Markov–Stieltjes transform on Hardy and Lebesgue spaces / A. R. Mirotin, I.S. Kovalyova // Integral Transforms and Special Functions – 2016. – Vol. 27. – № 12. – P. 995–1007.

2 Ковалева, И. С. Теорема о свертке для преобразования Маркова – Стилтьеса / И. С. Ковалева, А. Р. Миротин // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 3 (16). – С. 66–70.

3 Ковалева, И. С. Обобщенный оператор Маркова – Стилтьеса в пространствах Харди и Лебега / И. С. Ковалева, А. Р. Миротин // Труды института математики. – 2017. – Т. 25. – № 1. – С. 39–50.

4 Миротин, А. Р. Гармонический анализ на абелевых полугруппах / А. Р. Миротин. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2008. – 207 с.

5 Widder, D. V. The Laplace transform / D. V. Widder. – Princeton, N. J.: Princeton Univ. Press, 1946. – 412 p.

УДК 53 (077)

Я. А. Ковалева

ИЗОЭНТРОПИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ ТРОПОСФЕРЫ ЗЕМЛИ

В статье рассматриваются физические свойства атмосферы Земли, которая находится под воздействием солнечной радиации. Особое внимание уделяется тропосфере. На основе применения барометрической формулы, то есть зависимости давления от высоты, рассматриваем энтропию идеального газа для тропосферы. Для этого применяется условие изотермичности, которое использовалось для получения барометрической формулы. Выведен градиент температуры из уравнения теплопроводности.

Из повседневных наблюдений следует, что, если взять любую систему, с которой можно производить опыты, и изолировать ее от посторонних воздействий, то в ней с течением времени установится термодинамическое равновесие. На основании такого рода обобщений в учении о тепловых процессах введена первая аксиома, называемая нулевым началом термодинамики: изолированная система с течением времени приходит в равновесное состояние, при котором в ней всюду будет одна и та же температура и из которого система не может самопроизвольно выйти.

Отметим, что нулевой закон термодинамики, как обобщение лабораторных экспериментов, утверждает выравнивание температуры и установление термодинамического равновесия в изолированных системах небольших размеров. Кроме того, представление