$$\overline{G(z)} = G(\overline{z}) \text{ и } G(z) - G(\overline{z}) = G(z) - \overline{G(z)} = 2i\,\mathrm{Im}\big(G(z)\big).$$

Поэтому правую часть формулы обращения можно переписать следующим образом:

$$\lim_{\eta\to+0} \frac{1}{2\pi i}\int_0^{\xi}\left(\frac{1}{t-i\eta}F\left(\frac{1}{t-i\eta}\right) - \frac{1}{t+i\eta}F\left(\frac{1}{t+i\eta}\right)\right)dt =$$

$$= \lim_{\eta\to+0} \frac{1}{2\pi i}\int_0^{\xi} 2i\,\mathrm{Im}\left(\frac{1}{t-i\eta}F\left(\frac{1}{t-i\eta}\right)\right)dt = \lim_{\eta\to+0}\frac{1}{\pi}\int_0^{\xi}\mathrm{Im}\left(\frac{1}{t-i\eta}F\left(\frac{1}{t-i\eta}\right)\right)dt =$$

$$= \lim_{\eta\to+0}\mathrm{Im}\frac{1}{\pi}\int_{-i\eta}^{\xi-i\eta}\frac{1}{s}F(s)ds = \lim_{\eta\to+0}\mathrm{Re}\frac{1}{\pi i}\int_{-i\eta}^{\xi-i\eta}\frac{1}{s}F(s)ds.$$

Отсюда и из теоремы 1 вытекает утверждение следствия.

Литература

1 Mirotin, A. R. The Markov–Stieltjes transform on Hardy and Lebesgue spaces / A. R. Mirotin, I.S. Kovalyova // Integral Transforms and Special Functions – 2016. – Vol. 27. – № 12. – P. 995–1007.

2 Ковалева, И. С. Теорема о свертке для преобразования Маркова – Стилтьеса / И. С. Ковалева, А. Р. Миротин // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 3 (16). – С. 66–70.

3 Ковалева, И. С. Обобщенный оператор Маркова – Стилтьеса в пространствах Харди и Лебега / И. С. Ковалева, А. Р. Миротин // Труды института математики. – 2017. – Т. 25. – № 1. – С. 39–50.

4 Миротин, А. Р. Гармонический анализ на абелевых полугруппах / А. Р. Миротин. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2008. – 207 с.

5 Widder, D. V. The Laplace transform / D. V. Widder. – Princeton, N. J.: Princeton Univ. Press, 1946. – 412 p.

УДК 53 (077)

Я. А. Ковалева

ИЗОЭНТРОПИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ ТРОПОСФЕРЫ ЗЕМЛИ

В статье рассматриваются физические свойства атмосферы Земли, которая находится под воздействием солнечной радиации. Особое внимание уделяется тропосфере. На основе применения барометрической формулы, то есть зависимости давления от высоты, рассматриваем энтропию идеального газа для тропосферы. Для этого применяется условие изотермичности, которое использовалось для получения барометрической формулы. Выведен градиент температуры из уравнения теплопроводности.

Из повседневных наблюдений следует, что, если взять любую систему, с которой можно производить опыты, и изолировать ее от посторонних воздействий, то в ней с течением времени установится термодинамическое равновесие. На основании такого рода обобщений в учении о тепловых процессах введена первая аксиома, называемая нулевым началом термодинамики: <u>изолированная система с течением времени приходит в равновесное состояние, при котором в ней всюду будет одна и та же температура и из которого система не может самопроизвольно выйти.</u>

Отметим, что нулевой закон термодинамики, как обобщение лабораторных экспериментов, утверждает выравнивание температуры и установление термодинамического равновесия в изолированных системах небольших размеров. Кроме того, представление о термодинамическом равновесии нельзя относить к астрономическим объектам. Механическое равновесие – одна из сторон термодинамического. Если в системе не механического равновесия, то в ней отсутствует и термодинамическое равновесие.

Как известно, что в текучих средах (газах, жидкостях) градиенты давления стремятся вызвать перемещение масс в сторону убыли давления. Но из этого не следует заключать, что в системе при ее равновесии давление должно быть одинаковым, хотя тенденция к выравниванию давления всегда существует. Действительно, при наличии, например, поля тяготения, равновесие в небольших объемах реализуется при равенстве давлений в любых ее соседних физических точках (с точностью до бесконечно малых величин). Но при этом будут существовать определенные стационарные градиенты давлений. В этом случае поле тяготения выступает фактором, препятствующим выравниванию давлений.

Атмосфера Земли находится под воздействием солнечной радиации. Нижняя же часть атмосфера – тропосфера – в меньшей степени подвержена действию излучения по сравнению с верхними слоями газовой оболочки. Поэтому в первом грубом приближении тропосферу можно рассматривать как изолированную систему. Условие ее механического равновесия опишем дифференциальным уравнением:

$$\frac{dP}{dh} = -\rho g, \tag{1}$$

где $\frac{dP}{dh}$ – градиент давления, h – высота над уровнем Земли, рассматриваемой точки. В таком случае энтропия одного моля идеального газа равна:

$$S = c \cdot \ln T - R \cdot \ln P. \tag{2}$$

Отмечаем, что с увеличением высота давления в атмосфере падает, и если бы атмосфера была изотермична, то в ней мольная (удельная) энтропия воздуха увеличивалась бы с поднятием над поверхностью Земли.

Условие изотермичности, которое использовалось при получении барометрической формулы, не может даже грубо характеризовать состояние астрономических объектов. Введем другое предположение для характеристики теплового состояния тропосферы. Предположим, что в тропосфере в тех ее частях, где реализуется механическое равновесие, мольная (удельная) энтропия воздуха есть постоянная величина (изоэнтропическая атмосфера).

Тогда:

$$c_p \cdot \ln T - R \cdot \ln P = const, \;\; c_p \cdot \frac{1}{T}\frac{dT}{dh} - R \cdot \frac{1}{P}\frac{dP}{dh} = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{dP}{dh} = c_p \frac{P}{RT}\frac{dT}{dh}. \tag{3}$$

Учитывая, что $\frac{P}{RT} = \frac{1}{v}$ и $v\rho = \mu$, то из (1) и (3) мы получим:

$$\frac{dT}{dh} = -\frac{\mu g}{c_p}. \tag{4}$$

Так как для воздуха $\mu = 0{,}029\,\frac{\text{кг}}{\text{моль}}$, $c_p = 29{,}26\,\frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$ и $g = 9{,}81\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$, то из (4) найдем:

$$\frac{dT}{dh} = -9{,}7\,\frac{\text{К}}{\text{км}}. \tag{5}$$

Таким образом, в изоэнтропической тропосфере должен существовать устойчивый градиент температуры, определяемый соотношением (4).

Согласно (5) среднее падение температуры должно быть равным 9,7 К на 1000 м. Действительно в тропосфере имеет место падение температуры с высотой, но оно значительно меньше вычисленного по формуле (4) и составляет в среднем 6,5 К/км.

Таким образом, из изложенного следует, что условием изоэнтропичности атмосферы лучше отражает действительность, чем условие ее изотермичности. Остается при этом невыясненным механизм образования устойчивых градиентов температур в поле силы тяжести, да и величины градиентов значительно отличаются от наблюдаемых в действительности. Соответствующие уточнения и выяснения механизма образования градиентов температур в нижних слоях атмосфер планет можно сделать на базе представлений о явлениях переноса в условиях действия поля тяготения.

Запишем выражение для удельной обобщенной энергии идеального газа, которая определяется следующим выражением:

$$\Phi = \frac{1}{\mu} c_p T + \frac{v^2}{2} + \psi, \tag{6}$$

где $\psi = \psi(x, y, z)$ – потенциальная энергия внешнего силового показателя, по которому проходит течение среды.

Градиенты величин, входящих в (6), порождают как макрофизические, так и микрофизические процессы передачи энергии. Остановимся на микрофизических процессах – теплопроводности и вязкости.

Первые слагаемые в (6) являются удельной энтальпией и ее градиент, связанный с градиентом температуры, обусловливает теплопроводность. Плотность потока теплоты по оси X можно записать в виде:

$$q_x = -\varepsilon \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\mu} c_p T\right) = -\varepsilon \frac{c_p}{\mu}\frac{dT}{dx}, \tag{7}$$

где ε – коэффициент перенос энтропии.

Введем коэффициент теплопроводности:

$$æ = \varepsilon \frac{c}{\mu}, \tag{8}$$

Запишем уравнение теплопроводности в привычной форме:

$$q_x = -æ \frac{dT}{dx}. \tag{9}$$

Два последних слагаемых в (6) характеризуют удельную механическую энергию. Перенос механической энергии тепловым движением определяет вязкость системы. В газах вязкость имеет диффузионную природу, при этом вместе с переносом кинетической энергии происходит перенос потенциальной энергии частиц.

Запишем формулу для плотности потока механической энергии газа в потенциальном поле внешних сил:

$$G_x = -\eta \frac{d}{dx}\left(\frac{v_x^2}{2} + \psi\right), \tag{10}$$

где v_x – компонента скорости направленного перемещения среды по оси X, G_x – плотность переноса механической энергии по оси X.

Пусть газ находится в механическом равновесии, тогда $v_x = 0$ и

$$G_x = -\eta \frac{d\psi}{dx}. \tag{11}$$

Если, кроме того, газ изолирован от внешних воздействий (кроме воздействия через внешнее неизменное силовое поле), то потоки (9) и (11) должны быть взаимно уравновешены:

$$q_x + G_x = 0;\ æ\frac{dT}{dx} + \eta\frac{d\psi}{dx} = 0.$$

Откуда следует, что:

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{\eta}{æ}\frac{d\psi}{dx}. \tag{12}$$

Таким образом, условие стационарности состояния газа во внешнем потенциальном поле требует наличия определенного градиента температуры (12).

Как известно, что нижняя часть атмосферы Земли – тропосфера, то в первом приближении ее можно рассматривать как изолированную систему. Примем

$$\psi = gh, \tag{13}$$

и $x = h$ – высота над уровнем Земли, из уравнений (12) и (13) для тропосферы Земли (или другой планеты) найдем:

$$\frac{dT}{dh} = -\frac{\eta}{æ}g. \tag{14}$$

Таким образом, с поднятием в тропосферу ее температура должна понижаться по закону (14). При этом в атмосфере происходит теплопередача в строку убыли температуры (вверх), уравновешивая переносом потенциальной энергии молекул (11) в обратном направлении.

Для примера отметим, что для воздуха при 0° C и P = 1 атм, $\eta = 1,72 \cdot 10^{-5}$ Па·с, $æ = 2,427 \cdot 10^{2}\ \frac{\text{Дж}}{\text{м·с·К}}$, $g = 9,81\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ и найдем, что $\frac{dT}{dh} \cong -7\ \frac{\text{К}}{\text{км}}$. Полученное значение градиента температуры в тропосфере Земли несколько больше наблюдаемого среднего значения этой величины $\left(\frac{dT}{dh} \cong -6,5\ \frac{\text{К}}{\text{км}}\right)$, что объясняется, в частности пренебрежением при расчете собственным излучением воздуха, которое создает дополнительную передачу энергии поэтому реальный средний перепад температуры в атмосфере несколько ниже вычисленного по (14).

Используя (8), перепишем (14) в следующем виде:

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{\eta}{\varepsilon}\frac{\mu g}{c_p}. \tag{15}$$

Для всех газов $\frac{\eta}{\varepsilon} < 1$ – перенос энтальпии тепловым движением осуществляется более интенсивно, через перенос механической энергии изоэнтропический (адиабатический) градиент температуры в атмосфере:

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_{ад} = -\frac{\mu g}{c_p}. \tag{16}$$

Отличен от (15) из-за неравенства $\varepsilon > \eta$. Тенденция в атмосфере к установлению градиента (16) не реализуется из-за разных коэффициентов переноса энтальпии и механической энергии.

Как мы уже отмечали, что понятие термодинамического равновесия неприменимо к системам астрономических масштабов, а согласно полученным выше результатам выравнивание температуры, а, следовательно, и термодинамическое равновесие возможно в объектах, в которых влияние действия внешних полей можно пренебречь.

Действительно, средний градиент температуры в воздухе, порождаемый полем тяготения настолько мал $\left(\frac{dT}{dh} \cong -6,5 \cdot 10^{-5}\ \frac{\text{К}}{\text{см}}\right)$, что его нельзя экспериментально обнаружить в системах лабораторных масштабов. Именно поэтому воздух в термостатированных баллонах достаточно точно можно считать в термодинамическом равновесии. Для атмосферы Земли понятие термодинамического равновесия неприменимо как в механическом отношении, так и в термическом.

Литература

1 Матвеев, А. Н. Молекулярная физика: учеб. пособие для вузов / А. Н. Матвеев. – М.: Высшая школа, 1981. – 400 с.

2 Сивухин, Д. В. Общий курс физики: в 4 т. Т. 2.: Молекулярная физика / Д. В. Сивухин. – М.: Высшая школа, 1989. – 440 с.

УДК 539.4

И. И. Коляскин

РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ УПРУГОГО ТЕЛА ПРИ ДЕЙСТВУЮЩЕМ ДАВЛЕНИИ И ЗАДАННЫХ ОБЛАСТЯХ КОНТАКТА

Рассматривается задача расчета показателей напряжения и перемещений в объёмном теле заданной формы, находящемся под давлением, при заданной области контакта. Одной из таких задач является задача моделирования работы системы тел «массивная шина – дорожное покрытие». Расчет напряжений и перемещений, возникающих в шине при давлении, оказываемом на поверхность, имеет первостепенное значение для установления физико-технических характеристик шины, влияющих на её износоустойвость и долговечность.

Пусть к точке точке $(y_1, y_2, 0)$ на границе упругого полупространства $x_3 > 0$ приложена сила P, направленная вдоль оси Ox_3. Тогда положим

$$V_0(y,x) = \frac{1}{R(y,x)}, \quad W_0(y,x) = \ln(x_3 + R(y,x)), \tag{1}$$

где $R(y, x)$ – расстояние от точки наблюдения M до точки приложения сосредоточенной силы. В случае, когда на упругое тело действует нормальная нагрузка, распределенная по площадке ω с плотностью $p(x_1, x_2)$, формулы Буссинеска для перемещений точки M можно записать в следующем виде:

$$u_i = -\frac{P}{4\pi\mu}\left(x_3 \frac{\partial V}{\partial x_i}(x) + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{\partial W}{\partial x_i}(x) \right), \quad i = 1,2, \tag{2}$$

$$u_3 = -\frac{P}{4\pi\mu}\left(x_3 \frac{\partial V}{\partial x_3}(x) + \frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}V(x) \right), \tag{3}$$

где, учитывая соотношения (1), введены следующие обозначения:

$$V(x) = \iint_{\omega} \frac{p(y)}{R(y,x)} dy,$$

$$W(x) = \iint_{\omega} p(y)\ln(x_3 + R(y,x))dy.$$

Функции $V(x)$ и $W(x)$ называются соответственно потенциалом простого слоя и логарифмическим потенциалом (от трех переменных). Установив зависимость между потенциалами $V(x)$ и $W(x)$, формулы (2) и (3) для перемещений точек упругого полупространства будут иметь вид

$$u_i = -\frac{1}{4\pi\mu}\left(x_3 \frac{\partial V}{\partial x_i} - \frac{\mu}{\lambda+\mu}\int_{x_3}^{\infty} \frac{\partial V}{\partial x_i} dx_3 \right), \quad i = 1,2, \tag{4}$$