Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины
Физический факультет
Кафедра теоретической физики

Дей Е.А.

Руководства для лабораторных занятий по курсу «Программирование и математическое моделирование» для студентов специальности 1-31 04 01 Физика (по направлениям) (2 курс, 1 семестр) (электронная версия)

Гомель 2016

Содержание

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА ПММ-2-1-01
ПОВТОРЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ DELPHI
И РАЗРАБОТКА ДИАЛОГОВЫХ ПРОГРАММ

Цель работы: повторение правил работы и основных компонентов среды визуального программирования Delphi, совершенствование навыков создания прикладных программ.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1) Элементы окна Delphi
2) Назначение и структура палитры компонентов и инспектора объектов
3) Компоненты Label, Edit, Button – назначение и основные свойства
4) Компоненты Shape
5) Назначение и правила записи операторов Object Pascal: - оператор присваивания, - оператор выбора, - оператор арифметического цикла, - оператор цикла с предусловием, - оператор цикла с постусловием.
6) Последовательность действий при создании программы в Delphi

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ

ЗАДАЧА. В соответствии с условием варианта разработать программу, содержащую компоненты для ввода данных, текстовые пояснения, вычисления и компоненты для вывода результатов, элемент управления (кнопку «Вычислить»).

Расчетные формулы уточнить с помощью справочной литературы (диск D:, папка ‘Физикам - Справочники’).

- ✓ Предусмотреть указание названий физических величин и их единиц измерения при вводе исходных данных и выводе результатов
- ✓ В разработанном приложении указать заголовок окна (формы)
- ✓ На форме внизу указать данные разработчика
- ✓ В комментарии в тексте программы указать данные разработчика
- ✓ Использовать выбор цвета при оформлении формы и компонентов

С помощью программы выполнить вычисления для пяти различных наборов данных, выбранных самостоятельно. Результаты вычислений записать в отчет.

Включить в отчет копию экрана работающей программы.

Варианты:

1) Вычисление 2-й, 3-й, 4-й и 5-й степеней введенного числа.
2) Вычисление функций sin, cos, exp, ln от введенного числа.
3) Вычисление емкости и энергии электрического поля для плоского конденсатора с заданными размерами

4) Вычисление результирующей емкости при последовательном и параллельном соединении трех конденсаторов
5) Вычисление периода и центростремительного ускорения при движении тела по окружности заданного радиуса с постоянной скоростью
6) Вычисление объема и площадей поверхностей цилиндра с заданными размерами.
7) Вычисление объема и площадей поверхностей конуса с заданными размерами.
8) Вычисление объема и площади поверхности шара с заданными размерами.
9) Вычисление объема и площади поверхности куба с заданными размерами.
10) Перевод интервала времени, заданного в сутках, в часы, минуты и секунды
11) Вычисление механической энергии, максимальной высоты и времени подъема тела массы m, брошенного вертикально вверх с начальной скоростью V0.
12) Вычисление периода и частоты колебаний математического маятника
13) Вычисление вещественных корней квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$
14) Вычисление результирующего сопротивления трех проводников, имеющих сопротивления R1, R2, R3, при последовательном и параллельном соединении
15) Вычисление времени падения камня массой m на поверхность земли с высоты H, скорости и механической энергии в момент падения (пренебрегая сопротивлением воздуха).
16) Вычисление температуры и работы идеального газа при изобарическом изменении объема от V1 до V2 при начальной температуре T1 и давлении P.

СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

Отчет создается в редакторе Word.

Отчет должен содержать:

- название и цель работы,
- данные исполнителя,
- запись необходимых формул,
- имя программного файла, реализующего вычисления,
- тексты процедур и функций, составленных самостоятельно
- копию экрана работающей программы
- результаты вычислений по каждой задаче,

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА ПММ-2-1-02
ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ СРЕДСТВАМИ DELPHI

Цель работы: изучение методов построения графиков функций при помощи компонента Chart

1 Компонент Chart и его свойства

В среде программирования Delphi на вкладке Additional имеется компонент Chart, позволяющий организовать построение диаграмм и графиков функций различного типа. Основные свойства компонента:

Title - определяет заголовок диаграммы.

Foot - определяет подпись под диаграммой. По умолчанию отсутствует. Текст подписи определяется подсвойством **Text**.

Frame - определяет рамку вокруг диаграммы.

Legend - легенда диаграммы (список обозначений).

MarginLeft , MarginRight , MarginTop, MarginBottom - значения левого, правого, верхнего и нижнего полей.

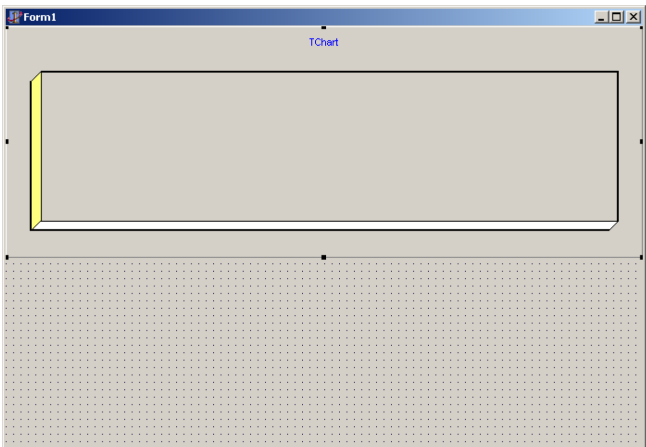
BottomAxis, LeftAxis, RightAxis - характеристики соответственно нижней, левой и правой осей. Задание этих свойств имеет смысл для графиков и некоторых типов диаграмм.

SeriesList - список серий данных, отображаемых в компоненте.

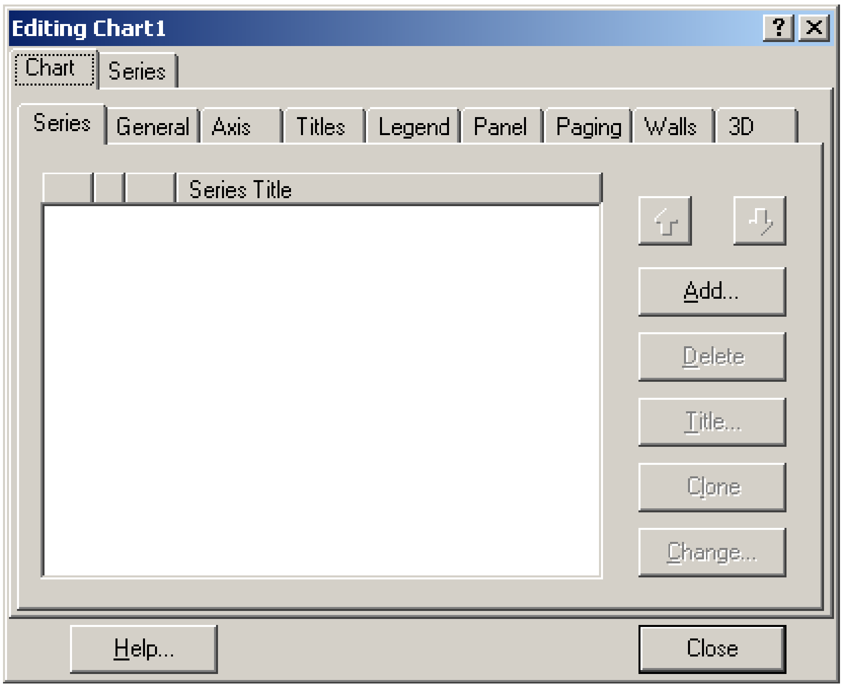
View3d - разрешает или запрещает трехмерное отображение диаграммы.

Упражнение 1. Установка свойств компонента Chart

Создайте новый проект, **<u>сохраните проект в отдельную папку</u>** и разместите компонент Chart на форме. В инспекторе объектов для данного компонента найдите свойство **Align** и выберите в нем значение **alTop**. Таким образом получится следующая картина:



Чтобы получить доступ к основным свойствам компонента Chart, необходимо дважды щелкнуть по нему левой кнопкой мыши. Возникнет диалоговое окно Редактора Диаграмм



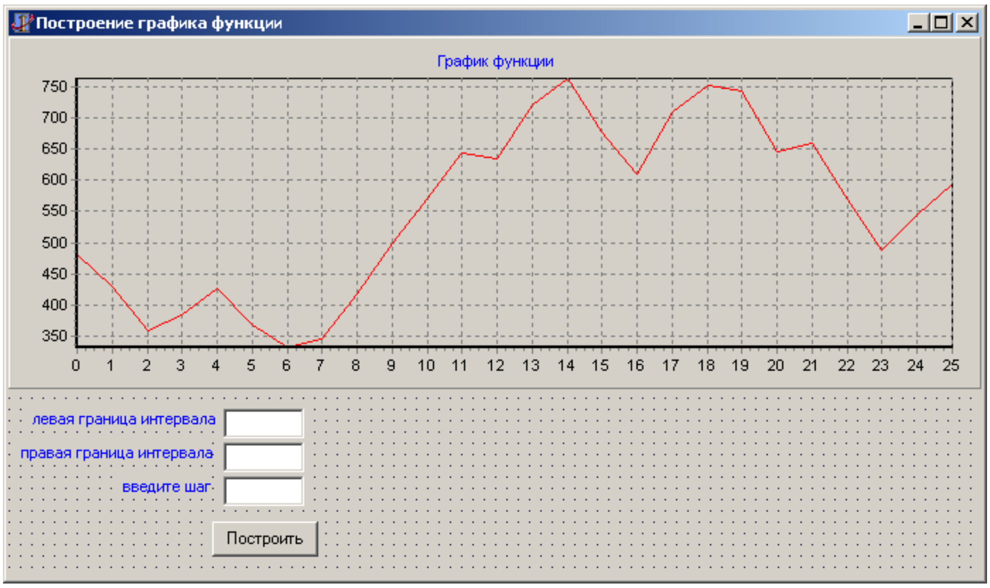
В данном окне можно выбрать вид диаграммы, ее название, цвет, вид подписи аргумента функции и ее значений.

Нажмите кнопку Add…, чтобы внести в список диаграмм (по-другому список серий) свою первую диаграмму. Вид ее вы можете выбрать из предложенной TeeChart галереи. Для примера выберите Line и снимите галочку 3D (внизу). После нажмите ОК.

В списке диаграмм (списке серий) появилась диаграмма с названием Series1. На форме также появилась сгенерированная диаграмма.

На вкладке диалогового окна Titles напишите Построение графика функции (тип, размер, цвет и расположение надписи вы сможете регулировать кнопкой Font и меню Alignment). Нажмите кнопку Close.

Для линейных графиков можно отключить изображение легенды (пояснение линий) справа от графика. Дважды щелкните левой кнопкой мыши по компоненту Chart и выберите вкладку Legend, снимите галочку Visible. Нажмите кнопку Close.



Упражнение 2. Построение графика функции с помощью компонента Chart

Реализуем в приложении построение графика функции

y(x) = sin(x)-cos(2*x)

где **x** изменяется от **1** до **11**, а шаг составляет **0,1**. Для этого разместим еще несколько компонентов на форме, отвечающих за ввод исходных данных для функции:
Edit1 – ввод левой границы интервала a;
Edit2 - ввод правой границы интервала b;
Edit3 – ввод количества шагов N;
компоненты **Label1, Label2, Label3 –** для комментариев к вводу информации;
кнопка **Button1 –** для старта построения графика.

В начале раздела реализации опишем используемые переменные и разместим подпрограмму-функцию для вычисления значений. Это будет выглядеть следующим образом:

```
Implementation   {- строки Delphi}
{$R *.dfm}

var x,y:array[0..100] of real;
   a,b,h:real;
   N,i:integer;

function fun(x:real):real;
begin
 fun:= sin(x)-cos(2*x);
end;
```

Теперь опишем обработчик **OnClick** кнопки **Button1**. В нем реализуем передачу данных в диаграмму компонента **Chart:**

```
procedure TForm1.Button1Click(Sender: TObject);
begin
 a:=StrToFloat(Edit1.Text);
 b:=StrToFloat(Edit2.Text);
 N:=StrToInt(Edit3.Text);
 h:=(b-a)/N;
 For i:=0 to N do begin
  X[i]:=a+i*h;
  Y[i]:=fun(x[i]);
  Chart1.SeriesList.Series[0].AddXY(x[i],y[i],'',clteecolor);
 end;
end;
```

Рассмотрим более подробно функцию построения графика, а именно строчку кода:

Chart1.SeriesList.Series[0].AddXY(z,fun(z),'',clteecolor);

Компонент Chart позволяет размещать не одну диаграмму, а одновременно несколько. Список-лист SeriesList содержит одномерный массив названий диаграмм Series[i], нумерация элементов которого начинается с нуля.

Функция ADDXY(x:real;y:real;цвет диаграммы) позволяет организовать передачу данных для построения диаграммы, где x:real – задает ряд значений аргумента, y:real – задает ряд значений функции, а цвет диаграммы соответственно цвет графика. Таким образом, строчка кода логично выстраивается следующим образом: компонент Chart - список-лист SeriesList – индекс соответствующей диаграммы из массива названий Series[i], для которой строится график - функция AddXY передачи данных для построения графика.

Скомпилируйте (Ctrl+F9) и запустите приложение и проверьте его работоспособность.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ

ЗАДАЧА 1. Создать проект, в котором строится график заданной функции на отрезке [a;b] по заданному количеству точек N.

Построить график в заданных пределах при N=500.

По графику определить характер изменения функции, точки ее максимумов и минимумов, а также нули функции.

Вариант	**Интервал**	**Функция**
1	[0;12]	$y(x)=(x+2)e^{-\sin x}$
2	[0;4]	$y(x)=\left(\frac{x^2}{2}+7\right)e^{-x^2}$
3	[0;5]	$y(x)=e^{\sin x+x}$
4	[1;6]	$y(x)=\frac{1}{x}-\frac{3x^2}{x^3+2}$
5	[0;10]	$y(x)=\cos x+e^{-x}$
6	[0; 9]	$y(x)=x\sin x$
7	[1;6]	$y(x)=x^3-9x^2+26x-24$
8	[1.5;6]	$y(x)=x\cos x-1$
9	[1;6]	$y(x)=-x^2+6x-8$
10	[1;5]	$y(x)=x^3-7x^2+7x+15$
11	[0;4]	$x(t)=\frac{1}{4}e^t-\frac{1}{2}(\cos t+\sin t)$
12	[0;4]	$y(x)=\frac{1}{5}e^x-x-2$

13	[0;3]	$y(x)=\frac{1}{4}e^{2x}-e^{x}+\frac{x}{2}+\frac{1}{4}$
7	[0;3]	$y(x)=2e^{x}-x-1$
15	[0;5]	$y(x)=\exp\left(x-\frac{x^2}{2}\right)$
16	[0;4]	$y(x)=0{,}5e^{x}-2x-2$
17	[0;4]	$y(x)=2e^{-x}+x-1$
18	[0;2]	$y(x)=\frac{4e^{x^2}}{1-2e^{x^2}}$
19	[2;6]	$z(t)=2t-1+5e^{-t}-5e^{2}+15$
20	[1;4]	$y(x)=1+\frac{1}{x}$
21	[0;2]	$y(x)=\frac{1}{2}e^{x^2}+x^3$
22	[1;4]	$y(x)=3x^2+x^4$
23	[0;4]	$y(x)=\frac{1}{5}e^{x}-x-2$
24	[0;3]	$y(x)=\frac{1}{4}e^{2x}-e^{x}+\frac{x}{2}+\frac{1}{4}$
25	[0;4]	$x(t)=\frac{1}{4}e^{t}-\frac{1}{2}(\cos t+\sin t)$

ЗАДАЧА 2. Создать новый проект для построения графика трех функций (своего и двух следующих вариантов) на отрезке [a;b] при заданном N.

Подобрать такие значения a, b, при которых значения всех функций на графике хорошо различимы. Построить график в области [a;b] при N=200.

Результаты включить в отчет.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА ПММ-2-1-03 ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДОВ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ДАННЫХ

Цель работы: изучение и практическое применение методов интерполяции с применением интерполяционных полиномов Ньютона и Лежандра

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ ПО КОНСПЕКТУ ЛЕКЦИЙ

1. Постановка задачи интерполяции
2. Условия интерполяции
3. Линейная интерполяция в форме Ньютона
4. Линейная интерполяция в форме Лагранжа
5. Квадратичная интерполяция в форме Ньютона
6. Квадратичная интерполяция в форме Лагранжа

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ

ЗАДАЧА 1. Составить программу, в которой реализована линейная интерполяция данных в форме Лагранжа и в форме Ньютона.

Для получения таблицы данных используется расчет заданной функции в отдельных точках области [a;b], которая разбивается на N отрезков. При этом расстояние между точками разбиения

$$h = \frac{b-a}{N},$$

координаты точек

$$x_i = a + i \cdot h,$$

зачения функции в этих точках

$$y_i = f(x_i).$$

В программе выполняются действия:

1) На форме располагаем компоненты для ввода и пояснения переменных a,b,N и Кнопку-1 с надписью «Заполнение массивов данных».

2) По нажатию Кнопки 1 выполняется вычисление элементов массивов x_i и y_i. Свои вычисления программируем после строк Delphi

```
implementation
{$R *.dfm}
```

Описание переменных и массивов делаем глобальными (до текста процедур), тогда их можно использовать во всех процедурах

```
Var
 a,b,h:real;
 i,n:integer;
 x,y: array[0..100] of real;
```

В тексте процедуры для кнопки-1 заполняем массивы данных и в конце выводим на экран сообщение «Массивы заполнены».

```
a:= {ввод с экрана}
b:= {ввод с экрана}
N:= {ввод с экрана}
h:=(b-a)/N;
For i:=0 to N do begin
  x[i]:=a+i*h;
  y[i]:=Fun(x[i]);
end;
{вывод сообщения «Массивы заполнены»}
. . .
```

Для вычисления y_i используется отдельная подпрограмма-функция Fun(x) (см. Приложение). Текст функции записываем перед текстом процедуры

```
Function Fun(x:real):real;
Begin
 Fun:=sin(x);
End;
```

3) на форме располагаем компоненты для ввода точки интерполяции и в программе описываем переменную xw. В этой точке, не совпадающей с точками данных, необходимо вычислить значение функции;

4) по нажатию Кнопки 2 – «Линейная интерполяция» выполняется поиск по массиву аргументов таких элементов, между которыми расположен xw

```
i:=1;
While xw> x[i] do i:=i+1;
```

Выполнение цикла автоматически завершится, когда будет получено такое значение i, для которого x[i-1] < xw < x[i].

5) Затем в процедуре для Кнопки-2 с использованием чисел:

x[i-1], x[i], y[i-1], y[i], xw

применяется линейная интерполяция
- по формуле Ньютона
- по формуле Лагранжа

и на экран выводятся точное значение функции Fun(xw) в точке интерполяции, вычисленные двумя методами численные значения функции в точке интерполяции и погрешности численных значений.

6) С помощью программы выполнить расчет значений функции в 3 различных <u>промежуточных</u> точках. Использовать значения N<=20.

Результаты включить в отчет.

ЗАДАЧА 2*. Дополнить программу Кнопкой-3 – «Квадратичная интерполяция» и выполнением в ее процедуре квадратичной интерполяции. Учесть, что квадратичная интерполяция выполняется на двух смежных отрезках, то есть, на участке x[i-2], x[i-1], x[i], содержащем xw.

Выполнить те же действия для квадратичной интерполяции.

Приложение. Варианты выбора функции для построения таблицы данных

Вариант	**Интервал**	**Функция**
1	[0;4]	$x(t)=\frac{1}{4}e^{t}-\frac{1}{2}(\cos t+\sin t)$
2	[0;4]	$y(x)=\frac{1}{5}e^{x}-x-2$
3	[0;3]	$y(x)=\frac{1}{4}e^{2x}-e^{x}+\frac{x}{2}+\frac{1}{4}$
4	[0;3]	$y(x)=2e^{x}-x-1$
5	[0;5]	$y(x)=\exp\left(x-\frac{x^{2}}{2}\right)$
6	[0;4]	$y(x)=0{,}5e^{x}-2x-2$
7	[0;4]	$y(x)=2e^{-x}+x-1$
8	[0;2]	$y(x)=\frac{4e^{x^{2}}}{1-2e^{x^{2}}}$
9	[2;6]	$z(t)=2t-1+5e^{-t}-5e^{2}+15$
10	[1;4]	$y(x)=1+\frac{1}{x}$
11	[0;2]	$y(x)=\frac{1}{2}e^{x^{2}}+x^{3}$
12	[1;4]	$y(x)=3x^{2}+x^{4}$
13	[0;4]	$y(x)=\frac{1}{5}e^{x}-x-2$
14	[0;3]	$y(x)=\frac{1}{4}e^{2x}-e^{x}+\frac{x}{2}+\frac{1}{4}$
15	[0;4]	$x(t)=\frac{1}{4}e^{t}-\frac{1}{2}(\cos t+\sin t)$
16	[0;8]	$y(x)=(x+2)\sin x$

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА ПММ-2-1-04
РЕАЛИЗАЦИЯ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ ИНТЕГРИРОВАНИЯ СРЕДСТВАМИ DELPHI

Цель работы: изучение и программирование численных методов интегрирования, в том числе вычисления определенных интегралов с заданной точностью, приобретение навыков создания Windows-приложений в среде Delphi для решения математических и физических задач.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ПО КОНСПЕКТУ ЛЕКЦИЙ

1. Формула Ньютона-Лейбница для аналитического вычисления определенного интеграла.
2. Геометрический смысл определенного интеграла.
3. Квадратурные формулы
4. Локальная и полная квадратурные формулы центральных прямоугольников
5. Локальная и полная квадратурные формулы трапеций
6. Локальная и полная квадратурные формулы парабол

СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

Отчет должен содержать:
- название и цель работы
- фамилию, номер группы и номер варианта студента

По каждой задаче:
- условие задачи,
- формулы для программирования вычислений,
- необходимые дополнительные соотношения и преобразования,
- текст составленных процедур
- копию экрана работающей программы
- результаты вычислений.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ

ЗАДАЧА 1. Разработать Windows-приложение, в котором методом трапеций выполняется вычисление определенного интеграла $\int_a^b x^k dx$.

Для этого выполнить следующие действия:
1) Набрать название формы «Расчет определенного интеграла»;
2) Указать на форме данные исполнителя (внизу справа)
3) Разместить на форме компоненты для ввода пределов интегрирования a, b, параметра k, количества разбиений N;

4) Дополнить программу подключением математического модуля (в разделе Implementation):

   Uses Math;

5) Дополнить программу подпрограммой-функцией, реализующей вычисление **подинтегральной** функции $f(x) = x^k$;

```
Function f(x,k:real):real;
Begin
 F:=Power(x,k);
End;
```

6) Описать в программе глобальные переменные a, b, N, k
7) Расположить на форме компоненты для ввода значений a, b, N, k
8) Разместить на форме компонент для вывода численного значения интеграла;
9) Разместить на форме кнопку «Вычислить интеграл». При нажатии кнопки выполняется вычисление интеграла и выводится вычисленное значение интеграла (6 цифр после запятой);

   Например, для метода трапеций – в тексте процедуры:

```
Var h,x,sum,Result:real;    i:integer;
begin
 - ввод a,b,N,k
 h:=(b-a)/N;
 sum:=(f(a,k)+f(b,k))/2;
 For i:=1 to N-1 do begin
   x:=a+i*h;
   sum:=sum+f(x,k);
 End;
 Result:=h*sum;
       - вывод Result
   End;
```

10) Для отладки программы и проверки реализации численного метода вычислить определенный интеграл при a=0; b=2; k=7; N=25. Сравнить результат с точным $\int_0^2 x^7 dx = 32$. Повторить вычисления для N=50, 100, 200. Результаты записать в отчет.

ЗАДАЧА 2. Разработать (по аналогии с Задачей 1) Windows-приложение, в котором выполняется вычисление определенного интеграла от функции общего вида с параметрами (см. таблицу вариантов).

Для вычисления интеграла использовать метод центральных прямоугольников (нечетные варианты) или метод парабол (четные варианты).

Дополнительно выполнить:

1) Создать графический файл, содержащий формулу вычисляемого интеграла (формулу своего варианта скопировать в графический редактор Paint и сохранить в файл с расширением *.jpeg);

2) Разместить на форме компонент Image (палитра «Дополнительно») и загрузить в него изображение формулы интеграла (свойство Picture);

3) Разместить на форме компонент Chart и кнопку «Построить график», в процедуре для кнопки записать команды построения графика подинтегральной функции;

Проверить правильность работы программы на тестовом примере (a=1, b=2, p=1, s=0, N=100). Для этого случая аналитически вычислить точное значение интеграла и сравнить с численным результатом.

Вычислить определенный интеграл для заданной функции в пределах a=0.1*V, b=0.2*(V+5), (V – номер варианта), при значениях параметров (p=2, s=3) и (p=3, s=4) при N=25, 50, 100, 200. Результаты записать в отчет в виде таблицы (N, Int1, Int2).

1) $\int_a^b \exp(px - s)dx$	2) $\int_a^b \exp(px + s)dx$	3) $\int_a^b (\sin px - \cos sx)dx$
4) $\int_0^b (\sin px + s\cos x)dx$	5) $\int_a^b (px^2 + \sin sx)dx$	6) $\int_a^b 3^{px+s}\,dx$
7) $\int_a^b (px^3 - sx)dx$	8) $\int_a^b (px^2 + sx)dx$	9) $\int_a^b (px + s\sin x)dx$
10) $\int_a^b (px^{3/2} - sx^{1/2})dx$	11) $\int_a^b (px^3 + sx^2)dx$	12) $\int_a^b (px + \cos sx)dx$
13) $\int_a^b (px^2 + \sin sx)dx$;	14) $\int_a^b \frac{dx}{x^2 + s * p}$	15) $\int_a^b (px^4 - sx^3)dx$
16) $\int_a^b (px^2 - sx - 1)dx$	17) $\int_a^b \cos(px + s)dx$	18) $\int_a^b (px^3 - sx^4)dx$
19) $\int_a^b \sin(px + s)dx$	20) $\int_a^b (px + s)^3\,dx$	21) $\int_a^b (px^3 - sx^2 + 1)dx$
22) $\int_a^b (p\sin x + \sqrt{s}\cos 2x)dx$	23) $\int_a^b \sin(px - s)dx$	24) $\int_a^b \frac{dx}{px + \sqrt{s}}$

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА ПММ-2-1-05
ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ С ТРЕБУЕМОЙ ТОЧНОСТЬЮ

Цель работы: изучение и программирование численных методов, обеспечивающих получение результата интегрирования с заданной точностью

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ ПО КОНСПЕКТУ ЛЕКЦИЙ

1. Достижение требуемой точности результатов численного интегрирования на основе теоретических оценок погрешности
2. Автоматическое достижение требуемой точности численного интегрирования (метод двойного пересчета).

1. Вычисление интегралов с заданной точностью на основании теоретических оценок погрешности.

Используя теоретическую оценку максимальной погрешности интегрирования, можно выяснить, какое число разбиений N следует выбрать, чтобы получить результат с требуемой точностью.

Например, для метода центральных прямоугольников теоретическая оценка максимальной погрешности интегрирования определяется формулой:

$$\left|R_{ЦП,\max}\right| = \frac{h^2(b-a)}{24} M_2 ,$$

где

$$M_2 = \max_{[a;b]}\left|y''(x)\right| .$$

Считая, что эта оценка не должна превышать требуемую точность вычислений, получаем формулы для нахождения максимально возможного шага h (или минимально возможного числа разбиений N)

$$R_{ЦП,\max} \le \varepsilon , \to \quad \frac{(b-a)}{24} h^2 M_2 \le \varepsilon$$

Откуда следует

$$h \le \sqrt{\frac{24\varepsilon}{(b-a)M_2}}$$

Можно выбрать любое значение h, удовлетворяющее этому условию. Однако следует помнить, что h должно определять согласованную сетку, то есть, на заданной области [a;b] должно помещаться целое число шагов.

С учетом взаимосвязи

$$h = \frac{b-a}{N}$$

можно получить формулу для выбора числа шагов N

$$\frac{(b-a)^3}{24N^2}M_2 \le \varepsilon \to N \ge \sqrt{\frac{(b-a)^3 M_2}{24\varepsilon}},$$

причем значение N следует округлить до ближайшего целого в большую сторону. Аналогичные соотношения можно получить и для метода трапеций:

$$h \le \sqrt{\frac{12\varepsilon}{(b-a)M_2}} \quad \text{или} \quad N \ge \sqrt{\frac{(b-a)^3 M_2}{12\varepsilon}}$$

и метода парабол (Симпсона)

$$h \le \sqrt[4]{\frac{180\varepsilon}{(b-a)M_4}} \quad \text{или} \quad N \ge \sqrt[4]{\frac{(b-a)^5 M_4}{180\varepsilon}}.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int_0^1 x\,sin\,xdx$ с точностью $\varepsilon=10^{-4}$.

Найдем производные подинтегральной функции

$$y(x) = x\sin x; \qquad y'(x) = \sin x + x\cos x; \qquad y''(x) = 2\cos x - x\sin x;$$

$$|y''| < |x\sin x| + 2|\cos x|; \qquad \max_{[0;1]}|y''| = 3$$

$$N_{ЦП} \ge \sqrt{\frac{1^3 \cdot 3}{24 \cdot 10^{-4}}} = \sqrt{\frac{10^4}{8}} = 35{,}355$$

Значит, нужно применить квадратурную формулу при N=36, чтобы получить результат с точностью до одной десятитысячной.

Примечание. Теоретические оценки дают величину максимально возможной погрешности. На практике погрешность численного интегрирования может быть гораздо меньше теоретической оценки.

2. Вычисление интегралов с заданной точностью методом удвоения числа разбиений.

Этот метод позволяет автоматически получить заданную точность результата без использования теоретических оценок погрешности.

Так как оценить старшие производные удается далеко не всегда, то на практике для вычисления интегралов используется метод автоматического достижения нужного числа разбиений.

Он основан на выполнении теоретического свойства сходимости квадратурных формул

$$\lim_{N\to\infty}\left|\int_a^b y(x)dx - \sum_i A_i y_i\right| = 0.$$

Процесс вычисления заключается в следующем: задают некоторое начальное значение N и считают интеграл по квадратурной формуле. Обозначим эту сумму V.

```
N=2
V=integral(a,b,N)
```

Затем вдвое увеличивают N и снова вычисляют интеграл тем же методом, получая новый результат W

```
N=N*2
W=integral(a,b,N)
```

Далее сравнивают между собой V и W. Если разница между ними велика, то, на следующем шаге значение W принимают в качестве исходного, то есть, V, и снова увеличивают вдвое число шагов разбиения N (переобозначение). Процесс этот продолжается до тех пор, пока две последовательно вычисленные квадратурные суммы не будут совпадать в пределах заданной точности. С помощью такого процесса двойного пересчета происходит автоматический выбор числа шагов N. Можно выделить следующие элементы такого расчета:

Подпрограмма-функция y(x)

Подпрограмма-функция Integral(a,b,N)

```
Процедура-обработчик нажатия кнопки:
Ввод a,b,N,ε
V=Integral(a,b,N)
Повторять
  | N=2*N
  | W=Integral(a,b,N)
  | delta=|W-V|
  | V=W
До получения результата delta < ε
Вывод результата W
```

Подинтегральная функция реализуется в виде подпрограммы-фукнции. Метод численного интегрирования также реализуется в отдельной подпрограмме–функции. Для метода трапеций функция может иметь вид

```
Function Integral(a,b:real; N:integer):real;
var  h, S :real;  i :integer;
begin
 h:=(b-a)/N;
 S:=(f(a)+f(b))/2;
 For i:=1 to N-1 do begin
   x:=a+i*h;
   S:=S+f(x);
 end;
 Integral:=S*h;
end;
```

Алгоритм двойного пересчета реализуется в процедуре – обработчике нажатия кнопки.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ

ЗАДАЧА 1. Создать проект, в котором реализован метод достижения точности интегрирования ε на основе теоретических оценок погрешности

Организовать вывод на экран численного результата, использованного количества разбиений N и соответствующего ему значения h.

Вычислить интеграл (см. предыдущую л.р.) с точностью ε = 10-3, 10-4, 10-5, 10-6.

Численное значение интеграла, значения N и h включить в отчет.

ЗАДАЧА 2. Дополнить проект компонентами и элементами программы, реализующими метод автоматического достижения точности интегрирования ε.

Организовать вывод на экран численного результата и использованного количества разбиений N N и соответствующего значения h.

Вычислить интеграл (см. предыдущую л.р.) с точностью ε = 10-3, 10-4, 10-5, 10-6.

Численное значение интеграла, значения N и h включить в отчет.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА ПММ-2-1-06
ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДУ-1 МЕТОДАМИ ЭЙЛЕРА

Цель работы: Изучение простейших численных методов решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ ПО КОНСПЕКТУ ЛЕКЦИЙ

1) Постановка задачи Коши для ДУ-1
2) Метод Эйлера решения ДУ-1
3) Метод Эйлера-Коши
4) Улучшенный метод Эйлера
5) Методы Рунге-Кутта

1. Программная реализация метода Эйлера

Расчет по методу Эйлера заключается в выполнении цикла по всем точкам сетки и заполнении массивов {xi}, {yi}. В тестовых задачах, когда известно точное решение, для каждой точки xi вычисляется также точный результат yi,точн и абсолютная погрешность deltai. Фрагмент процедуры – обработчика кнопки, реализующей численный метод:

```
h:=(b-a)/N;
x[0]:=a;   y[0]:=y0;  delta[0]:=0;
dmax:=0;
 For 1:=1 to N do begin
  x[i]:=x[i-1]+h;
  y[i]:=y[i-1]+h*F(x[i-1],y[i-1]);
  ytochn[i]:=Ftochn(x[i]);
  {-добавление элементов x[i], y[i] в Series[0]компонента Chart }
  {-добавление элементов x[i], ytochn[i] в Series[1]компонента Chart }
  delta[i]:= Abs(y[i] - ytochn[i]);
  If delta[i]>dmax then dmax:=delta[i];
 end;
 {вывод графика, dmax}
```

В соответствии с требованиями языка Object Pascal, структура используемых массивов должна быть описана в описании Type, а их имена - в описании Var.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ

ЗАДАЧА 1. Для заданного варианта (см. Приложение) дифференциального уравнения 1-го порядка решить задачу Коши численно методом Эйлера.

Предварительно проверить точное решение подстановкой.

Для выполнения численного решения составить программу, которая содержит:

- ввод параметров задачи: границ интервала [a,b] изменения аргумента x, начального условия y0 и количества шагов N;
- изображение формулы дифференциального уравнения;
- выполнение вычислений по нажатию кнопки «Вычислить» в отдельных точках на интервале [a,b] точного и численного значений решения и абсолютной погрешности численного решения, а также максимальной абсолютной погрешности (см. п.1);
- построение графика численного и точного решений на форме/

ЗАДАЧА 2. С помощью программы исследовать свойства метода Эйлера при решении конкретной задачи:

- определить максимальную погрешность на [a,b] для значений h=0.01, 0.02, 0.05, 0.1, 0.2, 0.5.
- установить, при каком значении h максимальная погрешность не превышает 2%;
- используя результаты расчетов с шагом 0.1 и шагом 0.05, сделать вывод о порядке сходимости численного метода;

Результаты записать в отчет.

ЗАДАЧА 3. Дополнить программу, выполняющую решение Задачи 1 процедурой решения того же ОДУ методом Эйлера-Коши (нечетные варианты) или улучшенным методом Эйлера (четные варианты).

Выполнить пункты исследования Задачи 1 для второго численного метода. Результаты исследования изложить в отчете. Сделать вывод.

Варианты задачи Коши для ОДУ-1

№	**Дифференциальное уравнение 1-го порядка**	**Начальное условие и область решения**	**Точное решение**
1	$\frac{dy}{dx}+y\cos x=e^{-\sin x}$	$y(0)=2$ [0;12]	$y(x)=(x+2)e^{-\sin x}$
2	$\frac{dy}{dx}+2xy=xe^{-x^2}$	$y(0)=7$ [0;4]	$y(x)=\left(\frac{x^2}{2}+7\right)e^{-x^2}$
3	$\frac{dy}{dx}=y(\cos x+1)$	$y(0)=1$ [0;5]	$y(x)=e^{\sin x+x}$
4	$\frac{dy}{dx}=y^2-\frac{2}{x^2}$	$y(1)=0$ [1;6]	$y(x)=\frac{1}{x}-\frac{3x^2}{x^3+2}$
5	$\frac{dy}{dx}=\cos x-\sin x-y$	$y(0)=2$ [0;10]	$y(x)=\cos x+e^{-x}$
6	$x\frac{dy}{dx}-y=x^2\cos x$	$y(\pi/2)=\pi/2$ [π/2; 5π/2]	$y(x)=x\sin x$
7	$x\frac{dy}{dx}=3y+9x^2-52x+72$	$y(1)=-6$ [1;6]	$y(x)=x^3-9x^2+26x-24$
8	$x\frac{dy}{dx}-y=1-x^2\sin x$	$y(\pi/2)=-1$ [π/2; 5π /2]	$y(x)=x\cos x-1$
9	$\frac{dy}{dx}=\frac{2y-6x+16}{x}$	$y(1)=-3$ [1;6]	$y(x)=-x^2+6x-8$
10	$x\frac{dy}{dx}-3y=7x^2-14x-45$	$y(1)=16$ [1;5]	$y(x)=x^3-7x^2+7x+15$
11	$\frac{dx}{dt}=x+\sin t$	$x(0)=-\frac{1}{4}$ [0;4]	$x(t)=\frac{1}{4}e^t-\frac{1}{2}(\cos t+\sin t)$
12	$\frac{dy}{dx}=x+y+1$	$y(0)=-1{,}8$ [0;4]	$y(x)=\frac{1}{5}e^x-x-2$
13	$\frac{dy}{dx}-2y=e^x-x$	$y(0)=-\frac{1}{2}$ [0;3]	$y(x)=\frac{1}{4}e^{2x}-e^x+\frac{x}{2}+\frac{1}{4}$
7	$\frac{dy}{dx}=x+y$	$y(0)=1$ [0;3]	$y(x)=2e^x-x-1$
15	$\frac{dy}{dx}=y(1-x)$	$y(0)=1$ [0;5]	$y(x)=\exp\left(x-\frac{x^2}{2}\right)$

16	$\frac{dy}{dx} = 2x + y$	$y(0) = -1{,}5$ [0;4]	$y(x) = 0{,}5e^{x} - 2x - 2$
17	$\frac{dy}{dx} = x - y$	$y(0) = 1$ [0;4]	$y(x) = 2e^{-x} + x - 1$
18	$\frac{dy}{dx} = xy^2 + 2xy$	$y(0) = -4$; [0;2]	$y(x) = \frac{4e^{x^2}}{1 - 2e^{x^2}}$
19	$\frac{dz}{dt} = 2t + 1 - z$	$z(-2) = 10$; [-2;6]	$z(t) = 2t - 1 + 5e^{-t} - 5e^{2} + 15$
20	$x\frac{dy}{dx} = 1 - y$	$y(1) = 2$; [1;4]	$y(x) = 1 + \frac{1}{x}$
21	$\frac{dy}{dx} - 2xy = 3x^2 - 2x^4$	$y(0) = \frac{1}{2}$; [0;2]	$y(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} + x^3$
22	$x\frac{dy}{dx} - 2y = 2x^4$	$y(1) = 4$; [1;4]	$y(x) = 3x^2 + x^4$
23	$\frac{dy}{dx} = x + y + 1$	$y(0) = -1{,}8$ [0;4]	$y(x) = \frac{1}{5}e^{x} - x - 2$
24	$\frac{dy}{dx} - 2y = e^{x} - x$	$y(0) = -\frac{1}{2}$ [0;3]	$y(x) = \frac{1}{4}e^{2x} - e^{x} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$
25	$\frac{dx}{dt} = x + \sin t$	$x(0) = -\frac{1}{4}$ [0;4]	$x(t) = \frac{1}{4}e^{t} - \frac{1}{2}(\cos t + \sin t)$

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА ПММ-2-1-07
ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ТЕСТОВОЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДУ-2

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: Отработка навыков построения математической модели физической системы на основе задачи Коши для ОДУ 2-го порядка.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ ПО КОНСПЕКТУ ЛЕКЦИЙ

1. Численное решение задачи Коши для систем ОДУ-1.
2. Численное решение задачи Коши для ОДУ высших порядков.
3. Метод Эйлера для системы двух ОДУ-1
4. Метод Эйлера-Коши для системы двух ОДУ-1
5. Улучшенный метод Эйлера для системы двух ОДУ-1.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ

ЗАДАЧА 1. Преобразовать тестовую задачу Коши для ОДУ-2 к системе двух уравнений 1-го порядка. Составить программу для решения полученной системы с использованием метода улучшенного метода Эйлера (нечетные варианты) или Эйлера-Коши (четные варианты).

Предусмотреть в программе вычисление точного решения (проверить его подстановкой) и максимальной абсолютной погрешности численного решения.

Построить график численных и точных значений искомой функции.

С помощью программы исследовать свойства численного метода при решении конкретной задачи Коши для ОДУ-2:

- найти максимальную абсолютную погрешность на [a,b] для значений h=0.2. 0.1, 0.05. 0.025.

- установить, при каком значении h максимальная абсолютная погрешность не превышает 0.001.

№	**Дифференциальное уравнение**	**Начальные условия**	**[a;b]**	**Точное решение**
1	$Y''+2Y'+2Y=2e^{-x}\cos x$	$Y(0)=1$ $Y'(0)=0$	[0;3]	$e^{-x}(\cos x+\sin x+x\sin x)$
2	$x^2Y''-4xY'+6Y=2$	$Y(1)=1{,}1+1/3$ $Y'(1)=2{,}3$	[1;4]	$x^2+0{,}1x^3+1/3$
3	$Y''-Y=\sin x+\cos 2x$	$Y(0)=1{,}8$ $Y'(0)= -0{,}5$	[0;3]	$e^x+e^{-x}-0{,}5\sin x-0{,}2\cos 2x$
4	$Y''+4Y=\cos 3x$	$Y(0)=0{,}8$ $Y'(0)=2$	[0;6]	$\cos 2x+\sin 2x-0{,}2\cos 3x$
5	$Y''+Y'-6Y=3x^2-x-1$	$Y(0)=-0{,}9$ $Y'(0)=3{,}2$	[0;2,5]	$0{,}1e^{2x}-e^{-3x}-0{,}5x^2$
6	$Y''-Y=e^{2x}(x-1)$	$Y(0)=11/9$ $Y'(0)= -11/9$	[0;3]	$2\operatorname{ch}x+e^{2x}(x/3-7/9)$
7	$Y''+(1/x)Y'-(1/x^2)Y=8x$	$Y(1)=4$ $Y'(1)=4$	[1;6]	$2x+1/x+x^3$
8	$x^2Y''+2{,}5xY'-Y=0$	$Y(1)=2$ $Y'(1)=3{,}5$	[1;4]	$3x^{1/2}-1/x^2$
9	$Y''-3y'+2y=\cos 2x$	$Y(0)=1{,}95$ $Y'(0)=2{,}7$	[0;2]	$e^x+e^{2x}-(3\sin 2x+\cos 2x)/20$
10	$Y''+4Y'+4Y=2x-3$	$Y(0)=-1/4$ $Y'(0)= -1/2$	[0;3]	$(1+x)e^{-2x}+x/2-5/4$
11	$Y''+Y=1/\cos x$	$Y(0)=1$ $Y'(0)=0$	[0;1.2]	$\cos x+x\sin x+\cos x*\ln(\cos x)$
12	$(1+x^2)Y''+(Y')^2+1=0$	$Y(0)=1$ $Y'(0)=1$	[0;2]	$1-x+2\ln(1+x)$
13	$Y''+4Y=\sin x+\sin 2x$	$Y(0)=1$ $Y'(0)= -23/12$	[0;3]	$\cos 2x-\sin 2x+(1/3)\sin x-$ $-(1/4)x\cos 2x$
14	$Y''-0{,}5Y'-0{,}5Y=3e^{x/2}$	$Y(0)= -4$ $Y'(0)= -2{,}5$	[0;4]	$e^x+e^{-x/2}-6e^{x/2}$
15	$4xY''+2Y'+Y=0$	$Y(1)=1{,}38177$ $Y'(1)=-0{,}15058$	[1;11]	$\sin(x^{1/2})+\cos(x^{1/2})$

16	$Y''-3Y'+2Y=2\sin x$	$Y(0)=2,6$ $Y'(0)=3,2$	[0;3]	$e^{x}+e^{2x}+0,2\sin x+0,6\cos x$
17	$Y''-2y'+y=xe^{x}$	$Y(0)=1$ $Y'(0)=2$	[0;4]	$(1+x)e^{x}+x^{3}e^{x}/6$
18	$x^{2}Y''+xY'=0$	$Y(1)=5$ $Y'(1)= -1$	[1;21]	$5-\ln x$
19	$Y''+Y=1+e^{x}$	$Y(0)=5/2$ $Y'(0)=3/2$	[0;5]	$\cos x+\sin x+1+0,5e^{x}$
20	$Y''+Y=x^{2}-x+2$	$Y(0)=1$ $Y'(0)=0$	[0;6]	$\cos x+\sin x+x^{2}-x$
21	$Y''-5Y'+6Y=e^{x}$	$Y(0)=0$ $Y'(0)=$	[0;3]	$e^{-2x}+0,5e^{3x}+0,5e^{x}$
22	$Y''-4Y'+5Y=3x$	$Y(0)=1,48$ $Y'(0)=3,6$	[0;2]	$e^{2x}(\cos x+\sin x)+3x/5+12/25$
23	$x^{2}Y''-2Y=0$	$Y(1)=5/6$ $Y'(1)=2/3$	[1;6]	$x^{2}/2+1/(3x)$
24	$8Y''+2Y'-3Y=x+5$	$Y(0)=1/9$ $Y'(0)= -7/12$	[0;2,5]	$e^{x/2}+e^{-3x/4}-x/3-17/9$
25	$Y''-3y'=e^{5x}$	$Y(0)=2,2$ $Y'(0)=0,8$	[0;2]	$2+0,1(e^{3x}+e^{5x})$
26	$Y''-2y'+y=5xe^{x}$	$Y(0)=1$ $Y'(0)=2$	[0;3]	$e^{x}+xe^{x}+5e^{x}(x^{3}/6)$
27	$Y''-y'-6y=2e^{4x}$	$Y(0)=1,4333$ $Y'(0)= -0,367$	[0;2]	$0,1e^{3x}+e^{-2x}+(1/3)e^{4x}$
28	$Y''+4Y=e^{3x}(13x-7)$	$Y(0)=0$ $Y'(0)= -4$	[0;5]	$\cos 2x+\sin 2x-0,2\cos 3x$
29	$Y''+4Y'+4Y=0$	$Y(0)=1$ $Y'(0)= -1$	[0;3]	$(1+x)e^{-2x}$

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА ПММ-2-1-08
РАЗРАБОТКА WINDOWS-ПРИЛОЖЕНИЙ
ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Цель работы: программная реализация методов численного решения нелинейных уравнений в среде Delphi и их применение для решения физических задач

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ ПО КОНСПЕКТУ ЛЕКЦИЙ

1. Классификация нелинейных уравнений.
2. Способы выделения корней.
3. Метод половинного деления.
4. Метод Ньютона.

5. Метод итераций.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ

ЗАДАЧА 1. В среде Delphi создать Windows-приложение, в рабочем окне которого вводятся пределы и шаг для построения графика функции, составляющей левую часть нелинейного уравнения F(x)=0.

Вариант нелинейного уравнения см. в Приложении.

На форме вывести изображение математической формулы нелинейного уравнения.

По нажатию кнопки-1 строится график функции.

На основании просмотра графика в том же рабочем окне вводятся границы области, содержащей корень уравнения F(x)=0, и требуемая точность вычислений.

По нажатию кнопки-2 корень вычисляется методом половинного деления, выводится окончательный результат (значение корня с заданной точностью) и значение функции в найденной точке.

По нажатию кнопки-3 корень вычисляется методом Ньютона, выводится окончательный результат (значение корня с заданной точностью) и значение функции в найденной точке.

Проверить работу программы на тестовом примере x2-2=0 (Ответ: x=1.414213562).

Полученные численные результаты записать в отчет.

ЗАДАЧА 2*. Составить новое приложение, в котором реализуется построение графика, выделение корней и решение нелинейного уравнения методом итераций.

Проверить работу программы на тестовом примере x2-2=0 (Ответ: x=1.414213562).

С помощью разработанной программы решить заданные нелинейные уравнения. Явный вид уравнений (только условие) в соответствии с вариантом берется из книги :

> Воробьева Г.Н., Данилова А.Н. Практикум по вычислительной математике.
> М., Высшая школа. 1990, стр. 61-62.

Выполнить преобразование уравнений для метода итераций подходящим способом.

ЗАДАЧА 3*. По условию физической задачи сформулировать нелинейное уравнение. Вариант задачи получить у преподавателя (см. Приложение 2)..

При решении уравнения использовать в качестве основы программу, разработанную для Задачи 1 дополнив ее определением нужных функций, вводом параметров и текстовыми пояснениями.

Выполнить расчеты для трех различных значений одного из параметров, выбранных самостоятельно.

Приложение 1. Варианты нелинейного уравнения. Корни в области [0;10]

1 $(x+1)^2 \cdot \sin(x-0.3) + 6.2 = 0$

2 $x^2 \cdot \sin(x) - 0.5 \cdot \cos(x) + 4 \cdot x - 3 = 0$

3 $x \cdot \sin(x) - \exp\left(\frac{x}{4}\right) + 2.7 = 0$

4 $\cos(2 \cdot x + 0.1) - \exp(2 - x) + x \cdot \sin(x + 1.1) + 3 = 0$

5 $0.4 \cdot x^2 - 5.2 \cdot x \cdot \sin(x) - \frac{1}{x+1.5} + 3.3 = 0$

6 $2 \cdot \cos(x-1) + \sin\left(\frac{x}{3} + 2\right) + 0.4 \cdot x - 2.5 = 0$

7 $(\sin(x+0.5))^2 - 0.3 \cdot x + \ln(3 \cdot x + 1) - 2.1 = 0$

8 $5 \cdot \cos\left(\frac{x}{2} + 0.5\right) \cdot \sin(x) - 0.5 \cdot \ln(2 \cdot x + 1) - 1.2 = 0$

9 $12 \cdot \cos\left(\frac{x}{3} + 0.5\right) \cdot \sin(x-1) - 0.5 \cdot \exp(-0.2 \cdot x) = 0$

10 $2 \cdot x^2 + 8 \cdot (x+1) \cdot \cos(x) - \exp\left(\frac{x}{2}\right) - 0.5 = 0$

11 $(x+1) \cdot \sin(x+1) + \exp\left(\frac{x}{5}\right) - 1.2 = 0$

12 $(\cos(x+1))^2 - 0.2 \cdot x + \ln(x+1) - 1.05 = 0$

13 $1.5 \cdot x^2 + 6 \cdot (x+1) \cdot \cos(1.3 \cdot x) - \exp(0.4 \cdot x) - 25 = 0$

14 $4 \cdot \sin\left(\frac{x}{2} + 1\right) \cdot \cos(x) - 0.5 \cdot \ln(x+1) + 1.7 = 0$

15 $\sin(x-0.5) \cdot \ln(x+3) - \cos(2 \cdot \ln(x+1)) + 0.45 = 0$

16 $x^2 - 7 \cdot x \cdot \sin(x) - \exp(3 - x) - 18.5 = 0$

17 $(x+1)^2 \cdot \cos(x-0.8) + 2.7 \cdot x + 7.2 = 0$

18 $8.9 \cdot \cos(x) + 2.5 \cdot \ln(x+3) - 2.3 \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right) - 2.4 = 0$

19 $0.9 \cdot x^2 \cdot \sin(x) - 3.2 \cdot x \cdot \cos(x) - 5.5 = 0$

20 $\sqrt{x} \cdot \sin(1.4 \cdot x + 0.2) + 0.5 \cdot \cos(x-1) + 0.35 = 0$

21 $\left(x^4+5\right)\cdot\exp(-0.9\cdot x)-3=0$

22 $\left(x^2+8\right)\cdot\exp(-0.3\cdot x)-7=0$

23 $(x+3)\cdot\sin(x+0.8)-\cos[2\cdot(x+1)]+0.25=0$

24 $2.38\cdot x^2\cdot\cos(x+1.4)-3.2\cdot x\cdot\sin(x)-8.5=0$

25 $\dfrac{\sin(1.5\cdot x+0.3)}{x+1}+0.4\cdot\exp(-x)=0$

26 $\dfrac{\cos(1.2\cdot x+0.3)}{x+0.5}-0.3\cdot\exp(-x)=0$

27 $\dfrac{5\cdot\cos(1.2\cdot x+1.3)}{\ln(x+1)+0.5}-0.5\cdot\exp(0.2\cdot x)+2.7=0$

28 $0.5\cdot x-\sin(x-1.2)+3\cdot\cos(x-2.1)-1.8=0$

29 $(x+1)^2\cdot\cos(x+1.4)+1.5\cdot x-9.2=0$

30 $2\cdot x\cdot\cos(x-0.8)+3\cdot\sin(1.5\cdot x)+2.9\cdot\exp(-x)+0.78=0$

Приложение 2. Варианты физических задач.

1. Два положительных электрических заряда величины $Q1=4.2\cdot 10^{-7}$ Кл и $Q2=8.3\cdot 10^{-7}$ Кл расположены на оси OY в точках (0,L) и (0,-L), где L=0.25 м. Определить, на каком расстоянии R на оси OX величина модуля напряженности поля, создаваемого двумя зарядами, будет равна E=1000 В/м.

2. Плотность тока насыщения при термоэлектронной эмиссии из горячего катода в электровакуумном приборе меняется по закону:

$$j(T)=bT^2\exp\left(-\frac{A}{kT}\right),$$

где энергия активации A=4,23 эВ; коэффициент $b=5,3\cdot 10^5$ $А/(м^2К^2)$]; $к=1.38\cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана. Найти температуру, при которой плотность тока равна 120 $мА/мм^2$.

3. Затухающие одномерные колебания материальной точки в вязкой среде описываются формулой $X(t)=Ae^{-\alpha t}\cos(\omega t+\varphi)$, где A-начальная амплитуда, φ-начальная фаза колебаний, α-коэффициент затухания. Вычислить, через какое время точка в 3-й раз пройдет положение равновесия, если A=6,15; α =0.25; ω=1.4; φ= -0.3.

4. Баскетболист бросает мяч с начальной скоростью V_0=10,2 м/с. Под каким углом он должен совершить бросок, чтобы попасть в кольцо с расстояния L=8 м по навесной траектории. Высота закрепления кольца H=2.8 м, высота баскетболиста h=1.95 м. Ответ выразить в радианах и в градусах. Указание: описать движение в проекциях на координатные оси x(t), y(t) и, исключив время t, найти уравнение траектории движения y(x).

5. Последовательно соединены резистор из металлической проволоки и полупроводниковый резистор. Температурные зависимости их сопротивлений соответственно определяются формулами $R_1(T)=R_{01}aT$; $R_2(T)=R_{02}\exp(W/(kT))$, где R_{01}=125 Ом; $R_{02}=5.86\cdot 10^{-2}$ Ом; $a=4,18\cdot 10^{-3}$ 1/К; $W=4.8\cdot 10^{-20}$ Дж; $k=1,38\cdot 10^{-23}$ Дж/К. Определить, при какой температуре общее сопротивление будет минимальным. Указание: положение минимума можно определить из равенства

нулю первой производной, причем она в окрестности этой точки должна возрастать (вторая производная >0).

6. В архитектуре и изобразительном искусстве широко используется принцип "золотого сечения", определяющий пропорцию при делении отрезков. При этом сечение отрезка АС на две части выполняется так, чтобы большая его часть АВ относилась к меньшей части ВС так, как весь отрезок АС относится к АВ. Вычислить значение этого отношения. Определить, с какой точностью приближают его дроби 5/3; 8/5; 13/8.

7. При наличии в колебательном контуре активного сопротивления r свободные колебания контура являются затухающими, так что ток в контуре изменяется следующим образом:

$$I(t) = I_0 \exp\left(-\frac{r}{2L}t\right)\sin(\varpi t),$$

где I_0 - начальная амплитуда, L - индуктивность контура, ω - частота собственных колебаний. Найти, через какое время после начала свободных колебаний ток в контуре будет иметь значение 0.45 I_0 при C=200 МкФ, L=0,1 Гн, r=1,2 Ом.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА ПММ-2-1-09
РЕАЛИЗАЦИЯ МАТРИЧНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ СРЕДСТВАМИ DELPHI

Цель работы: изучение компонентов и приемов программирования для ввода, численной обработки и вывода матриц

1 Таблица строк — компонент StringGrid

Компонент StringGrid представляет собой таблицу ячеек (cells), организованную в виде строк и столбцов. В ячейках таблицы можно хранить строки или изображения.

В численных расчетах компонент StringGrid является удобным средством для организации вычислений с использованием матриц. В ячейках таблицы хранятся числа – элементы матрицы.

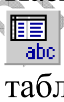
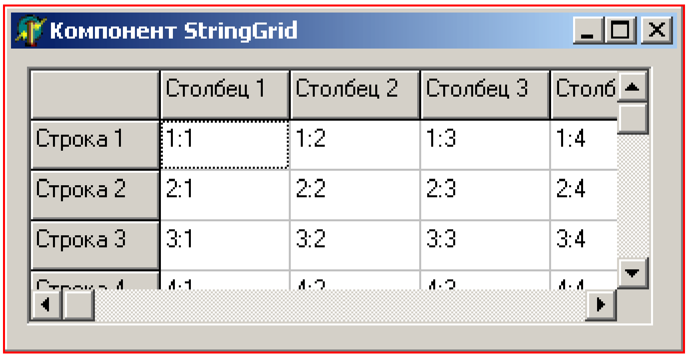
Назначение  таблица строк	Компонент StringGrid	Палитра Additional	Отображение текстовой информации в таблице из строк и столбцов с возможностью перемещаться по строкам и столбцам и осуществлять выбор. Основное свойство — Cells.

Таблица может иметь полосы прокрутки, причем заданное число первых строк и столбцов может быть фиксированным и не прокручиваться. Таким образом, можно задать заголовки столбцов и строк, постоянно присутствующие в окне компонента.



Свойства **ColCount и RowCount** определяют соответственно число столбцов и строк, свойства **FixedCols и FixedRows** — число фиксированных, не прокручиваемых столбцов и строк.

Цвет фона фиксированных ячеек определяется свойством **FixedColor**. Свойства **LeftCol и TopRow** определяют соответственно индексы первого видимого на экране в данный момент прокручиваемого столбца и первой видимой прокручиваемой строки.

Свойство **ScrollBars** определяет наличие в таблице полос прокрутки. Полосы прокрутки появляются и исчезают автоматически в зависимости от того, помещается таблица в соответствующий размер, или нет.

Свойство **Options** является множеством, определяющим разнообразные свойства таблицы. Важным элементом в свойстве Options является goEditing — возможность редактировать содержимое таблицы.

Событие OnSelectCell, возникает в момент выбора пользователем ячейки.

Компонент StringGrid используется для ввода или вывода на экран элементов матриц (двумерных массивов). Свойства **Col** и **Row** содержат номер столбца и номер строки для обрабатываемой ячейки.

Например, вывод в метку Label1 номера выбранной ячейки и текста, набранного в ней можно реализовать с помощью операторов

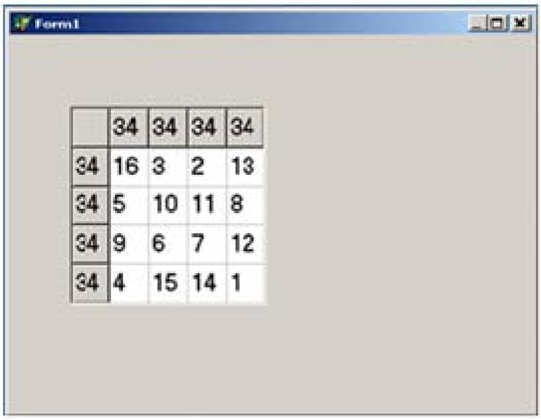
```
Label1.Caption:='Выбрана ячейка ' +IntToStr(ARow)+':'+IntToStr(ACol);
Label2.Caption :=StringGrid1.Cells [ACol, ARow];
```

В данном примере учтено, что в массиве StringGrid1.Cells **на первом месте стоит номер столбца, а на втором – строки**, то есть, порядок индексов обратный по сравнению с матричными обозначениями.

2 Пример программирования обработки матрицы

Рассмотрим пример программы, рассчитывающей суммы по столбцам и строкам вводимых чисел для матрицы 4*4.

Создайте новый проект и повторите действия, изложенные в данном параграфе.



Решение задачи содержит следующие этапы:

1) Добавить на форму сетку – компонент StringGrid. Этот компонент служит для ввода и вывода табличных данных. Присвоить ему программное имя MyGrid (свойство Name).

Необходимо ввести данные и описать событие реагирования на их ввод. В свойстве Options установите пункт goEditing=True, иначе сетка будет доступной только для чтения. Теперь при запуске программы можно вводить текст.

Добавить на форму компоненты Label1, Label2 для отображения информации о ячейках.

Щелкнув мышкой в Инспекторе Объектов в строке события OnSelectCell, набрать текст процедуры – обработчика события, которое возникает, когда пользователь выбирает какую-либо ячейку для редактирования. В тексте программы появится заготовка процедуры

Procedure TForm1.StringGrid1SelectCell(. . .)

В тексте процедуры наберите команды примера из п.1.

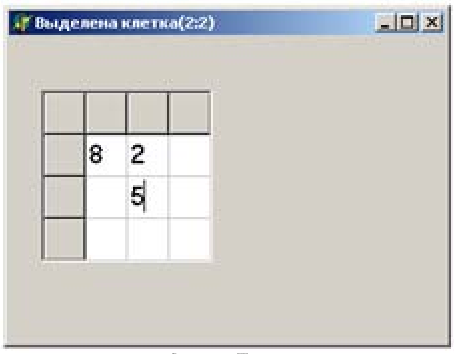
Теперь при запуске программы и выборе ячейки на форме отображается информация о столбце и строке ввода.

3) Установить количество ячеек и размер сетки согласно значению констант Num и cSize, объявленных в interface:

```
const Num = 4;
cSize = 30;
……
```

4) Перейти на область формы, выбрать в в Инспекторе Объектов событие OnCreate и описать обработчик события

```
procedure Tform1.FormCreate(Sender: Tobject);
begin
  MyGrid.DefaultColWidth := cSize;
  MyGrid.DefaultRowHeight := cSize;
  MyGrid.ColCount := Num;
  MyGrid.RowCount := Num;
  MyGrid.Width := Num * (cSize + 1) + 3;
  MyGrid.Height := Num * (cSize + 1) + 3;
  MyGrid.Font.Size := cSize div 2;
end;
```



В приведенном участке кода изменяются ширина и высота сетки, установленные по умолчанию, а также количество строк и столбцов сетки. Добавление единицы к ширине каждой ячейки связано с наличием линий между ячейками, а добавление тройки ко всей сумме – наличием бордюра вокруг сетки. В последней строчке устанавливается соответствующий величине клетки размер шрифта.

4) Для расчета суммы по столбцам и строкам вводимых чисел написать собственную процедуру и две функции.

Функции будут рассчитывать сумму в строке и столбце, получая их номер в качестве параметра. Процедура будет в цикле вызывать эти функции и соответствующим образом заполнять клетки.

Теперь надо создать обработчик для нажатия на саму форму и описать в нем вызов расчета. Собственная процедура стоит в коде раньше, чем обработчик, из которого она вызывается. Когда описывается собственная процедура, нужно обращаться к компонентам через форму.

При запуске программы требуется ввести числа в сетку и кликнуть на саму форму.

```
Function ColSum(n: integer): integer;
var
i: integer;
begin
```

```
  Result := 0;
  for I := 1 to Num – 1 do Result := Result + StrToInt (Form1.MyGrid.Cells[n, i]);
end;

 function RowSum(n: integer): integer;
var
i: integer;
begin
  Result := 0;
  for I := 1 to Num – 1 do Result := Result + StrToInt(Form1.MyGrid.Cells[I, n]);
end;

 procedure Calculate;
var i: integer;
begin
  for I := 1 to Num – 1 do
  begin
    Form1.MyGrid.Cells[I, 0] := IntToStr(ColSum(i));
    Form1.MyGrid.Cells[0, i] := IntToStr(RowSum(i));
  end;
end;
```

В данной программе используется свойство Cells, компонента сетки. Это свойство имеет тип двумерного массива строк. Счет в этом массиве начинается с нуля. Фиксированные (серые) клетки, с точки зрения индексирования массива, ничем не отличаются от прочих. В нашем случае фиксированы первая строка и первый столбец (в массиве они имеют соответствующие нулевые координаты). Поэтому при расчете суммы проходят от 1 (а не от 0) до Num – 1 (при индексировании с нуля последний столбец/строка имеют, понятно, номер Num – 1).

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ

ЗАДАЧА. Разработать программу «Калькулятор матриц», в которой выполняется:
- заполнение на экране элементов двух квадратных матриц размером 3*3;
- умножение элементов обеих матриц на заданное число, набранное на экране (по нажатию кнопки 1);
- поэлементное сложение матриц и вывод результата на экран в отдельном компоненте (по нажатию кнопки 2);
- очистка числовых ячеек матриц (по нажатию кнопки 3).

С помощью программы выполнить расчет 3 различных примеров (данные подобрать самостоятельно). Результаты записать в отчет.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА ПММ-2-1-10
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Цель работы: программная реализация и практическое применение метода Гаусса для решения тестовых и числовых примеров.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ

1. Общая форма записи системы линейных уравнений.
2. Матричная форма записи системы линейных уравнений.
3. Запись системы уравнений с помощью расширенной матрицы.
3. Прямой ход метода Гаусса.
4. Обратный ход метода Гаусса.
5. Метод Гаусса-Жордана.
6. Выбор главного элемента.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ

ЗАДАЧА 1. Составить программу, в которой выполняются следующие действия:

а) описан двумерный массив вещественных чисел для хранения элементов расширенной матрицы системы уравнений (до 10 уравнений);

б) организован ввод с экрана числа уравнений и элементов расширенной матрицы по строкам, с соответствующими пояснениями;

в) при нажатии кнопки «Решить систему» реализован прямой и обратный ход метода Гаусса и вычисление решения системы линейных уравнений;

д) организован вывод результатов решения системы уравнений на экран в формате 3 цифры после запятой;

г) выполняется численная проверка решения с выдачей чисел, стоящих в правой части уравнений.

ЗАДАЧА 2. Для тестирования составленной программы решить все приведенные тестовые примеры и сравнить полученные ответы с известными. В случае отличия в ответах проверить текст программы и выявить ошибки:

а) $2x_1 + 7x_2 = -22;$
$9x_1 - 5x_2 = 47;$
(Ответ: 3 -4)

б) $2x_1 + x_2 - x_3 = 5;$
$x_1 - x_2 + x_3 = 10;$
$-2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3;$
(Ответ: 5 2 7)

в) $x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 9;$
$2x_1 - 6x_2 - x_3 + 2x_4 = -5;$
$3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -2;$
$x_1 + 5x_2 - 3x_3 + x_4 = 6;$
(Ответ: 1 2 3 4)

ЗАДАЧА 3. С помощью составленной и протестированной программы решить систему трех линейных уравнений. Результат вывести с точностью 0,001.

Варианты задачи взять в книге:

Воробьева Г.Н., Данилова А.Н. Практикум по вычислительной математике. − стр. 39-40.

ЗАДАЧА 4. С помощью составленной и протестированной программы решить систему четырех линейных уравнений. Результат вывести с точностью 0,0001.

Варианты задачи взять в книге:

Воробьева Г.Н., Данилова А.Н. Практикум по вычислительной математике. − стр. 43-45.

ЗАДАЧА 5*. Реализовать в процедуре метод Гаусса-Жордана. Проверить работу процедуры на тестовых примерах.

ЗАДАЧА 6*. Реализовать в процедуре выбор главного элемента. Проверить работу процедуры при решении всех задач варианта.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА ПММ-2-1-11
ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ФИЗИЧЕСКОГО ЭКСПЕРИМЕНТА МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Цель работы: Изучение методов аппроксимации результатов эксперимента и их реализации в среде Delphi.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ ПО КОНСПЕКТУ ЛЕКЦИЙ

1. Постановка задачи и общая схема метода наименьших квадратов.
2. Аппроксимация полиномом N-го порядка.
3. Аппроксимация линейной зависимостью.
3. Нелинейная двухпараметрическая аппроксимация данных.

Пример практической аппроксимации данных эксперимента

Зависимость момента инерции материальной точки от расстояния этой точки до оси представлена таблицей:

x:	0.78	1.56	2.34	3.12	3.81
У:	2.5	1.2	1.12	2.25	4.28

Подобрать аппроксимирующий многочлен, найти его коэффициенты.

Решение. По экспериментальным точкам построим график зависимости y(x). Поведение графика приводит к гипотезе об общем виде зависимости

$P2(x)= \alpha 0+\alpha 1x+\alpha 2x2$.

В ходе вычислений по методу наименьших квадратов получаем параметры полинома

$$f(x) = P2(x) = 5.045 - 4.043x + 1.009x2.$$

В таблице сопоставляются значения функции, полученные экспериментально, со значениями, вычисленными приближенно по полученному многочлену.

X[i]	y[i]	P2(x[i])	|y[i]-P2(x[i])|
0.78	2.5	2.500	0
1.56	1.2	1.193	0.007
2.34	1.12	1.109	0.011
3.12	2.25	2.253	0.003
3.81	4.28	4.288	0.008

Для графического сопоставления результатов следует построить на одном графике функцию P2(x) и точечную диаграмму (xi,yi).

Количественной характеристикой полученного приближения служит величина среднего квадратического отклонения $\delta \approx 0.007$.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ

ЗАДАЧА 1. Составить программу, в которой выполняются следующие действиия:

а) ввод таблицы исходных данных с клавиатуры

б) аппроксимация данных линейной зависимостью (расчет параметров линейной зависимости выполнить по конечным формулам) и расчет величины средеквадратичного отклонения $\delta 1$;

в) аппроксимация данных квадратичной зависимостью (расчет параметров квадратичной зависимости выполнить с помощью процедуры решения системы линейных уравнений методом Гаусса) и расчет величины средеквадратичного отклонения $\delta 2$;

г) аппроксимация данных кубической зависимостью (расчет параметров кубической зависимости выполнить с помощью процедуры решения системы линейных уравнений методом Гаусса) и расчет величины средеквадратичного отклонения $\delta 3$;

По величине суммарного среднеквадратичного отклонения выбрать лучший способ аппроксимации. Используя его, вычислить исследуемую величину в точках, составляющих 1/4 и 3/4 области определения аргумента.

По результатам аппроксимации определить требуемые параметры физической системы.

ЗАДАЧА 2. Реализовать в программе расчет параметров нелинейной экспоненциальной аппроксимации и определить ее параметры по экспериментальным данным.

ЗАДАЧА 3*. Модифицировать программу таким образом, чтобы экспериментальные данные вводились из текстового файла.

Список использованных источников

1) Архангельский А.Я. Программирование в Delphi 7. – М.: Бином-Пресс, 2003 г. – 1152 с.
2) Воробьева, Г.Н. Практикум по вычислительной математике / Г.Н. Воробьева, А.Н.Данилова. – М.: Высшая школа, 1990. – 208 с.
3) Калиткин, Н. Н. Численные методы / Н. Н.Калиткин. — М.: Наука, 1978. — 512 с.
4) Турчак, Л. И. Основы численных методов. / Л.И. Турчак, П.В. Плотников. – М.: Физматгиз, 2005. – 301 с.