

## ОБ ИЗМЕРЕНИИ ДИАМЕТРОВ ПУЧКОВ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ РЕШЕТКИ

А. В. Хромов

Теоретически исследуется возможность измерения диаметра поперечного сечения пучков лазерного излучения по числу вторичных максимумов в дифракционной картине Фраунгофера. Рассмотрено несколько различных видов распределения плотности мощности в пучке, для которых указанная возможность подтверждается.

Известно, что число вторичных максимумов  $M$  между соседними главными в дифракционной картине Фраунгофера равно числу однородно освещенных щелей решетки [1]. Следовательно, по числу вторичных максимумов  $M$  можно найти ширину пучка лазерного излучения, падающего на бесконечную решетку. В ряде случаев регистрация числа максимумов (или расстояний между ними) может оказаться более легкой задачей, чем точное фотометрирование, которое необходимо при других способах измерений диаметра пучка. Например, для импульсного ИК излучения фотометрические характеристики регистрирующих сред весьма неудовлетворительны, а регистрация периодических структур с этими же средами вполне возможна [2].

Однако если освещение решетки неоднородно, то число вторичных максимумов неизвестно, и его связь с шириной пучка неясна. С целью установления этой связи ниже теоретически рассматривается несколько различных распределений, когда можно рассчитать число  $M$  и сопоставить его с параметрами кривой распределения светового возбуждения. Технические возможности наблюдения вторичных максимумов здесь не обсуждаются, однако ясно, что речь идет об очень грубой решетке — порядка десяти штрихов в пределах поперечного сечения пучка излучения.

Без ущерба для общности рассмотрим одномерную задачу. Направим ось  $x$  в плоскости решетки перпендикулярно ее щелям;  $d$  — период решетки,  $a$  — ширина щелей и  $b=d-a$  — ширина непрозрачных промежутков. На решетку падает плоская монохроматическая волна. Непосредственно за решеткой световое возбуждение задается функцией  $t(x)$ . Задача сводится к отысканию углового спектра  $T(\nu)$  функции  $t(x)$ . Интенсивность в картине Фраунгофера будет пропорциональна  $|T(\nu)|^2$ . Сначала запишем известные результаты той задачи, когда освещение решетки однородно.

1. П - образное распределение. Пусть одинаково освещены  $2N$  последовательных щелей решетки (рис. 1, а), а именно в области  $x > 0$   $t(x)=1$  в интервалах  $nd+(b/2) < x < (n+1)d-(b/2)$  ( $n=0, 1, 2, \dots, N-1$ ) и  $t(x)=0$  вне этих интервалов. Для отрицательной области  $t(-x)=t(x)$ . Угловой спектр будет

$$T(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} t(x) \exp(-i2\pi\nu x) dx = 2 \sum_{n=0}^{N-1} \int_{nd+(b/2)}^{(n+1)d-(b/2)} \cos(\nu x) dx =$$

$$= 2 \frac{\sin \frac{\nu a}{2}}{\nu} \frac{\sin(\nu Nd)}{\sin \frac{\nu d}{2}}, \quad (1)$$

где обозначено  $2\pi\nu = \kappa$ .

Как известно, множитель  $\sin(\kappa a/2)/\kappa$  описывает плавное распределение по углу, обусловленное дифракцией на одной щели. Остальная часть

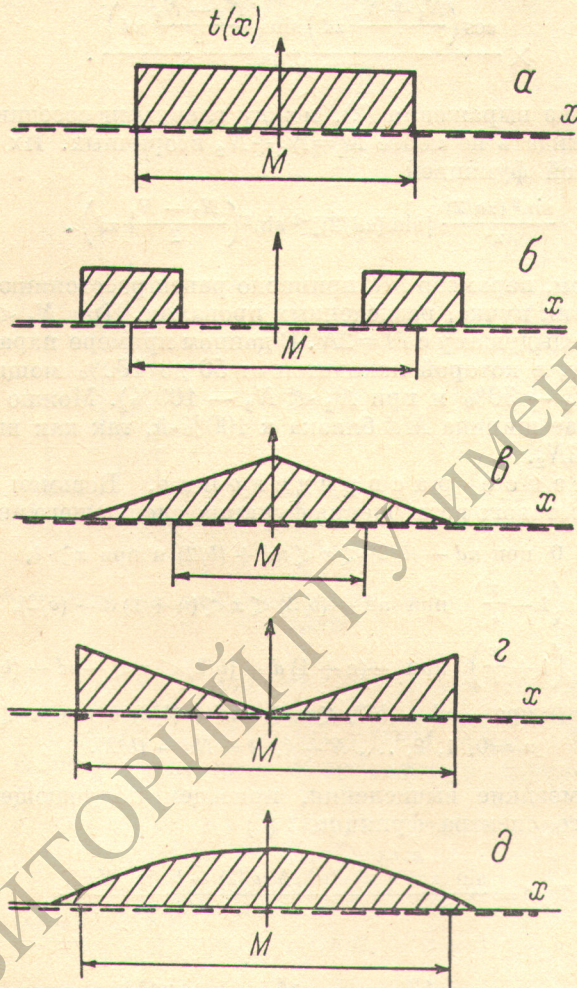


Рис. 1. Представление ширины пучков с помощью параметра  $M$ .

$t(x)$  — распределение светового возбуждения в поперечном сечении пучка,  $M$  — число вторичных максимумов между соседними главными в дифракционной картине Фраунгофера.

выражения (1) определяет появление главных и вторичных максимумов. В данной задаче между соседними главными максимумами появляется  $M=2N$  вторичных. Из них первый и последний сливаются с главными. Случаи выпадения главных максимумов мы разбирать не будем, так как они учитываются обычным образом. Итак, в данном примере параметр  $M$  выражает в периодах решетки полную ширину пучка (с точностью до одного периода решетки), или минимальную ширину, в которой содержится 100% мощности излучения.

2. Прямоугольное распределение с провалом по середине. Известно, что подобное распределение может наблюдаться у мощных технологических лазеров [3]. Предположим, что в области  $x > 0$  в интервалах  $nd + (b/2) < x < (n+1)d - (b/2)$  ( $n = N_1, N_1+1, \dots, N_2-2, N_2-1$ )  $t(x) = 1$ , а вне этих интервалов  $t(x) = 0$ . Положим также, что  $t(-x) = t(x)$  (рис. 1, б). Тогда для нахождения углового спектра можно использовать решение предыдущей задачи и получить

$$T(\nu) = 2 \left( \sum_{n=0}^{N_2-1} - \sum_{n=0}^{N_1-1} \right) \int_{nd+(b/2)}^{(n+1)d-(b/2)} \cos(\nu x) dx = 4 \frac{\sin(\nu a/2)}{\nu} \times \\ \times \frac{\cos\left(\frac{N_1+N_2}{2} \nu d\right) \sin\left(\frac{N_2-N_1}{2} \nu d\right)}{\sin(\nu d/2)}. \quad (2)$$

Как следует из выражения (2), между главными соседними максимумами следует ожидать не менее  $M = N_1 + N_2$  вторичных. Их высота модулирована плавной функцией

$$\frac{\sin^2(\nu a/2)}{\nu^2} [\sin(\nu d/2)]^{-2} \sin^2\left(\frac{N_2-N_1}{2} \nu d\right).$$

Таким образом, параметр  $Md$  примерно равен расстоянию между центрами двух половин пучка, разделенных провалом. При  $N_1 \ll N_2$  решение (2) сведется к предыдущему с  $M = 2N$ . В данном примере параметр  $M$  представляет ширину, в которой находится от 50 до 100% мощности излучения (при  $N_1 \approx N_2 - 50\%$  и при  $N_1 \ll N_2 - 100\%$ ). Можно считать, что и в первом случае ширина  $Md$  близка к 100%-й, так как ввиду  $N_1 \approx N_2$  имеем  $N_1 + N_2 \approx 2N_2$ .

3.  $\Delta$ -образное распределение. Возьмем за исходное распределение светового возмущения функцию следующего вида (рис. 1, в):

$$t(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } nd - (b/2) < x < nd + (b/2) \text{ и при } x > l, \\ \left(1 - \frac{x}{l}\right) & \text{при } nd + (b/2) < x < (n+1)d - (b/2), \\ \left(1 + \frac{x}{l}\right) & \text{при } -(n+1)d + (b/2) < x < -nd - (b/2), \\ 0 & \text{при } -nd - (b/2) < x < -nd + (b/2) \text{ и при } x < -l, \end{cases} \quad (3)$$

$n = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad l = Nd - (b/2).$

Опуская громоздкие вычисления, приведем получающееся выражение для углового спектра функции  $t(x)$

$$T(\nu) = \frac{\sin(\nu a/2)}{\nu l} \frac{B \sin^2(N \nu d/2) - b \sin(N \nu d)}{\sin(\nu d/2)}, \quad (4)$$

где

$$B = 2 \left( \frac{2}{x} + d \operatorname{ctg} \frac{\nu d}{2} - a \operatorname{ctg} \frac{\nu a}{2} \right). \quad (5)$$

По существу нас должны интересовать только области вблизи однощелевых максимумов, т. е. области, где  $\nu \rightarrow 0$  или  $\nu a \rightarrow \pi(2m+1)$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ). Вблизи этих точек на конечных интервалах справедливо соотношение  $B \gg b$ , и, следовательно, на этих участках функция  $T(\nu)$  «осциллирует» как  $\sin^2(N \nu d/2)$ . Это означает, что между соседними главными максимумами имеется уменьшенное количество вторичных. Действительно, в спектрах, вычисленных при  $a \rightarrow 0$ , с помощью ЦВМ для  $4 \leq N \leq 10$  в промежутках  $0 < \nu d/2 < \pi$  среди общего числа  $2N-2$  вторичных максимумов наблюдается чередование больших и резко ослабленных более узких максимумов (рис. 2). Если число  $M$  будет измерено только по остающимся широким максимумам как  $M = N$ , то на ширине  $Md$  сосредоточено 7/8 или 87.5% мощности излучения всего пучка.

4. М-образное распределение. Оно изображено на рис. 1,  $z$  и аналитически исследуется подобно предыдущему. Задаемся при  $x > 0$   $t(x) = x/l$  на интервалах  $nd + (b/2) < x < (n+1)d - (b/2)$  ( $n=0, 1, 2, \dots, N-1$ ) и  $t(x) = 0$  вне этих интервалов. Кроме того,  $t(-x) = -t(x)$ .

Угловой спектр получается в виде

$$T(\nu) = \frac{\sin \frac{\nu a}{2}}{\nu l} \frac{B \sin^2 (N \nu d/2) + 2Nd \sin (N \nu d)}{\sin (\nu d/2)}. \quad (6)$$

Теперь в отличие от предыдущего случая при сравнении двух слагаемых в числителе коэффициент  $B$  не является превалирующим, так как

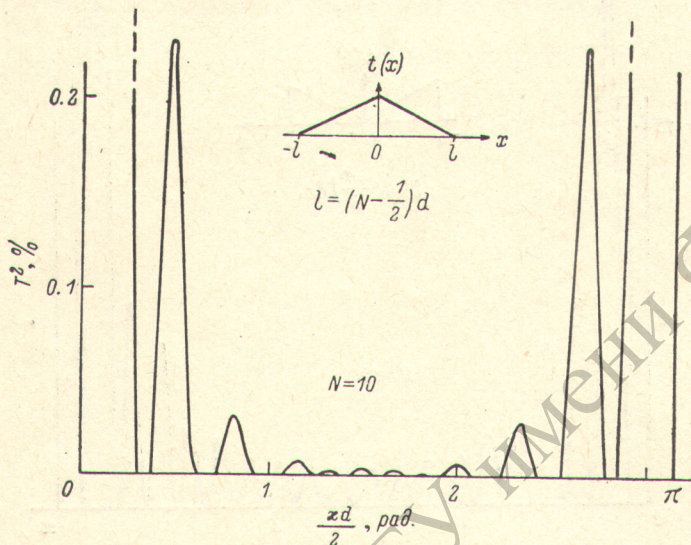


Рис. 2. Угловой спектр при  $\Delta$ -образном распределении светового возмущения на решетке.

$2Nd \gg b$ . Поэтому число вторичных максимумов определяется функцией  $\sin(N \nu d)$  и равно  $2N$ . Это иллюстрируется рис. 3 спектром, рассчитанным на промежутке  $0 < \nu d/2 < \pi$  с помощью ЦВМ при  $a \rightarrow 0$ . Таким образом, для данного распределения число  $M$  дает полную ширину пучка, как отмечено на рис. 1,  $z$ .

5. Распределение вида  $\cos x$ . Зададим функцию  $t(x)$  следующим образом (рис. 1,  $\theta$ ). При положительных  $x$

$$t(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } nd - (b/2) < x < nd + (b/2) \text{ и при } x > l, \\ \cos \frac{\pi x}{2l} & \text{при } nd + b/2 < x < (n+1)d - b/2, \end{cases} \quad (7)$$

$n = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad l = Nd - (b/2).$

Для отрицательной полуоси  $t(-x) = t(x)$ .

Угловой спектр функции  $t(x)$  получается в виде

$$\begin{aligned} T(\nu) = & \frac{\sin \left[ \left( x + \frac{\pi}{2l} \right) \frac{a}{2} \right]}{x + \frac{\pi}{2l}} \cdot \frac{\sin \left[ \left( x + \frac{\pi}{2l} \right) Nd \right]}{\sin \left[ \left( x + \frac{\pi}{2l} \right) \frac{d}{2} \right]} + \\ & + \frac{\sin \left[ \left( x - \frac{\pi}{2l} \right) \frac{a}{2} \right]}{x - \frac{\pi}{2l}} \cdot \frac{\sin \left[ \left( x - \frac{\pi}{2l} \right) Nd \right]}{\sin \left[ \left( x - \frac{\pi}{2l} \right) \frac{d}{2} \right]}. \end{aligned} \quad (8)$$

Он состоит как бы из двух спектров, сдвинутых по оси  $x$  один относительно другого на отрезок  $\pi/l$ . У двух спектров однощелевые и одно-

именные главные решеточные максимумы сливаются. В суммарном спектре интервалы между главными максимумами, как обычно, будут равны  $2\pi/d$ . У двух спектров сливаются также вторичные (разноименные) максимумы. Или иначе, для выявления дополнительных осцилляций выражение (8) можно привести к виду

$$T(\nu) = c(x) \sin [xNd + \gamma(x)], \quad (9)$$

где  $c(x)$  и  $\gamma(x)$  — медленно меняющиеся факторы, причем  $|\gamma| < \pi/2$ . Отсюда видно, что число вторичных максимумов будет равно числу освещенных щелей. Таким образом, при распределении типа  $\cos x$  (рис. 1, *г*)

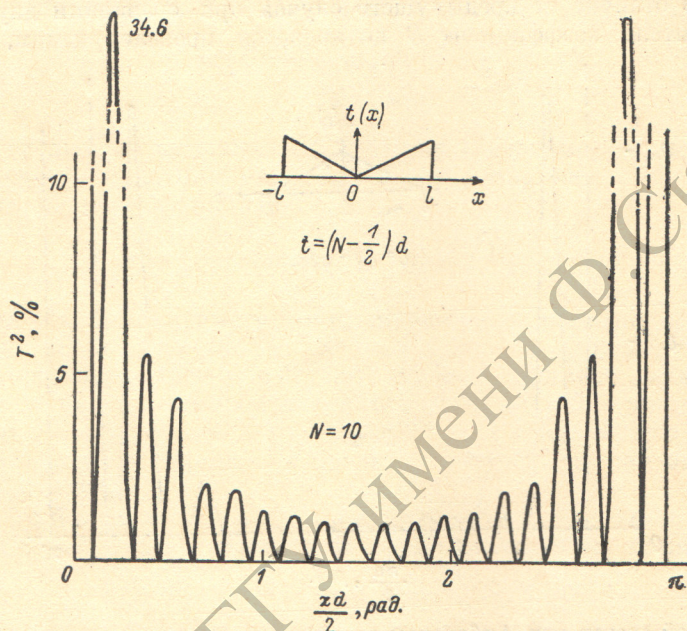


Рис. 3. Угловой спектр при М-образном распределении светового возмущения на решетке.

отрезок  $Md$  (точнее  $(M+1)d \pm d$ ) дает полную ширину пучка, заключающую 100% мощности излучения.

Были рассмотрены и некоторые другие виды распределения, в частности гауссово. В последнем случае, поскольку аналитического решения нет, исследования проводились с помощью ЦВМ и результаты сводятся к следующему. При полном гауссовом распределении вторичные максимумы в дифракционной картине не наблюдаются. Они появляются, когда гауссово распределение ограничено (обрезано) на некотором удалении от оси пучка, как это и бывает в реальных экспериментах. В этом случае число вторичных максимумов между соседними главными  $M$  определяет ширину, в которой сосредоточена доля мощности, близкая к 100% от полной мощности пучка. Если гауссово распределение обрезано на небольшом удалении от центра ( $|x| \leq 2\sigma$ , т. е. на уровне не ниже  $\sim 3 \div 5\%$  от максимальной интенсивности), то число  $M$  просто равно числу освещенных щелей решетки, как в случае прямоугольного распределения. При дальнейшем расширении крыльев гауссова распределения ( $|x| > 3\sigma$ ) рост числа вторичных максимумов  $M$  отстает от числа щелей  $2N$ , на которые продолжено распределение. Можно было бы найти более точные соотношения, однако практической ценности они не имеют, так как все равно интенсивность вторичных максимумов при этом быстро стремится к нулю. Аналогично ведет себя распределение вида  $[1 + (x^2/\sigma^2)]^{-1}$ .

Общая задача о возможности наблюдения и свойствах чисел  $M$  при произвольном распределении плотности мощности в лазерном пучке данными расчетами, конечно, не решена. Однако выше рассмотрены искус-

ственные примеры разнообразных и сильно отличающихся распределений, и во всех случаях число  $M$  характеризует диаметр поперечного сечения пучка, содержащего долю мощности, близкую к 100%. Поэтому возможно, что число вторичных максимумов  $M$  между соседними главными окажется полезным объективным параметром, характеризующим ширину пучка при некоторых экспериментальных исследованиях и при эксплуатации лазеров.

#### Литература

- [1] М. Борн, Э. Вольф. Основы оптики. «Наука», М., 1973.
- [2] I. A. Panshin, B. M. Stepanov, V. A. Fabrikov, A. V. Khromov. Actes du 10<sup>e</sup>me Congres International de Cinematographie Ultra-Rapide, 525. Paris, 1973.
- [3] Н. В. Карлов, Ю. Б. Конев. Мощные молекулярные лазеры. «Знание», М., 1976.

Поступило в Редакцию 30 января 1979 г.  
В окончательной редакции 15 мая 1979 г.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ имени Ф. СКОРИНЫ