Литература

1 Импакт-фактор отечественных журналов как показатель положения дел в российской науке (на примере геологических журналов) цитирования [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.scientific.ru/ monitor/if_domestic_j.html. – Дата доступа: 10.12.2016.

2 Индекс цитирования для оценки результативности научной работы: метод. рекомендации / сост. М. Е. Стаценко, Г. Л. Снигур, О. Ю. Демидова, В. Н. Пароваева. – Волгоград : Изд-во ВолГМУ, 2011. – 30 с.

3 Электронный научный информационно-образовательный журнал цитирования [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://pu.virmk. ru/doc/inc.htm. – Дата доступа: 01.12.2016.

4 Основные библиометрические показатели для оценки эффективности научной работы : метод. рекомендации / сост. П. С. Волегов, М. А. Ташкинов, О. Д. Цветова. – Пермь : Изд-во Перм. нац. исслед. ун-та, 2012. – 24 с.

5 Блинов, И. Н. Java. Методы программирования : уч.-мет. пособие / И. Н. Блинов, В. С. Романчик. – Минск : Издательство «Четыре четверти», 2013. – 896 с.

6 Никсон, Р. Создаем динамические веб-сайты с помощью PHP, MySQL, JavaScript, CSS и HTML 5 / Р. Никсон. – 3-е изд. – СПб. : Питер, 2015. – 688 с.

УДК 517.538.52+517.538.53

Е. П. Кечко

РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ ДИАГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ ЭРМИТА–ПАДЕ

В работе изучается асимптотика многочленов Эрмита–Паде 1-го рода для системы экспонент $\left\{e^{\tilde{\lambda}_p z}\right\}_{p=0}^{k}$, *где* $\left\{\tilde{\lambda}_p\right\}_{p=0}^{k}$ *– комплексные числа, расположенные на мнимой прямой в комплексной области. Доказанные теоремы дополняют и обобщают известные результаты П. Борвейна, Ф. Вилонского, А. П. Старовойтова и А. В. Астафьевой.*

Для заданного натурального числа k рассмотрим набор $\left\{\tilde{\lambda}_p\right\}_{p=0}^{k}$, где $\tilde{\lambda}_p = i\lambda_p$, $p = 0, 1, \ldots, k$, а $\left\{\lambda_p\right\}_{p=0}^{k}$ – произвольные различные действительные числа занумерованные так, что $\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_k$.

Определение. Диагональными многочленами Эрмита–Паде 1-го рода для системы экспонент $\left\{e^{\tilde{\lambda}_p z}\right\}_{p=0}^{k}$ называются многочлены $A_n^p(z)$, $\deg A_n^p \le n-1$, $p = 0, \cdots 1, \ldots, k$, хотя бы один из которых тождественно не равен нулю, удовлетворяющие условию

$$\sum_{p=0}^{k} A_n^p(z) e^{\tilde{\lambda}_p z} = O(z^{kn+n-1}),\ z \to 0. \qquad (1)$$

Существование многочленов $A_0(z), A_1(z), \ldots, A_k(z)$ обосновал Эрмит [1], спустя некоторое время после выхода его работы [2], посвященной доказательству трансцендентности числа e.

Полиномы $\{A_n^p(z)\}_{p=0}^k$, удовлетворяющие равенствам (1), могут быть получены решением линейной системы $kn+n-1$ однородных уравнений с $kn+n$ неизвестными коэффициентами. Пусть $\tilde{C}_p$ – граница круга с центром в точке $\tilde{\lambda}_p$ столь малого радиуса, что все остальные $\tilde{\lambda}_j$ лежат во внешности этого круга. Используя теорему Коши о вычетах, легко показать, что функции

$$A_n^p(z) = \frac{e^{-\tilde{\lambda}_p z}}{2\pi i} \int_{\tilde{C}_p} \frac{e^{\xi z} d\xi}{\left[\tilde{\varphi}(\xi)\right]^n}, \ 0 \le p \le k, \tag{2}$$

где $\tilde{\varphi}(\xi) = (\xi - \tilde{\lambda}_0)(\xi - \tilde{\lambda}_1)\cdots(\xi - \tilde{\lambda}_k)$ удовлетворяют (1) и всем другим условиям.

Равенство (2) не являются новыми и, по всей видимости, было известно ещё Эрмиту (см. [1], [2]).

Цель данной работы – продолжить изучение асимптотики диагональных многочленов Эрмита–Паде для системы экспонент $\left\{e^{\tilde{\lambda}_p z}\right\}_{p=0}^k$, когда числа $\left\{\tilde{\lambda}_p\right\}_{p=0}^k$ лежат на произвольной прямой комплексной плоскости. Тема исследования не является новой, так в работе [3] Борвейн нашел асимптотику квадратичных диагональных многочленов Эрмита–Паде для системы экспонент $\left\{1, e^z, e^{2z}\right\}$. Ф. Вилонский [4] получил аналогичный результат для системы экспонент $\left\{e^{pz}\right\}_{p=0}^k$ при произвольном k. В работе [5] найдена асимптотика диагональных многочленов Эрмита–Паде в случае системы экспонент $\left\{e^{\lambda_p z}\right\}_{p=0}^k$ с произвольными различными отличными от нуля числами $\left\{\lambda_p\right\}_{p=0}^k$, лежащими на действительной прямой.

Перейдем к изучению асимптотики полиномов $\{A_n^p(z)\}_{p=0}^k$, удовлетворяющих равенству (2). Если сделать замену $\xi = i\tau$ в равенстве (2), то получим

$$A_n^p(z) = \frac{e^{-i\lambda_p z}}{2\pi i^{(k+1)n}} \int_{C_p} \frac{e^{i\tau z} d\tau}{\left[\varphi(\tau)\right]^n}, \quad 0 \le p \le k,$$

где $\varphi(\tau) = (\tau - \lambda_0)(\tau - \lambda_1)\cdots(\tau - \lambda_k)$.

Далее будем использовать обозначения, принятые в [6]. Сформулируем следствие из теоремы 1 работы [6].

Следствие 1. *При* $n \to \infty$

$$A_n^0(0) = \frac{1}{i^{(k+1)n-1}} B_n(x_1)\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

$$A_n^p(0) = \frac{1}{i^{(k+1)n-1}} B_n(x_{p+1})\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \frac{1}{i^{(k+1)n-1}} B_n(x_p)\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \quad p = \overline{1, k-1},$$

$$A_n^k(0) = -\frac{1}{i^{(k+1)n-1}} B_n(x_k)\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

где $B_n(x_j) = \sqrt{\dfrac{1}{2\pi n S''(x_j)}} e^{nS(x_j)}, \quad j = 1, 2, \ldots, k$.

Из следствия 1 можно заметить, что при достаточно больших n $A_n^0(0) \neq 0$ и $A_n^k(0) \neq 0$. Тогда при таких n определим следующие последовательности нормированных многочленов

$$\tilde{A}_n^0(z) = \frac{A_n^0(z)}{A_n^0(0)}, \quad \tilde{A}_n^k(z) = \frac{A_n^k(z)}{A_n^k(0)}.$$

Для определения аналогичных последовательностей при $p = \overline{1, k-1}$ рассмотрим три возможные случая, каждый из которых реализуется для конкретных систем экспонент.

A) $\left|\varphi(x_p)\right| \neq \left|\varphi(x_{p+1})\right|$. Обозначим через $\tilde{x}_p$ ту из точек x_p, x_{p+1}, для которой

$$\min\left\{\left|\varphi(x_p)\right|, \left|\varphi(x_{p+1})\right|\right\} = \left|\varphi(\tilde{x}_p)\right|.$$

В этом случае при достаточно больших n имеем $A_n^p(0) \neq 0$ и поэтому определена последовательность $\tilde{A}_n^p(z) = A_n^p(z) / A_n^p(0)$.

B) $\varphi(x_{p+1}) = -\varphi(x_p)$, $S''(x_{p+1}) \neq S''(x_p)$. При больших n имеем $A_n^p(0) \neq 0$ и поэтому определена последовательность $\tilde{A}_n^p(z) = A_n^p(z) / A_n^p(0)$.

C) $\varphi(x_{p+1}) = -\varphi(x_p)$, $S''(x_{p+1}) = S''(x_p)$.

Поскольку $(-1)^{k+p+1} / \varphi(x_p) > 0$, то

$$e^{nS(x_p)} = (-1)^{n(k+p+1)} e^{-n\ln|\varphi(x_p)|},$$

$$e^{nS(x_{p+1})} = (-1)^{n(k+p+1)+n} e^{-n\ln|\varphi(x_p)|}.$$

Поэтому

$$A_n^p(0) = \frac{(-1)^{n(k+p+1)}}{i^{(k+1)n-1}} \sqrt{\frac{1}{2\pi n S''(x_p)}} e^{-n\ln|\varphi(x_p)|}((-1)^n - 1)\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

При достаточно больших n имеем $A_{2n+1}^p(0) \neq 0$ и, следовательно, определена последовательность $\tilde{A}_{2n+1}^p(z) = A_{2n+1}^p(z) / A_{2n+1}^p(0)$.

Производную многочлена $A_n^p(z)$ можно представить в виде

$$\frac{dA_n^p}{dz}(z) = \frac{e^{-i\lambda_p z}}{2\pi i^{(k+1)n-2}} \int_{C_p} (\tau - \lambda_p) \frac{e^{i\tau z} d\tau}{[\varphi(\tau)]^n}. \tag{3}$$

Аналогично, как и при нахождении асимптотики A_n^p применив к интегралу в правой части (3) метод перевала (см. [7 с. 415]) при $z = 0$, получим

$$\frac{dA_n^p}{dz}(0) = \frac{1}{i^{(k+1)n-2}} B_n(x_{p+1})(x_{p+1} - \lambda_p)\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) -$$

$$-\frac{1}{i^{(k+1)n-2}} B_n(x_p)(x_p - \lambda_p)\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Тогда при тех же предположениях, что и выше получим

$$\frac{dA_{2n}^p}{dz}(0) = \frac{(-1)^{n(k+p+1)}}{i^{(k+1)n-2}}\sqrt{\frac{1}{2\pi n S''(x_p)}} e^{-n\ln|\varphi(x_p)|}(x_{p+1} - x_p)\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Таким образом, определена последовательность многочленов

$$\tilde{A}_{2n}^p(z) = A_{2n}^p(z) \big/ (A_{2n}^p)'(0).$$

Теорема. *При* $n \to \infty$ *локально равномерно по* z

$$\tilde{A}_n^0(z) \rightrightarrows e^{ix_1 z}, \ \tilde{A}_n^k(z) \rightrightarrows e^{i(x_k - \lambda_k)z}. \tag{4}$$

Если $1 \le p \le k-1$, *то локально равномерно по* z *при* $n \to \infty$:

– в случае A) имеем

$$\tilde{A}_n^p(z) \rightrightarrows e^{i(\tilde{x}_p - \lambda_p)z}; \tag{5}$$

– в случае B) имеем

$$\tilde{A}_{2n}^p(z) \rightrightarrows \left(\frac{e^{i(x_{p+1} - \lambda_p)z}}{\sqrt{S''(x_{p+1})}} - \frac{e^{i(x_p - \lambda_p)z}}{\sqrt{S''(x_p)}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{S''(x_{p+1})}} - \frac{1}{\sqrt{S''(x_p)}}\right)^{-1}, \tag{6}$$

$$\tilde{A}_{2n+1}^p(z) \rightrightarrows \left(\frac{e^{i(x_{p+1} - \lambda_p)z}}{\sqrt{S''(x_{p+1})}} - \frac{e^{i(x_p - \lambda_p)z}}{\sqrt{S''(x_p)}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{S''(x_{p+1})}} + \frac{1}{\sqrt{S''(x_p)}}\right)^{-1}; \tag{7}$$

– в случае C) имеем

$$\tilde{A}_{2n}^p(z) \rightrightarrows \frac{1}{i(x_{p+1} - x_p)}\left(e^{i(x_{p+1} - \lambda_p)z} - e^{i(x_p - \lambda_p)z}\right), \tag{8}$$

$$\tilde{A}_{2n+1}^p(z) \rightrightarrows \frac{1}{2}\left(e^{i(x_{p+1} - \lambda_p)z} + e^{i(x_p - \lambda_p)z}\right). \tag{9}$$

Доказательство. Поточечная сходимость в (4)–(9) следует из доказательства теоремы 1 [6]. Необходимо доказать, что многочлены $\tilde{A}_n^p$ при $0 \le p \le k$ в каждом из случаев A), B) и C) равномерно сходятся на компактах в C к соответствующим функциям. Докажем, это, например, для $\tilde{A}_n^0$.

Если предположить, что $|z| \le \rho$ и $\tau \in R$, то модуль $e^{i\tau z}$ ограничен $M = e^{4\rho \max\{a', \lambda_k\}}$. Исходя из интегрального представления

$$A_n^0(z) = \frac{1}{2\pi i^{(k+1)n}} \int\limits_{C_0} \frac{e^{i\tau z} d\tau}{[\varphi(\tau)]^n}, \tag{10}$$

в этом случае получаем

$$\left|A_n^0(z)\right| \le \frac{M}{\pi} \int\limits_{\alpha}^{\beta} e^{-n \ln|\varphi(\varsigma(t))|} \left|\varsigma'(t)\right| dt. \tag{11}$$

при условии, что контур интегрирования R, определенный в доказательстве теоремы 1 [6], прежний и параметризуется вещественным параметром $t \in [\alpha, \beta]$. При больших n неравенство (11) сохраняется, если вместо R взять отрезок $[D, C]$. Пусть его параметризации соответствует значение параметра $t \in [\alpha_1, \beta_1]$. Для нахождения асимптотики интеграла в (11) применим метод Лапласа (см. [7 с. 398]).

В результате получим, что при $n \to \infty$.

$$\int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} e^{-n \operatorname{Re} S(\varsigma(t))} \left|\varsigma'(t)\right| dt = \sqrt{\frac{-2\pi}{n[\operatorname{Re} S(\varsigma(t))]''_{t=t_0}}} e^{n \operatorname{Re} S(x_1)} \,|\, \varsigma'(t_0) \,|\, \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \tag{12}$$

где t_0 выбрано так, что $\varsigma(t_0) = x_1$. Нетрудно показать, что

$$[\operatorname{Re} S(\varsigma(t))]''_{t=t_0} = -S'(x_1)\left|\varsigma'(t_0)\right|^2.$$

Отсюда, учитывая (10), (12), при достаточно больших n получаем неравенство $\left|\tilde{A}_n^0(z)\right| \le 2M$, из которого следует, что последовательность $\left\{\tilde{A}_n^0(z)\right\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно ограничена по модулю в круге $\{z : |z| \le \rho\}$. Тогда по теореме Витали эта последовательность равномерно сходится к функции $e^{ix_1 z}$ на любом компакте из круга $\{z : |z| \le \rho\}$. Аналогичные рассуждения применимы и к другим последовательностям из теоремы 1. Теорема доказана.

Полученные в работе результаты обобщают и согласуются с соответствующими утверждениями из работ [3–5].

Литература

1 Hermite, C. Sur la généralisation des fractions continues algébriques / C. Hermite // Ann. Math. Pura. Appl. Ser. 2A – 1883. – V. 21. – P. 289–308.

2 Hermite, C. Sur la fonction exponentielle / C. Hermite // C.R. Akad. Sci. (Paris). – 1873. – V. 77. – P. 18–293.

3 Borwein, P. B. Quadratic Hermite-Padé approximation to the exponential function / P. B. Borwein // Const. Approx. – 1986. – V. 62. – P. 291–302.

4 Wielonsky, F. Asymptotics of Diagonal Hermite – Padé Approximants to e^z / F. Wielonsky // J. Approx. Theory. – 1997. – V. 90, № 2. – P. 283–298.

5 Астафьева, А. В. Аппроксимации Эрмита – Паде экспоненциальных функций / А. В. Астафьева, А. П. Старовойтов // Матем. сб. – 2016. – Т. 207, № 6. – С. 3–26.

6 Кечко, Е. П. Асимптотика аппроксимаций Эрмита – Паде экспоненциальных функций / Е. П. Кечко // Творчество молодых`2016: сборник научных работ студентов,

магистрантов и аспирантов : в 4 ч. / редкол.: О. М. Демиденко (гл. ред.). [и др.] – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2016. – Ч. 1. – С. 220–224.

7 Сидоров, Ю. В. Лекции по теории функций комплексного переменного / Ю. В. Сидоров, М. В. Федорюк, М. И. Шабунин. – М. : Наука, 1989.

УДК 517.444

И. С. Ковалева

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ОБОБЩЕННОГО ОПЕРАТОРА МАРКОВА–СТИЛТЬЕСА

В статьях [1,2] были установлены формулы обращения и аппаратные свойства преобразования Маркова–Стилтьеса, являющегося специальным случаем абстрактного преобразования Стилтьеса, введенного в монографии [3]. Данная работа посвящена установлению аналогичных результатов для обобщенного преобразования Маркова–Стилтьеса, зависящего от комплексного параметра α.

Определение 1. Пусть $\alpha \in C$. *Обобщенное преобразование Маркова–Стилтьеса измеримой функции* $f:(0,1)\to C$, задается следующим соотношением

$$S_\alpha f(z) := \int_0^1 \frac{f(t)}{1-\alpha tz}dt.$$

Предполагается, что интеграл существует как интеграл Лебега или в смысле главного значения по Коши. Последнее означает, что при $\alpha z \in [1,\infty)$ он понимается следующим образом:

$$V.P.\int_0^1 \frac{f(t)}{1-\alpha tz}dt := \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\left\{t\in[0,1]:\left|t-(\alpha z)^{-1}\right|>\varepsilon\right\}} \frac{f(t)}{1-\alpha tz}dt.$$

Ранее в [1] исследовались аппаратные свойства преобразования Маркова–Стилтьеса S. Установим аналогичные свойства для обобщенного преобразования Маркова–Стилтьеса S_α.

Доопределим функцию f на все R равенством $f\,|\,R\setminus(0,1) := 0$. Будем использовать также обозначения $f^*(z) = S_\alpha f(z) = S_{\alpha,\,t\to z}\{f(t)\}$.

Аппаратные свойства обобщенного преобразования Маркова–Стилтьеса:

1) $$S_{\alpha,\,t\to z}\{f(1-t)\} = \frac{1}{1-\alpha z} f^*\left(\frac{z}{\alpha z-1}\right).$$

Доказательство. Выполняя замену переменной $1-t=x$, имеем

$$S_{\alpha,\,t\to z}\{f(1-t)\} = \int_0^1 \frac{f(1-t)}{1-\alpha tz}dt = \int_0^1 \frac{f(x)}{1-\alpha(1-x)z}dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{f(x)}{(1-\alpha z)\left(1-x\dfrac{\alpha z}{\alpha z-1}\right)}dx == \frac{1}{1-\alpha z} f^*\left(\frac{z}{\alpha z-1}\right).$$