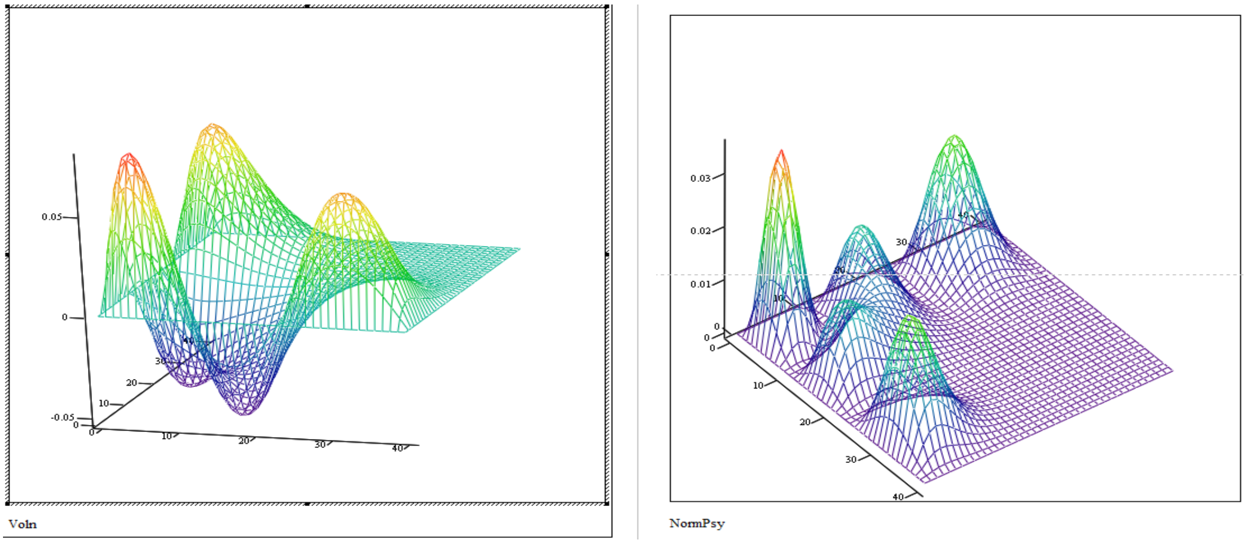

Рисунок 4 – Графики поверхности волновой функции (слева)
и нормированной волновой функции на коэффициент 0.03 для четвертого уровня энергии

Таким образом, математический пакет Mathcad является удобным инструментом для решения задач квантовой механики численными методами. Однако для более точных решений требуется увеличивать число разбиений *N*, для чего необходим более мощный компьютер.

Литература

1. Давыдов, А. С. Квантовая механика : учеб. пособие для вузов / А. С. Давыдов. – М. : Физматгиз, 1963. – 748 с.

2. Турчак, Л. И. Основы численных методов : учеб. пособие для вузов / Л. И. Турчак, П. В. Плотников. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Физматлит, 2005. – 304 с.

3. Кирьянов, Д. В. Самоучитель Mathcad 13. / Д. В. Кирьянов. – СПб.: БХВ-Петербург, 2006. – 528 с.: ил.

УДК 539.2

В. В. Кукобникова

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ СТАЦИОНАРНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ С ПРИМЕНЕНИЕМ ИНСТРУМЕНТА PDETOOL MATLAB

Статья посвящена моделированию и графическому отображению поля скоростей в рамках численного решения уравнений стационарной гидродинамики методом конечных элементов с применением интерактивного программного средства PDETool системы Matlab

Исследование большинства физических процессов связано с решением довольно сложных уравнений или систем уравнений. Численные методы помогают в таких случаях получить приближённые решения этих уравнений. Несмотря на приближённость такого решения, погрешность его, как правило, сведена к минимуму и качественно не влияет на наблюдаемые физические закономерности систем. Также численные методы помогают рассмотреть различные варианты физических моделей за короткий промежуток времени, значительно упрощая исследование этих моделей.

Программная систем Matlab является мощным инструментом для решения широкого спектра научных и прикладных задач в таких областях как применение численных методов, построение графиков функций, моделирование объектов и разработка систем управления, обработка сигналов и изображений. Matlab (сокращение от «Matrix Laboratory») − термин, относящийся к пакету прикладных программ для решения задач технических вычислений, а также к используемому в этом пакете языку программирования.

Интерактивная вычислительная среда Partial Differential Equation (PDE) Toolbox при пакете Matlab 6.5 предназначена для численного решения двумерных задач математической физики методом конечных элементов. Эта среда позволяет решать все типы задач математической физики, а именно [1]:

1) эллиптические уравнения вида

$$-\nabla(c\nabla u) + au = f\,, \tag{1}$$

где a, b и f – произвольные функции, в произвольной двумерной области Ω, на границе которой можно ставить

– условие Дирихле вида $hu = r$ (здесь h и r – произвольные функции);

– обобщённое условие Неймана $(n, c\nabla u) + qu = g$ (здесь n – нормаль к границе Ω, а q и r – произвольные функции).

2) Параболические уравнения вида

$$du_t - \nabla(c\nabla u) + au = f, \tag{2}$$

где a, b, d и f – произвольные функции, в произвольной области $\Omega \times [0, T]$ с граничными условиями Дирихле или Неймана и начальным условием $u = u_0(x)$ при $t = 0$.

3) Гиперболические уравнения вида

$$du_{tt} - \nabla(c\nabla u) + au = f, \tag{3}$$

где a, b, d и f – произвольные функции, в произвольной области $\Omega \times [0, T]$ с граничными условиями Дирихле или Неймана и начальным условием $u = u_0(x)$, $u_t = u_1(x)$ при $t = 0$.

4) Задачи на собственные значения вида

$$-\nabla(c\nabla u) + au = \lambda du, \tag{4}$$

где a, b, d – произвольные функции, в произвольной двумерной области с граничными условиями Дирихле или Неймана.

Графический интерфейс среды PDE Toolbox позволяет задавать двумерную область Ω путём её рисование в редакторе, подобном Paintbrush, а функции $a, b, \ldots$ – аналитическими формулами. При этом предусмотрена возможность задания этих функций различными формулами в различных подобластях Ω.

Для численного решения задач с помощью инструмента PDETool в командной строке, отмеченной символом >>, главного окна пакета Matlab, необходимо набрать слово pdetool. После этого появится окно среды PDE Toolbox.

Ввод условий задачи осуществляется в три этапа [2]:

1. Задание двумерной области Ω, в которой будет решаться краевая задача, осуществляется примерно так же, как в любом графическом редакторе.

2. Задание граничного условия. При нажатии кнопки $[\partial\Omega]$ граница фигуры выделяется красным. Это означает, что на границе заданы условия Дирихле $u = 0$ (такой выбор сделан по умолчанию). Для их смены используют меню Boundary и выбор пункта Specify Boundary Condition.

3. Задание уравнения. В меню PDE выбирается пункт Specify PDE.

После задания условия задачи выполняется автоматическое разбиение области на конечные элементы и численный расчет. В результате получаем график приближенного решения задачи.

Для примера рассмотрим задачу об обтекании цилиндра. Поле скоростей установившегося течения идеальной жидкости в канале постоянной ширины – это постоянный вектор, направленный вдоль канала. Будем считать, что канал имеет бесконечную высоту, и поместим внутрь него бесконечный цилиндр произвольного сечения, тогда течение примет вид (рисунок 1).

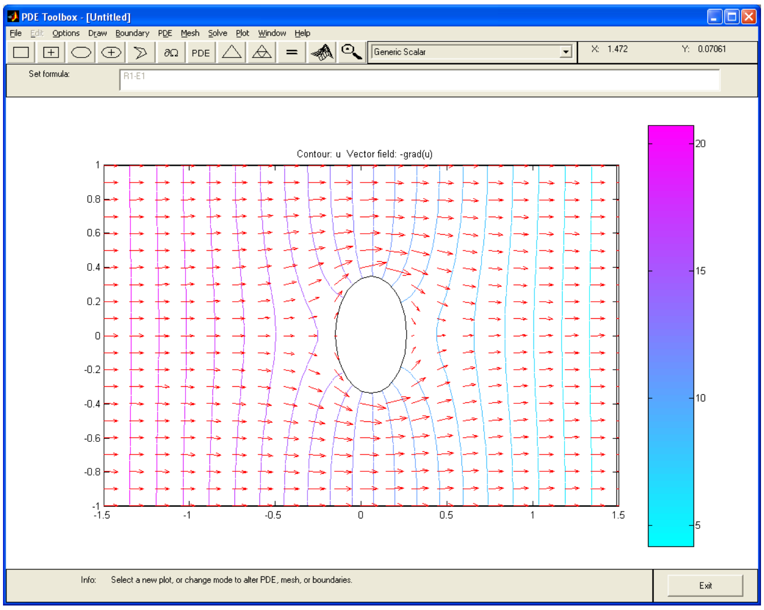

Рисунок 1 – Течение идеальной жидкости в канале,
внутри которого находится цилиндр

Найдём теперь, какой краевой задаче удовлетворяет поле скоростей v при движении несжимаемой жидкости. Будем считать течение потенциальным, то есть можно ввести скалярный потенциал u, такой, что $v = \nabla u$. Тем самым исключаем из рассмотрения вихри. Из условия несжимаемости жидкости $\operatorname{div} v = 0$ следует уравнение [3]

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \nabla u = 0,$$

то есть потенциал u оказывается гармонической функцией.

Граничные условия находим из следующих соображений: поскольку поток не проникает сквозь стенки канала и цилиндра, то должно выполняться соотношение

$$(n, v) = (n, \nabla u) = 0$$

на этих стенках. Для того чтобы сделать рассматриваемую область конечной, рассмотрим два сечения канала: до и после цилиндра, например, $x = -5$ и $x = 5$.

Из физических соображений ясно, что на большом расстоянии от цилиндра его присутствие не должно ощущаться, если разнести эти сечения достаточно далеко.

Таким образом, потенциал u в области Ω между этими сечениями удовлетворяет следующей краевой задаче: $\Delta u = 0$, $(n, \nabla u) = 0$ – на границе канала и цилиндра, $(n, \nabla u) = (n, ex)v_0$ – на границе сечений.

Решение этой задачи единственно, и может быть получено при помощи PDETool.

Далее рассмотрим задачу об обтекании нескольких цилиндров. В данном случае необходимо задать различные граничные условия на разных участках границы. Течение примет вид (рисунок 2).

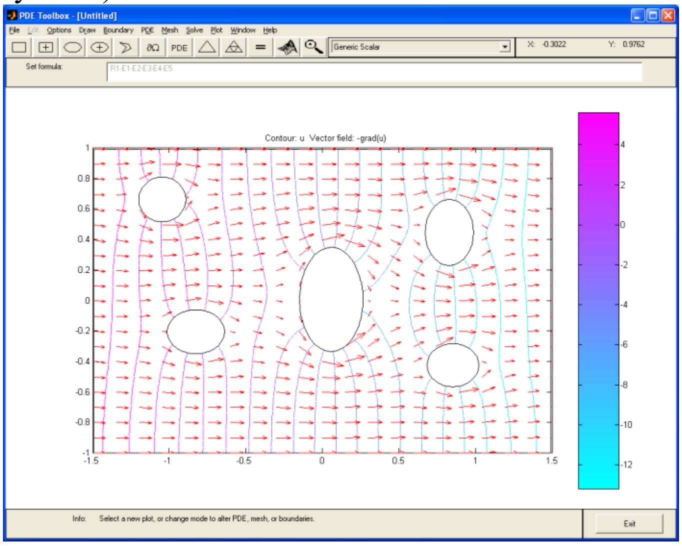

Рисунок 2 – Течение идеальной жидкости в канале, внутри которого находится несколько цилиндров

Теперь создадим препятствия в виде обратного уступа. Течение примет вид (рисунок 3).

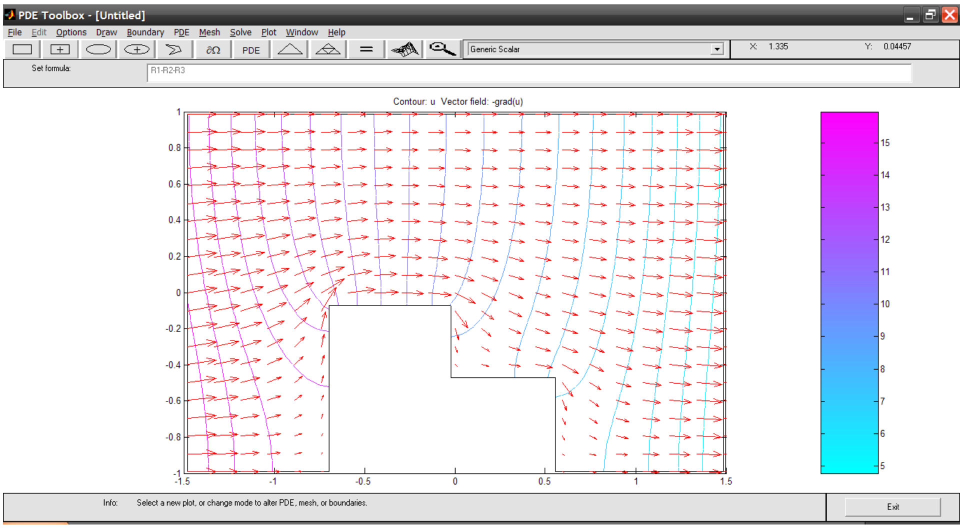

Рисунок 3 – Течение идеальной жидкости с препятствием в виде обратного уступа

Выполненные расчеты показывают, что программный инструмент pdetool системы Matlab является удобным средством для численного решения и графического отображения задач стационарной гидродинамики.

Литература

1. Коткин, Г. Л. Компьютерное моделирование физических процессов с использованием MATLAB / Г. Л. Коткин, В. С. Черкасский. − Новосибирск: НГУ, 2001 − 170 с.

2. Шмелев, В. Е. Partial Differential Equations Toolbox. Инструментарий решения дифференциальных уравнений в частных производных [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://matlab.exponenta.ru/pde/index.php

3. Малых, М. Д. Практикум по курсу «Основы математического моделирования». / М. Д Малых. – М.: МГУ, 2001 – 10 с.

УДК 333.71

В. А. Кунай, А. Г. Мельченко

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛАТИЛЬНОСТИ ВАЛЮТНОГО КУРСА НА ОСНОВЕ ПАНЕЛЬНЫХ ДАННЫХ

Статья посвящена исследованию зависимости валютного курса от основных финансовых показателей Республики Беларусь (денежная база М1, денежная масса М2, индекс потребительских цен, курс евро, курс российского рубля, выдача кредитов в национальной валюте и внутренний валовой продукт). Построена модель с фиксированными эффектами. Проведен анализ волатильности валютного курса на основе моделей с условной гетероскедастичностью.

Одной из целей валютного регулирования является достижение стабильности валютной системы. Индикатором стабильности валютной системы является уровень колебания валютного курса. Для того чтобы нейтрализовать или спрогнозировать и предотвратить резкие колебания валютного курса, необходимо знать, какие факторы оказывают воздействие на валютный курс. В работе проводился анализ факторов, влияющих на изменчивость курса доллара США по отношению к белорусскому рублю $kurs\_usa_{i,t}$), таких как денежная база М1 ($dbm1_{i,t}$), денежная масса М2 ($dmm2_{i,t}$), индекс потребительских цен (ИПЦ, $ipc_{i,t}$), курс евро ($kurs\_evro_{i,t}$), курс российского рубля ($kurs\_rus_{i,t}$), выдача кредитов в национальной валюте ($vkr_{i,t}$) и внутренний валовой продукт (ВВП, $vvp_{i,t}$), за период 2003–2014 года [1,2].

С целью уменьшения вероятности получения «мнимых» зависимостей исследовались стохастические свойства временных рядов. Для этого проводилось тестирование временных рядов показателей на стационарность. Данный анализ, учитывая панельную структуру данных, осуществлялся посредством тестов на единичный корень как с общим, так и с индивидуальными процессами. Отсутствие единичного корня в таком случае свидетельствует о стационарности переменной и интегрированности порядка $I(0)$. Ввиду того, что временные ряды показателей являются достаточно «длинными», количество лагов определялось автоматически на основе значения информационного критерия Шварца.

В таблице 1 представлены результаты проверки временных рядов на стационарность с помощью соответствующих тестов.

Видно, что проведенные тесты по всем переменным подтвердили их тационарность на 5 % уровне. Был построен график по временному ряду курса доллара.

По рисунку 1 видно, что явной устойчивой тенденции курса доллара США не прослеживается. Наблюдается сильный рост с июля по декабрь в 2011 году.

Для эконометрических моделей с панельными данными эмпирический анализ начинается с выбора между моделями с фиксированным эффектом и со случайными эффектами. В качестве нулевой гипотезы в F-тесте формулируется отсутствие у данной панельной структуры и возможность получения по объединенной выборке с помощью МНК состоятельных и эффективных оценок. Для определения целесообразности выбора между моделями со случайными и фиксированными эффектами используется тест множителей Лагранжа. В случае, когда нулевая гипотеза отвергается – следует строить