УДК 519.248

А. С. Грузинова

РАСЧЕТ ХАРАКТЕРИСТИК ИНВЕСТИЦИОННОГО ПОРТФЕЛЯ НА ОСНОВЕ ОДНОФАКТОРНОЙ РЫНОЧНОЙ МОДЕЛИ

Статья посвящена использованию стохастических методов анализа поведения рисковых активов. Рассмотрено применение однофакторной рыночной модели для моделирования доходностей рыночных активов. На основе построенных моделей рассчитываются характеристики инвестиционных портфелей. Рассмотрены портфели, сформированные из акций Газпром, Лукойл, Сбербанк, в качестве фактора рассматривается индекс ММВБ.

Портфель ценных бумаг является тем инструментом, с помощью которого инвестору обеспечивается оптимальное для него соотношение доходности и риска инвестиций. Принимая решение о целесообразности инвестиций, инвестор должен оценить риск, присущий этим активам и их ожидаемую доходность.

Пусть для модели $r_{it} = \alpha_i + \beta_i r_{It} + \varepsilon_{it}, (i = 1,2,..., N; t = 1,2,...,T)$ выполняются предположения относительно случайных отклонений $\{\xi_{it}\}$:

1.Симметричность: $E\{\xi_{it}\} = 0$.

2. Взаимная некоррелируемость для различных активов и различных моментов времени: $Cov(\xi_{it}, \xi_{j\tau}) = E(\xi_{it}, \xi_{j\tau}) = \psi_{ij} = 0$ для $i \neq j, t \neq \tau (t, \tau = 1,2,...,T; i, j = 1,2,..., N)$, что означает отсутствие перекрестных связей и временной корреляции случайных отклонений.

3. Постоянство дисперсий: $D(\xi_{it}) = \psi_i^2 = const$ для всех $t = 1,2,...,T$.

4. Взаимная некоррелируемость ξ_{it} и r_{It}: $Cov(\xi_{it}; \xi_{It}) = 0, (i = 1,2,..., N; t = 1,2,...,T)$.

Тогда могут быть получены следующие представления для ожидаемых доходностей $\{\mu_i\}$, дисперсий доходностей $\{\sigma_i^2\}$ и ковариаций доходностей $\{\sigma_{ij}\}(i \neq j)(i, j = 1,2,..., N)$ активов:

$$\mu_i = \alpha_i + \beta_i \mu_I, \tag{1}$$

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_I^2 + \psi_i^2, \tag{2}$$

$$\sigma_{ij} = \beta_i \beta_j \sigma_I^2, i \neq j. \tag{3}$$

Подставляя в формулы (1)–(3) вместо неизвестных истинных значений параметров их оценки вида:

$$\tilde{\alpha}_i = \tilde{\mu}_i - \tilde{\beta}_i \tilde{\mu}_j, \tag{4}$$

$$\tilde{\beta}_i = \frac{\sum_{t=1}^{T} (r_{it} - \tilde{\mu}_i)(r_{It} - \tilde{\mu}_I)}{\sum_{t=1}^{T} (r_{it} - \tilde{\mu}_i)^2} = \frac{\tilde{\sigma}_{Ii}}{\tilde{\sigma}_I^2}, \tag{5}$$

где

$$\tilde{\mu}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} r_{it}, \qquad \tilde{\mu}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} r_{It},$$

а оценки параметров $\sigma_I^2, \sigma_{It}, \psi_i^2$ вычисляются по формулам:

$$\tilde{\sigma}_I^2 = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(r_{It} - \tilde{\mu}_I)^2,$$

$$\tilde{\sigma}_{Ii} = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(r_{it} - \tilde{\mu}_i)(r_{It} - \tilde{\mu}_I), \quad (6)$$

$$\psi_i^2 = \frac{1}{T-2}\sum_{t=1}^{T}(r_{it} - \tilde{\alpha}_i - \tilde{\beta}_i r_{It})^2, \quad (7)$$

можно вычислить оценки соответствующих характеристик активов $\mu = (\mu_i)$ и $\sum = \{\sigma_{ij}\}(\sigma_{ij} \equiv \sigma_I^2)$, которые необходимы для решения задачи оптимизации структуры портфеля ценных бумаг.

При использовании модели $r_{it} = \alpha_i + \beta_i r_{It} + \varepsilon_{it}, (i = 1,2,..., N; t = 1,2,..., T)$ число статистически оцениваемых параметров равно *n=3N+2* (*2N* параметров $\{\alpha_i; \beta_i\}$ плюс *N* параметров $\{\psi_i\}$ плюс μ_I и σ_I^2) при условии, что объем выборки равен *TN*. При непосредственном оценивании число оцениваемых параметров *m=N(N+3)/2*, то есть на порядок больше.

Таким образом, при наличии адекватной факторной эконометрической модели задача статистического оценивания характеристик активов μ, Σ становится вполне разрешимой. На практике, однако, для адекватного описания исследуемых зависимостей могут понадобиться более сложные эконометрические модели, например модели, учитывающие влияние нескольких факторов (многофакторные модели); модели, предполагающие совместный анализ доходностей некоторого множества активов (многомерные модели); модели, учитывающие динамику изменения курсов активов (динамические модели).

Важным представляется класс эконометрических моделей, имеющих строгое экономическое обоснование и справедливых при некоторых дополнительных ограничениях на условия функционирования фондового рынка.

Доходность портфеля за рассматриваемый период владения будет равна:

$$r_{pt} = \sum_{i=1}^{N} x_i r_{it} \quad (8)$$

Или с учетом $r_{it} = \alpha_i + \beta_i r_{It} + \varepsilon_{it}, (i = 1,2,..., N; t = 1,2,..., T)$:

$$r_{pt} = \alpha_p + \beta_p r_{It} + \varepsilon_{pt}, \quad (9)$$

где $\alpha_p, \beta_p, \varepsilon_p$ – средневзвешенные значения соответствующих величин:

$$\alpha_p = \sum_{i=1}^{N} x_i \alpha_i, \quad (10)$$

$$\beta_p = \sum_{i=1}^{N} x_i \beta_i, \quad (11)$$

$$\varepsilon_{pt} = \sum_{i=1}^{N} x_i \varepsilon_{it}. \quad (12)$$

Вычисляя дисперсию случайных величин в обеих частях соотношения (9) находим:

$$\sigma_p^2 = \beta_p^2 \sigma_I^2 + \psi_p^2, \quad (13)$$

где $\psi_p^2 = D(\varepsilon_p)$, то есть общий риск портфеля также состоит их двух компонентов – систематического риска $\beta_p^2 \sigma_I^2$ и несистематического риска ψ_p^2 портфеля ценных бумаг.

Из архивов котировок акций взяты данные в период с 03.11.2014 по 24.11.2014 гг. по трем предприятиям: Газпром, Лукойл и Сбербанк, а также взят индекс ММВБ – условная величина, которая отображает изменение во времени стоимости акций крупнейших компаний на рынке московской фондовой биржи.

На основе доходностей акций построены модели линейной регрессии для трех предприятий:

$r_1 = 0{,}0020868 + 0{,}25174478 r_{It}$ – модель линейной регрессии для предприятия Газпром;

$r_2 = 0{,}0060115 - 0{,}0798459 r_{It}$ – модель линейной регрессии для предприятия Лукойл;

$r_3 = -0{,}00214645 + 0{,}53866005 r_{It}$ – модель линейной регрессии для предприятия Сбербанк.

Доля капитала инвестора, вложенная в *i*-ую ценную бумагу:

$$x_i = \frac{u_i}{w_0}.$$

Имеем:

$$x_1 = \frac{u_1}{w_0} = \frac{500}{1500} = 0{,}333,$$

$$x_2 = \frac{u_2}{w_0} = \frac{500}{1500} = 0{,}333,$$

$$x_3 = \frac{u_3}{w_0} = \frac{500}{1500} = 0{,}333.$$

Доходность портфеля равна:

$$\mu_p = 0{,}002452151.$$

Риск портфеля:

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma_p^2} = \sqrt{0{,}0000312495} = 0{,}00559..$$

Оценим с помощью *t*-критерия Стьюдента статистическую значимость коэффициентов уравнений.

Для проверки значимости коэффициентов уравнения выдвигаются гипотезы:

$H_0 : \alpha, \beta = 0,$ коэффициент незначимый

$H_1 : \alpha, \beta \neq 0,$ коэффициент значимый.

При заданном уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ находится $t_{крит.} = t_{\frac{\alpha}{2}}(n - m - 1)$. Так как $| t_{набл.} | < t_{крит.}$ для всех *t*, то гипотеза H_0 принимается и коэффициенты считаются статистически не значимыми.

Для проверки гипотезы о значимости множественного коэффициента детерминации выдвигаются гипотезы:

$H_0 : R^2 = 0,$ коэффициент незначим

$H_1 : R^2 \neq 0,$ коэффициент значим.

Для проверки гипотез используется F статистика:

$$F = \frac{\frac{R^2}{m}}{\frac{1-R^2}{n-m-1}}.$$

При заданном уровне значимости $\alpha = 0{,}05$:

$$F_{крит.} = F_\alpha(m, n-m-1).$$

Так как $F_{набл.} < F_{крит.}$, для всех уравнений, то гипотеза H_0 принимается, R^2 считаются не значимыми и следовательно не значимы все уравнения регрессии в целом.

На основе доходностей акций построены модели линейной регрессии для трех предприятий:

$r_1 = 0{,}0029308 + 1{,}2596567 r_{It}$ – модель линейной регрессии для предприятия Газпром.

$r_2 = -0{,}0020377 + 1{,}01948798 r_{It}$ – модель линейной регрессии для предприятия Лукойл.

$r_3 = 0{,}006751402 + 1{,}022118315 r_{It}$ – модель линейной регрессии для предприятия Сбербанк.

Доходность портфеля равна:

$$\mu_p = 0{,}00230772.$$

Риск портфеля:

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma_p^2} = \sqrt{0{,}0028932988} = 0{,}0537894..$$

При проверке значимости коэффициентов уравнения, получили, что все β коэффициенты значимы.

При проверке гипотезы о значимости множественного коэффициента детерминации и уравнений регрессии в целом все уравнения оказались значимыми.

Литература

1. Люу, Ю. Д. Методы и алгоритмы финансовой математики / Ю. Д. Люу. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2007. – 751 с.
2. Малюгин, В. И. Рынок ценных бумаг: количественные методы анализа / В. И. Малюгин. – Мн.: БГУ, 2001. – 203 с.
3. РТС. Фондовая биржа «Российская торговая система» [Электронный ресурс] / Фондовый рынок – Фондовая биржа РТС. – Режим доступа http://www.rts.ru/ru/spot/.
4. Терпугов, А. Ф. Математика рынка ценных бумаг / А. Ф. Терпугов. – Томск: Изд-во НТЛ, 2004. – 164 с.
5. Ширяев, А. Н. Основы стохастической финансовой математики / А. Н. Ширяев. – М.: Фазис, 1998. – Т.1: Факты и модели. – 489 с.