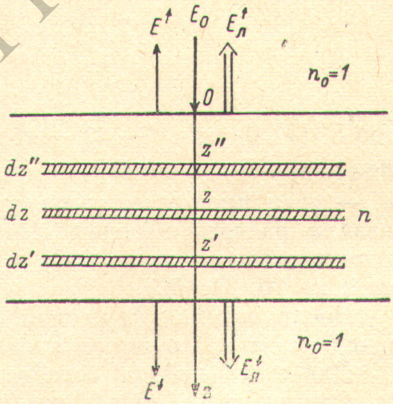
УДК 535.36/37

ЛЮМИНЕСЦЕНЦИЯ СЛОЯ СРЕДЫ С СИЛЬНО АНИЗОТРОПНЫМ РАССЕЯНИЕМ

И. М. Левин

Получены соотношения для расчета плотности мощности люминесценции, возбужденной в слое среды с сильно вытянутой индикарисой рассеяния и заметным поглощением, а также соотношения для расчета мощности поглощенного в слое и вышедшего из него излучения люминесценции. При этом для расчета распространения излучения в среде используется ранее предложенное и подтвержденное расчетами методом Монте—Карло «квазиоднократное» приближение. Оценены границы применимости и точность предложенных расчетных соотношений.

В известных работах, посвященных люминесценции светорассеивающих сред, расчет светового режима в среде проводится либо в двухпотоковом приближении [1, 2] и его модификации для среды с выраженной слоистой структурой [3, 4], либо в соответствии с четырехпараметрической теорией Розенберга [5]. Между тем как показано в [6], классическое двухпотоковое приближение непригодно для расчета ослабления излучения в средах со сколько-нибудь вытянутой индикатрисой рассеяния. Хорошие результаты при расчете пропускания и отражения сред с анизотропным рассеянием и слабым поглощением дает предложенное Зеге модифицированное двухпотоковое приближение со специальным заданием параметров [6] и теория Розенберга [7]. Однако точность коэффициентов пропускания и отражения, рассчитанная методом [6], резко ухудшается при увеличении поглощения и вытянутости индикатрисы рассеяния, так что при коэффициентах отражения и пропускания, меньших 0.1 можно определить только порядок величины [6]. Теория [7] при сильно вытянутых индикатрисах рассеяния пригодна только для сред с исчезающе малым поглощением [8, 9].



В последние годы появилась серия работ советских [8–10] и американских [11–13] авторов, в которых в приближении, названном в [11] «квазиоднократным», получены и подтверждены расчетами методом Монте—Карло простые формулы, пригодные для расчета пропускания и отражения излучения в средах с сильно анизотропным рассеянием (коэффициент анизотропии индикатрисы рассеяния $x(\theta)$, или доля света, рассеянного назад, $\varphi_0 = \int\limits_{\pi/2}^{\pi} x(\vartheta)\sin\vartheta d\vartheta \Big/ \int\limits_0^{\pi} x(\vartheta)\sin\vartheta d\vartheta < 0.1$) и не слишком слабом поглощении. Там же [10] показано, что для таких сред расчет отражения и пропускания по формулам [6] приводит к большим ошибкам.

В данной статье «квазиоднократное» приближение используется для расчета люминесценции в слое поглощающей среды с сильно анизотропным рассеянием.

Рассматривается слой однородного вещества с показателем преломления n, безграничный в направлениях x и y и имеющий толщину z_0 в направлении z, помещенный в среду с показателем преломления $n_0=1$. Верхняя граница слоя равномерно освещена параллельным потоком монохроматического излучения, направленным нормально к его поверхности (см. рисунок). В слое возбуждается свечение люминесценции, угловое распределение которого изотропно, а квантовый выход равен η. Длину волны возбуждающего излучения обозначим $\lambda_в$, а люминесцентного — $\lambda_л$, показатели поглощения соответственно $\alpha_в$ и $\alpha_л$. Показатель рассеяния σ и индикатрису рассеяния считаем не зависящими от λ. Индикатриса рассеяния сильно вытянута ($\varphi_0 < 0.1$) и изотропна в пределах задней полусферы. Вероятность выживания фотона $\Lambda_{в(л)}=\sigma/[\sigma+\alpha_{в(л)}]$ может изменяться от 0 до 0.9. Оптическая толщина слоя $\tau_{в(л)}=[\alpha_{в(л)}+$ $+\sigma]\, z_0 \leqslant 10'$.

Задача расчета люминесценции состоит в отыскании связи между характеристиками среды $\alpha_в$, $\alpha_л$, σ, φ_0, η и плотностью мощности люминесценции, возбужденной в слое среды $E_л$ и вышедшей из него вверх $E_л^{\uparrow}$ и вниз $E_л^{\downarrow}$ при заданной плотности облучающего слой потока E_0. Величины $E_л^{\uparrow}$ и $E_л^{\downarrow}$ определяют технический выход люминесценции $\eta_т=(E_л^{\uparrow}+E_л^{\downarrow})/(E_0-E^{\uparrow}-E^{\downarrow})$, где $E^{\uparrow}$, $E^{\downarrow}$ — плотность выходящего из слоя вверх и вниз возбуждающего излучения.

«Квазиоднократное» приближение основано на замене сильно анизотропной индикатрисы рассеяния δ-функцией в направлении распространения излучения. В этом приближении ослабление (T_H) горизонтальной освещенности (E_H) с глубиной z в слое среды при его направленном освещении под углом θ к нормали описывается соотношениями [8, 10, 12, 13]

$$T_H(\theta', z)=\frac{E(\theta', z)}{E(\theta', 0)}=\exp\left(-\frac{\gamma z}{\cos\theta'}\right), \tag{1}$$

$$\gamma=\alpha+\varphi_0\sigma, \tag{2}$$

где $E'(\theta', 0)=E_0(1-\rho_ф)$ — горизонтальная освещенность непосредственно под верхней границей слоя ($\rho_ф$ — коэффициент френелевского отражения, θ' — угол преломления падающего излучения ($\sin\theta=n\sin\theta'$). Как показали расчеты методом Монте—Карло, эти соотношения справедливы с точностью не хуже 10% в диапазоне оптических глубин $\tau=(\alpha+\sigma)\, z$ от 0 до 10 [10, 12].

Воспользуемся формулой (1) для расчета распространения люминесцентного и рассеянного назад света.

Для этого найдем ослабление ($T_д$) освещенности ($E_д$) при диффузном освещении среды таком, что яркость излучения непосредственно под ее верхней границей

$$I'(\mu', 0)=\begin{cases} I(0, 0)/\mu' & \text{при } \theta'\leqslant\theta_{пр.}, \\ 0 & \text{при } \theta'>\theta_{пр.}, \end{cases} \tag{3}$$

где $\theta_{пр.}=\arccos\mu_{пр.}$ — предельный угол распространения излучения внутри среды непосредственно под верхней границей слоя при диффузном освещении ее сверху, $\mu'=\cos\theta'$.

Величина $T_д$ выразится в виде

$$T_д(\mu_{пр.}, z)=\frac{E_д(\mu_{пр.}, z)}{E_д(\mu_{пр.}, 0)}=\frac{\int\limits_{\mu_{пр.}}^{1} I(\mu', 0)\,\mu' T_H(\theta', z)\,d\mu'}{\int\limits_{\mu_{пр.}}^{1} I(\mu', 0)\,\mu' d\mu'}.$$

Выполнив интегрирование с учетом соотношений (1), (3), получим

$$T_{\text{д}}(\mu_{\text{пр.}},\ z)=\frac{1}{1-\mu_{\text{пр.}}}\left\{e^{-\gamma z}-\mu_{\text{пр.}}e^{-\gamma z/\mu_{\text{пр.}}}-\gamma z\left[\mathrm{Ei}\left(-\frac{\gamma z}{\mu_{\text{пр.}}}\right)-\mathrm{Ei}(-\gamma z)\right]\right\}, \qquad (4)$$

где Ei — интегральная показательная функция.

Соотношение (4) может быть аппроксимировано экспонентой с показателем, зависящим от $\mu_{\text{пр.}}$.

Нам понадобятся два случая: 1) $\theta_{\text{пр.}}=\arcsin(1/n)$, т. е. равен углу полного внутреннего отражения в слое среды, 2) $\theta_{\text{пр.}}=90°$.

В первом случае в диапазоне γz от 0 до 5

$$T_{\text{д}1}(z)=\exp(-k\gamma z), \qquad (5)$$

причем $k=1.20$ для $n=1.33$ (вода) и $k=1.25$ для $n=1.48$ (листья растений).

Во втором случае в диапазоне γz от 0 до 3

$$T_{\text{д}2}(z)=\exp(-1.7\gamma z). \qquad (6)$$

Точность аппроксимаций (5) и (6) соответственно 5 и 20%.

Функцию (5) мы будем использовать для расчета ослабления диффузного излучения (люминесценции и рассеянного назад возбуждающего света), выходящего из слоя среды. При этом излучение, подходящее к границам под углами $\theta'>\theta_{\text{пр.}}$, которое возвращается в слой в результате полного внутреннего отражения, не учитывается.

Функция (6) используется в тех случаях, когда рассчитывается ослабление излучения на участке среды, не прилегающем к границе слоя.

Светимость люминесценции, возбужденной в слое dz,

$$dE_{\text{л}}(z)=\eta\alpha_{\text{в}}E^0(z)\,dz, \qquad (7)$$

где $E^0(z)$ — пространственная освещенность на глубине z.

При сильной вытянутости индикатрисы рассеяния и ее изотропности в пределах задней полусферы освещение элементарного слоя сверху можно считать направленным, а снизу — практически диффузным. В этом случае [14]

$$E^0(z)=E^{\downarrow}(z)+2E^{\uparrow}(z), \qquad (8)$$

где $E^{\downarrow}(z)$ и $E^{\uparrow}(z)$ — горизонтальные освещенности сверху и снизу.

Освещенность $E^{\downarrow}(z)$ определяется из (1) при $\theta'=0$, а $E^{\uparrow}(z)$ — интегрированием излучения, рассеянного назад в слоях z' $(z'\geqslant z)$

$$E^{\uparrow}(z)=\sigma\varphi_0\int\limits_z^{z_0}E^{\downarrow}(z')\,T^{\text{в}}_{\text{д}2}(z'-z)\,dz', \qquad (9)$$

где $T^{\text{в}}_{\text{д}_2}(z'-z)$ выражается соотношениями (6), (2) при $\alpha=\alpha_{\text{в}}$.

При расчете распространения излучения люминесценции мы не будем учитывать свет, более одного раза рассеянный назад. Поскольку коэффициент отражения сред рассматриваемого типа ($\varphi_0\leqslant 0.1$, $\Lambda\leqslant 0.9$) $\rho<0.1$ [9, 12], то погрешность такого допущения порядка $\rho^2+\rho^3+\rho^4+\ldots<0.011$.

В этом приближении мощность излучения люминесценции, возбужденного в слое dz и вышедшего из слоя вниз, можно рассматривать как сумму двух компонентов: излучения, распространяющегося от dz вниз и рассеиваемого вперед ($dE^{\downarrow}_{\text{л}1}$), и излучения, первоначально распространявшегося от dz вверх, а затем рассеянного назад слоем dz'' ($dE^{\downarrow}_{\text{л}2}$)

$$dE^{\downarrow}_{\text{л}1}(z)=0.5\,dE_{\text{л}}\varkappa T^{\text{л}}_{\text{д}1}(z_0-z)(1-\rho_{\text{ф}}), \qquad (10)$$

$$dE^{\downarrow}_{\text{л}2}(z,\ z'')=0.5\,dE_{\text{л}}T^{\text{л}}_{\text{д}2}(z-z'')\,2\sigma\varphi_0\,dz''\varkappa T^{\text{л}}_{\text{д}1}(z_0-z'')(1-\rho_{\text{ф}}). \qquad (11)$$

Здесь $\varkappa=\int\limits_0^{\theta_{\text{пр.}}}\sin\vartheta\,d\vartheta\Big/\int\limits_0^{\pi/2}\sin\vartheta\,d\vartheta$ — отношение светимостей изотропных излучателей с предельными углами излучения $\theta_{\text{пр.}}=\arcsin(1/n)$ и $\theta_{\text{пр.}}=\pi/2$

(для $n=1.33$ $\varkappa=0.34$, для $n=1.48$ $\varkappa=0.31$), коэффициент 2 в формуле (11) представляет собой отношение полупространственной и плоской освещенностей при диффузном освещении, а функции $T^{\text{л}}_{\text{д}1}$ и $T^{\text{л}}_{\text{д}2}$ выражаются соответственно формулами (5), (6) и (2) при $\alpha=\alpha_{\text{л}}$.

Аналогично запишутся компоненты излучения люминесценции, выходящего через верхнюю границу слоя

$$dE^{\uparrow}_{\text{л}1}(z)=0.5dE_{\text{л}}\varkappa T^{\text{л}}_{\text{д}1}(z)(1-\rho_{\text{ф}}), \tag{12}$$

$$dE^{\uparrow}_{\text{л}2}(z)=0.5dE_{\text{л}}T^{\text{л}}_{\text{д}2}(z'-z)\,2\sigma\varphi_0 dz'\varkappa T^{\text{л}}_{\text{д}1}(z')(1-\rho_{\text{ф}}). \tag{13}$$

Светимость люминесценции, возбужденной в слое dz, получим, подставляя в (7) соотношения (8), (9) и производя интегрирование с учетом (1) при $\theta'=0$ и (6), (2) при $\alpha=\alpha_{\text{в}}$

$$dE_{\text{л}}(z)=0.5\eta\alpha_{\text{в}}E_0(1-\rho_{\text{ф}})f(z)\,dz, \tag{14}$$

где

$$f(z)=e^{-\gamma_{\text{в}}z}+\frac{\sigma\varphi_0}{2.7\gamma_{\text{в}}}e^{-\gamma_{\text{в}}z}-\frac{\sigma\varphi_0}{2.7\gamma_{\text{в}}}e^{1.7\gamma_{\text{в}}z-2.7\gamma_{\text{в}}z_0}, \tag{15}$$

причем $\gamma_{\text{в}}$ определяется из (2) при $\alpha=\alpha_{\text{в}}$.

Для определения плотности мощности люминесценции, выходящей из слоя вниз, подставим (14) в (10) и (11) и с учетом (5), (6) и (15) проинтегрируем (10) по z от 0 до z_0, а (11) дважды проинтегрируем от 0 до z по z'' и от 0 до z_0 по z. Суммируя полученные в результате интегрирования выражения для $E^{\downarrow}_{\text{л}1}$ и $E^{\downarrow}_{\text{л}2}$, имеем

$$E^{\downarrow}_{\text{л}}=a_1a_2e^{-k\gamma_{\text{л}}z_0}\left[\frac{a_2+1}{a_2}A_1(k\gamma_{\text{л}})-A_2(1.7\gamma_{\text{л}})\right], \tag{16}$$

где

$$a_1=0.5(1-\rho_{\text{ф}})^2\eta\alpha_{\text{в}}E_0,\quad a_2=\frac{2\sigma\varphi_0}{(1.7+k)\gamma_{\text{л}}},$$

$$A_1(k\gamma_{\text{л}})=\frac{e^{(k\gamma_{\text{л}}-\gamma_{\text{в}})z_0}-1}{k\gamma_{\text{л}}-\gamma_{\text{в}}}+\frac{\sigma\varphi_0}{2.7\gamma_{\text{в}}}\frac{e^{(k\gamma_{\text{л}}-\gamma_{\text{в}})z_0}-1}{k\gamma_{\text{л}}-\gamma_{\text{в}}}-\frac{\sigma\varphi_0e^{-2.7\gamma_{\text{в}}z_0}}{2.7\gamma_{\text{в}}}\frac{e^{(k\gamma_{\text{л}}+1.7\gamma_{\text{в}})z_0}-1}{k\gamma_{\text{л}}+1.7\gamma_{\text{в}}}. \tag{17}$$

$$A_2(1.7\gamma_{\text{л}})=\frac{1-e^{-(1.7\gamma_{\text{л}}+\gamma_{\text{в}})z_0}}{1.7\gamma_{\text{л}}+\gamma_{\text{в}}}+\frac{\sigma\varphi_0}{2.7\gamma_{\text{в}}}\frac{1-e^{-(1.7\gamma_{\text{л}}+\gamma_{\text{в}})z_0}}{1.7\gamma_{\text{л}}+\gamma_{\text{в}}}+$$
$$+\frac{\sigma\varphi_0e^{-2.7\gamma_{\text{в}}z_0}}{2.7\gamma_{\text{в}}}\frac{1-e^{1.7(\gamma_{\text{в}}-\gamma_{\text{л}})}}{1.7(\gamma_{\text{в}}-\gamma_{\text{л}})}; \tag{18}$$

$\gamma_{\text{л}}$ определяется из (2) при $\alpha=\alpha_{\text{л}}$.

Аналогично определим светимость люминесценции, выходящей из слоя вверх. Для этого подставим (14) в (12) и (13) и с учетом (5), (6) и (15) проинтегрируем (12) по z от 0 до z_0, а (13) дважды проинтегрируем от z до z_0 по z' и от 0 до z_0 по z.

Суммируя полученные в результате интегрирования выражения для $E^{\uparrow}_{\text{л}1}$ и $E^{\uparrow}_{\text{л}2}$, получим

$$E^{\uparrow}_{\text{л}}=a_1a_2\left[\frac{a_2+1}{a_2}A_2(k\gamma_{\text{л}})-e^{-(1.7+k)\gamma_{\text{л}}z_0}A_1(1.7\gamma_{\text{л}})\right], \tag{19}$$

причем функции $A_1(1.7\gamma_{\text{л}})$ и $A_2(k\gamma_{\text{л}})$ получаются из (17) заменой k на 1.7 и из (18) заменой 1.7 на k.

Общая плотность мощности возбужденной в слое люминесценции определится интегрированием соотношения (14) по всему слою

$$E_{\text{л}}=\int_0^{z_0}dE_{\text{л}}=\frac{1}{\gamma}\eta\alpha_{\text{в}}(1-\rho_{\text{ф}})E_0\left(1-e^{-\gamma_{\text{в}}z_0}\right)\left\{1+\frac{\sigma\varphi_0}{2.7\gamma_{\text{в}}}\left[1-\frac{e^{-2.7\gamma_{\text{в}}z_0}\left(e^{1.7\gamma_{\text{в}}z_0}-1\right)}{1.7\left(1-e^{-\gamma_{\text{в}}z_0}\right)}\right]\right\}. \tag{20}$$

Таким образом, если известны характеристики среды σ, φ_0, $\alpha_{\text{в}}$ и $\alpha_{\text{л}}$, η, по формулам (16)—(20) может быть определена плотность мощности возбужденного в слое среды и вышедшего из него излучения люминесценции.

Соответственно мощность излучения люминесценции, поглощенного в слое, в расчете на единицу его поверхности

$$E_{\text{лп}} = E_{\text{л}} - E_{\text{л}}^{\downarrow} - E_{\text{л}}^{\uparrow}. \tag{21}$$

Для расчета поглощенного возбуждающего излучения

$$E_{\text{п}} = E_0 - E^{\downarrow} - E^{\uparrow}$$

плотности излучения, выходящего из слоя, могут быть определены: $E^{\downarrow}$ — по формулам (1), (2) при $\theta' = 0$, $\alpha = \alpha_{\text{в}}$ и $z = z_0$, а $E^{\uparrow}$ — по формуле (9) при $z = 0$ и замене $T_{\text{д}2}^{\text{в}}(z' - z) \to T_{\text{д}1}^{\text{в}}(z')\,\varkappa\,(1 - \rho_{\text{ф}})$

$$E^{\uparrow} = \frac{\sigma\varphi_0 E_0 \varkappa (1 - \rho_{\text{ф}})^2}{(1 + k)\,\gamma_{\text{в}}}\left[1 - e^{-(1+k)\gamma_{\text{в}} z_0}\right]. \tag{22}$$

Тогда может быть найден и технический выход люминесценции слоя

$$\eta_{\text{т}} = (E_{\text{л}}^{\downarrow} + E_{\text{л}}^{\uparrow})/E_{\text{п}}.$$

В практике, однако, чаще возникает обратная задача, когда характеристики среды $\alpha_{\text{в}}$, α_1, σ, φ_0, η неизвестны, выходящее из слоя излучение люминесценции может быть измерено, и требуется по-прежнему найти мощность поглощенной в образце люминесценции. В этом случае следует также измерить пропускание слоя $T_H(0, z_0)$ во всем спектре излучения люминесценции и для возбуждающей линии и по результатам этих измерений в соответствии с выражением (1) определить коэффициенты $\gamma_{\text{в}}$ и $\gamma_{\text{л}}$. Тогда соотношения (16) и (19) можно рассматривать как систему двух уравнений с двумя неизвестными ($\eta\alpha_1$) и ($\sigma\varphi_0$). Решив ее, можно затем рассчитать мощность возбужденной и поглощенной люминесценции по формулам (20), (21) и технический вывод люминесценции по формуле (22).

В некоторых случаях, когда сильно вытянутая индикатриса рассеяния сочетается с достаточно сильным поглощением, коэффициенты отражения среды очень малы. Такие условия соответствуют, например, океанской воде [10, 12]. Тогда с точностью $\rho + \rho^2 + \rho^3 + \ldots < 0.022$ можно вообще пренебречь светом, рассеянным назад. В этом приближении ($\varphi_0 = 0$) уравнения (16), (19) упрощаются, и их решения имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \eta\alpha_{\text{в}} &= \frac{2E_{\text{л}}^{\downarrow}(k\gamma_{\text{л}} - \gamma_{\text{в}})\,e^{k\gamma_{\text{л}} z_0}}{\varkappa (1 - \rho_{\text{ф}})^2 E_0 \left[e^{(k\gamma_{\text{л}} - \gamma_{\text{в}}) z_0} - 1\right[}, \\ \eta\alpha_{\text{в}} &= \frac{2E_{\text{л}}^{\uparrow}(\gamma_{\text{в}} + k\gamma_{\text{л}})}{\varkappa (1 - \rho_{\text{ф}})^2 E_0 \left[1 - e^{-(k\gamma_{\text{л}} + \gamma_{\text{в}}) z_0}\right]}. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Первое из соотношений (23) является решением уравнения (16), второе — (19). Сравнением величин ($\eta\alpha_{\text{в}}$), рассчитанных по этим двум соотношениям, можно проверить справедливость сделанных приближений для данного образца рассеивающей среды.

В этом же приближении ($\varphi_0 = 0$) уравнение (20) имеет вид

$$E_{\text{л}} = \gamma_{\text{в}}^{-1}\eta\alpha_{\text{в}}(1 - \rho_{\text{ф}})\,E_0\,(1 - e^{-\gamma_{\text{в}} z_0}). \tag{24}$$

Подставив в него первое из соотношений (23), получим выражение для расчета плотности мощности возбужденной в образце люминесценции по экспериментальным значениям $E_{\text{л}}^{\downarrow}$, $\gamma_{\text{в}}$ и $\gamma_{\text{л}}$

$$E_{\text{л}} = \frac{2E_{\text{л}}^{\downarrow}(k\gamma_{\text{л}} - \gamma_{\text{в}})\,e^{k\gamma_{\text{л}} z_0}\,(1 - e^{-\gamma_{\text{в}} z_0})}{\gamma_{\text{в}}\varkappa (1 - \rho_{\text{ф}})\left[e^{(k\gamma_{\text{л}} - \gamma_{\text{в}}) z_0} - 1\right]}. \tag{25}$$

Заметим, что полученные в пренебрежении рассеянным назад светом ($\varphi_0 = 0$) соотношения (23)—(25) пригодны для расчета люминесценции в средах с $\rho < 0.1$ с дополнительной погрешностью порядка $\rho + \rho^2 + \rho^3 + \ldots \approx 10\%$ по сравнению с соотношениями (16), (19), (20).

Общая погрешность расчета люминесценции в таких средах определяется также точностью «квазиоднократного» приближения (1) и апроксимации (5) и составляет $\approx 15\%$ при использовании формул (16, (19), (20) и $\approx 25\%$ при использовании формул (23) — (25).

С уменьшением вытянутости индикатрис рассеяния и увеличением Λ и ρ разница в точности между соотношениями (23)—(25) и более точными и общими соотношениями (16), (19), (20) будет возрастать (одновременно с некоторым ухудшением точности самого «квазиоднократного» приближения, проверенной пока только для сильно вытянутых морских индикатрис).

Отметим, что формулы (23)—(25) отличаются от аналогичных соотношений для расчета люминесценции в чисто поглощающих средах только значениями показателей ослабления $\gamma_в$ и $\gamma_л$, которые в отсутствие рассеяния переходят в соответствующие показатели поглощения $\alpha_в$ и $\alpha_л$.

В заключение автор приносит благодарность В. П. Козлову за полезные обсуждения и замечания.

Литература

[1] А. П. Иванов. Оптика рассеивающих сред. Минск, 1969.
[2] D. Spitzer, J. J. Ten Bosch. Appl. Opt., *15*, 934, 1976.
[3] Б. И. Степанов, Ю. И. Чекалинская. Тр. Инст. физ. и матем. АН БССР, вып. 2, 19, 1957.
[4] N. T. Melamed. J. Appl. Phys., *34*, 560, 1963.
[5] Г. В. Розенберг. Ж. прикл. спектр., *2*, 315, 1965.
[6] Э. П. Зеге. О двухпотоковом приближении в теории переноса излучения. Препринт Инст. физ. АН БССР, Минск, 1971.
[7] Г. В. Розенберг. Усп. физ. наук, *69*, 57, 1959.
[8] Б. М. Голубицкий, И. М. Левин, М. В. Танташев. Изв. АН СССР, сер. физика атмосферы и океана, *10*, 798, 1974.
[9] Б. М. Голубицкий, И. М. Левин, М. В. Танташев. Изв. АН СССР, сер. физика атмосферы и океана, *10*, 1235, 1974.
[10] И. М. Левин, Б. М. Голубицкий. Тр. Всесоюзн. Совещ. по распространению оптического излучения в дисперсной среде. Обнинск, 1978.
[11] H. R. Gordon. Appl. Opt., *12*, 2803, 1973.
[12] H. R. Gordon, O. B. Brown, M. M. Jacobs. Appl. Opt., *14*, 417, 1975.
[13] H. R. Gordon, O. B. Brown. Appl. Opt., *13*, 2153, 1974.
[14] А. А. Гершун. Тр. ГОИ, *11*, вып. 99, 43, 1936.

Поступило в Редакцию 13 декабря 1978 г.
В окончательной редакции 4 июня 1979 г.