УДК 539.3 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_4_53_37
EDN: LQYCCM

РЕАЛИЗАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РАСЧЕТА СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ТРУБОПРОВОДА (СОСУДА) ИЗ КОМПОЗИТА

В.В. Можаровский, С.В. Киргинцева

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

IMPLEMENTATION OF A MATHEMATICAL MODEL FOR CALCULATING NATURAL VIBRATIONS OF A PIPELINE (VESSEL) MADE OF COMPOSITE

V.V. Mozharovsky, S.V. Kirhintsava

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Рассматривается компьютерная реализация методики расчета собственных колебаний трубопровода (сосуда) из композита, построенной на основе решения краевой задачи для дифференциального уравнения 4-го порядка, описывающего поперечные колебания протяженного прямолинейного участка трубопровода с различными граничными условиями. Исследованы собственные поперечные колебания трубопровода из композита и функционально-градиентного материала, содержащего равномерно движущуюся жидкость с постоянной скоростью.

Ключевые слова: *собственные колебания*, *трубопровод*, *композит*, *функционально-градиентный материал*, *математическая модель.*

Для цитирования: *Можаровский*, *В.В*. Реализация математической модели расчета собственных колебаний трубопровода (сосуда) из композита / В.В. Можаровский, С.В. Киргинцева // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 4 (53). – С. 37–42. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_4_53_37. – EDN: LQYCCM

Abstract. The paper considers a computer implementation of a method for calculating the natural oscillations of a pipeline (vessel) made of composite, based on the solution of a boundary value problem for a 4th-order differential equation describing transverse oscillations of an extended rectilinear section of the pipeline with different boundary conditions. The intrinsic transverse vibrations of a pipeline made of composite and a functionally gradient material containing a uniformly moving fluid with a constant velocity are investigated.

Keywords: *natural oscillations*, *pipeline*, *composite*, *functionally gradient material*, *mathematical model.*

For citation: *Mozharovsky*, *V.V*. Implementation of a mathematical model for calculating natural vibrations of a pipeline (vessel) made of composite / V.V. Mozharovsky, S.V. Kirhintsava // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2022. – № 4 (53). – P. 37–42. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_4_53_37 (in Russian). – EDN: LQYCCM

Введение

На современном уровне развития математических моделей применительно к расчетам напряженно-деформированного состояния элементов конструкций, таких как трубы, сосуды имеется обширная литература [1]–[4], но в тоже время возникает необходимость создания новых компьютерных программ расчета этих сложных элементов конструкций из композиционных материалов с учетом изменяющихся граничных и краевых условий, динамических нагружений и функционально-градиентных свойств материалов (ФГМ). Несмотря на большие достижения в области расчета слоистых цилиндрических тел с учетом эффектов композитов, проблема решения смешанных задач с различными граничными условиями применительно моделированию работы колебаний, например, трубопроводов, слоистых сосудов из композитов или функционально-градиентных материалов и др. элементов машин достаточно полно не освещена.

1 Постановка задачи и методика решения

Известно, что математическая модель, описывающая поперечные колебания трубопровода (или сосуда как на макроуровне, так и на микроуровне) с равномерно движущейся жидкостью, сводится к решению краевой задачи для дифференциального уравнения 4-го порядка

$$a_4 \frac{\partial^4 w}{\partial \zeta^4} + a_2 \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} + a_1 \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta \partial t} + a_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1.1)$$

с заданными граничными условиями. Входящие коэффициенты $a_i, i = 0,1,2,4$ [2], [3] изменяются в зависимости от свойств материала и конструкции трубы, и их удобно представить в виде таблицы 1.1.

Построим алгоритм решения поставленной задачи в таком универсальном виде, для которого можно удобно проводить реализацию расчета. Решение ищем в виде $w(\zeta,t) = Wu(\zeta / L)e^{i\Omega t}$, где u – комплексная безразмерная амплитуда поперечного перемещения трубы; W – некоторое

© *Можаровский В.В.*, *Киргинцева С.В.*, 2022

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

характерное поперечное перемещение трубы; Ω – частота собственных колебаний трубы; t – переменная по времени.

Таблица 1.1 – Коэффициенты a_i в зависимости от решаемой задачи

Коэффициенты a_i	Однородный материал трубы (или композит)	ФГМ
a_4	EI	$EI_{eg} + GA_{eg}L^2$
a_2	$\rho_2 \upsilon_0^2$	$\alpha m_f u_f^2$
a_1	$2\rho_2 \upsilon_0$	$2m_f u_f$
a_0	$\rho_1 + \rho_2$	$m_f + m_p$

Характеристическое уравнение (1.1) можно записать в безразмерных переменных в следующем виде [2]:

$$a_4 u^{(4)} + a_2 u^{(2)} + i a_1 \Omega u' - a_0 \Omega^2 u = 0, \qquad (1.2)$$

где для однородного материала [2]: $\omega = \Omega L / V_0$ – безразмерная собственная частота; $x = \zeta / L$ – безразмерная координата; $V_0 = L^{-1}\sqrt{E \cdot I / (\rho_1 + \rho_2)}$ – характерная скорость распространения упругих колебаний в трубе; $\alpha = \upsilon_0 / V_0$ – скоростной параметр; $N = m_2 / (m_1 + m_2)$ – инерционный параметр, например, для тонкостенной трубы $N = (1 + 2(\delta R / R)(\rho_1 / \rho_2))^{-1}$; $I \approx \pi R^3 \delta R$ – момент инерции трубы; i – мнимая единица;

для функционально-градиентных материалов (ФГМ) [3]: $\gamma = EI_{eg} / (E_c \cdot I)$;

$$\mu = GA_{eg} L^2 / (E_c \cdot I); \quad U = \sqrt{m_2 / (E_c \cdot I)}\,\alpha L;$$

$$Mr = m_2 / (m_2 + m_1); \quad EI_{eg} = \int_0^{2\pi R_m} \int_{-h/2}^{h/2} E(z) z^2 dz dr;$$

$$GA_{eg} = \int_0^{2\pi R_m} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{2(1+\nu)} dz dr; \quad m_1 = \int_0^{2\pi R_m} \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) dz dr;$$

$$m_2 = \rho_2 A_2; \quad \rho(z) = V_c \rho_c + V_m \rho_m;$$

$$E(z) = V_c E_c + V_m E_m; \quad V_m = \left((2z + h)/(2h)\right)^s;$$

$V_c = 1 - V_m$; L, R, δR, ρ, E и ν – длина, радиус, толщина стенки, плотность, модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала трубы соответственно; ρ_1 (m_1) и ρ_2 (m_2) – погонная плотность (масса) материала трубы и транспортируемой среды соответственно; α – скоростной параметр; A_2 – площадь поперечного сечения потока; s – показатель, описывающий профиль объемной доли $(0 \le s \le \infty)$ для ФГМ; индексы m и c указывают внутренний и внешний слои соответственно.

Возможны различные способы закрепления концов трубы с граничными условиями, которые записаны в таблице 1.2 . Известно [2], что частное решение уравнения (1.2) находится по зависимости $u = Ce^{kx}$ и затем строится характеристическое уравнение для нахождения комплексных значений k. Тогда общее решение уравнения (1.2) будет иметь вид

$$u(x) = \sum_{j=1}^{4} C_j e^{k_j(x)}. \qquad (1.3)$$

Исходя из граничных условий для краевой задачи, получаем систему алгебраических уравнений для нахождений неизвестных коэффициентов C_j, строим алгоритм расчета определителя матрицы для нахождения собственных частот при колебаниях. Находим нетривиальные решения, приравняв определитель соответствующей матрицы к нулю (таблица 1.2).

Легко можно заметить, что выполняется следующее равенство: $G_4 = \prod_{i=1}^{4} k_i^2 \cdot G_2$.

В связи с тем, что при решении данных задач определитель G является комплексным, рассматривается условие, когда выполняется равенство $G \cdot \overline{G} = 0$, где чертой обозначена операция комплексного сопряжения. Для нахождения параметров неизвестных значений комплексного волнового параметра $k = k_j, j = 1,2,3,4$ дифференциального уравнения (1.2) характеристическое уравнение представляется в виде:

$$k^4 + pk^2 + iqk + r = 0, \qquad (1.4)$$

где коэффициенты p, q, r зависят от рассматриваемой задачи, и, применяя формулу Феррари, запишем резольвенту уравнения (1.4) [5]

$$f(\xi) = \xi^3 - p\xi^2 - 4r\xi + 2pr + q^2 = 0 \qquad (1.5)$$

Определив корни кубического уравнения (1.5) [6]

$$\xi_1 = \frac{p_1 c_0 - b_0}{1 - p_1},$$

$$\xi_2 = \frac{-(2b_0 + 2p_1^2 c_0 + p_1 f_1)}{2 + 2p_1 + 2p_1^2} +$$

$$+\left(\left(2b_0 + 2p_1^2 c_0 + p_1 f_1\right)^2 - 4\left(1 + p_1 + p_1^2\right) \times\right.$$

$$\left.\times\left(b_0^2 + p_1^2 c_0^2 + p_1 f_2\right)\right)^{\frac{1}{2}} / \left(2 + 2p_1 + 2p_1^2\right),$$

$$\xi_3 = \frac{-(2b_0 + 2p_1^2 c_0 + p_1 f_1)}{2 + 2p_1 + 2p_1^2} -$$

$$-\left(\left(2b_0 + 2p_1^2 c_0 + p_1 f_1\right) - 4\left(1 + p_1 + p_1^2\right)^2 \times\right.$$

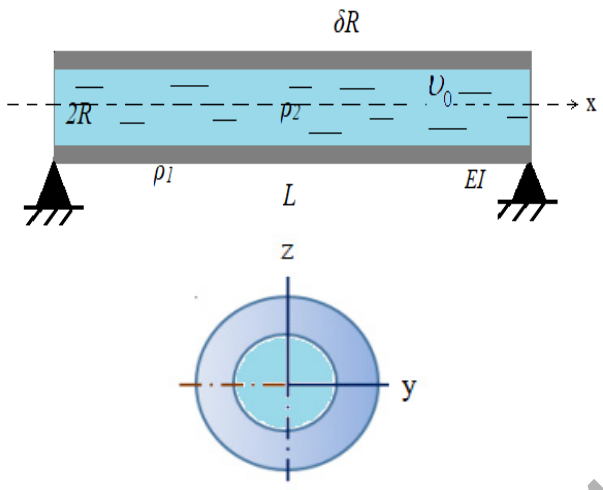
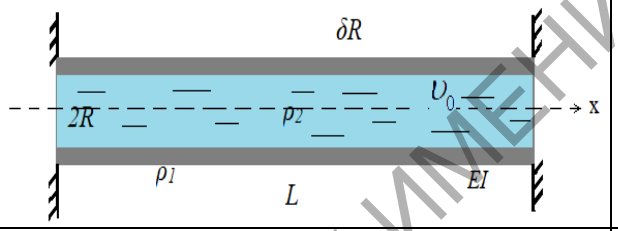
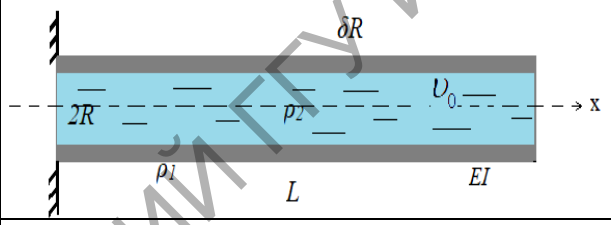
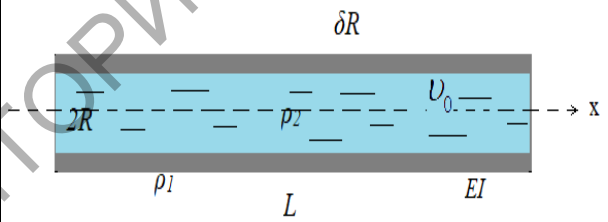
$$\left.\times\left(b_0^2 + p_1^2 c_0^2 + p_1 f_2\right)\right)^{\frac{1}{2}} / \left(2 + 2p_1 + 2p_1^2\right),$$

где $p_1 = \sqrt[3]{\dfrac{-2p - 3f_1 - 3\sqrt{f_1^2 - 4f_2}}{-2p - 3f_1 + 3\sqrt{f_1^2 - 4f_2}}}$;

$$b_0 = \left(f_1 + \sqrt{f_1^2 - 4f_2}\right)/2; \; c_0 = \left(f_1 - \sqrt{f_1^2 - 4f_2}\right)/2,$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Таблица 1.2 – Виды закрепления концов трубы и граничные условия

Условие закрепления концов трубы	Графическое представление	Граничные условия	Определитель G_i
1. Шарнирное опирание		$u(0)=u''(0)=$ $=u(1)=u''(1)=0$	G_1
2. Зажатый-зажатый		$u(0)=u'(0)=$ $=u(1)=u'(1)=0$	G_2
3. Зажатый-свободный (консольный)		$u(0)=u'(0)=$ $=u''(1)=u'''(1)=0$	G_3
4. Свободные концы		$u''(0)=u'''(0)=$ $=u''(1)=u'''(1)=0$	G_4

Здесь

$$G_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ k_1^2 & k_2^2 & k_3^2 & k_4^2 \\ e^{k_1} & e^{k_2} & e^{k_3} & e^{k_4} \\ k_1^2e^{k_1} & k_2^2e^{k_2} & k_3^2e^{k_3} & k_4^2e^{k_4} \end{vmatrix},\quad G_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \\ e^{k_1} & e^{k_2} & e^{k_3} & e^{k_4} \\ k_1e^{k_1} & k_2e^{k_2} & k_3e^{k_3} & k_4e^{k_4} \end{vmatrix},$$

$$G_3=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \\ k_1^2e^{k_1} & k_2^2e^{k_2} & k_3^2e^{k_3} & k_4^2e^{k_4} \\ k_1^3e^{k_1} & k_2^3e^{k_2} & k_3^3e^{k_3} & k_4^3e^{k_4} \end{vmatrix},\quad G_4=\begin{vmatrix} k_1^2 & k_2^2 & k_3^2 & k_4^2 \\ k_1^3 & k_2^3 & k_3^3 & k_4^3 \\ k_1^2e^{k_1} & k_2^2e^{k_2} & k_3^2e^{k_3} & k_4^2e^{k_4} \\ k_1^3e^{k_1} & k_2^3e^{k_2} & k_3^3e^{k_3} & k_4^3e^{k_4} \end{vmatrix}.$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$f_1 = \frac{-4p(2pr+q^2)-9(-2p(2pr+q^2)-16r^2)}{p^2+12(2pr+q^2)};$$

$$f_2 = \frac{16(2pr+q^2)^2-3p(-2p(2pr+q^2)-16r^2)}{p^2+12(2pr+q^2)},$$

и выбрав действительный корень ξ_k [5], находим решение уравнения (1.4)

$$k_1 = (R_1 + D_1)/2; \quad k_2 = (R_1 - D_1)/2;$$

$$k_3 = (-R_1 + E_1)/2; \quad k_4 = (-R_1 - E_1)/2;$$

где

$$R_1 = \sqrt{-p+\xi_k},$$

$$D_1 = \begin{cases} \sqrt{-R_1^2 - 2p - 2iq/R_1}, & R_1 \neq 0; \\ \sqrt{-2p + 2\sqrt{\xi_k^2 - 4r}}, & R_1 = 0; \end{cases}$$

$$E_1 = \begin{cases} \sqrt{-R_1^2 - 2p + 2iq/R_1}, & R_1 \neq 0; \\ \sqrt{-2p - 2\sqrt{\xi_k^2 - 4r}}, & R_1 = 0. \end{cases}$$

Для решения поставленной задачи производим численный расчет до тех пор, пока будет выполнено условие (с необходимой точностью) $G \cdot \overline{G} = 0$, а также уточняем корни уравнений (1.4) и (1.5) по методу Ньютона.

При $N = 1$ уравнение (1.2) допускает факторизацию, и тогда вековое уравнение можно записать в виде [2]:

$$\begin{gathered} \gamma\delta(ch\gamma\cos\delta - \cos\alpha) - \\ -\alpha^2 sh\gamma\sin\delta/4 = 0, \ \omega > \alpha^2/4; \\ \gamma_*\delta(\cos\gamma_*\cos\delta - \cos\alpha) - \\ -\alpha^2\sin\gamma_*\sin\delta/4 = 0, \ 0 \le \omega \le \alpha^2/4; \end{gathered} \tag{1.6}$$

где

$$\gamma = \sqrt{\omega - \alpha^2/4}, \ \delta = \sqrt{\omega + \alpha^2/4}, \ \gamma_* = -i\gamma.$$

2 Примеры расчета

Для тестирования методики использовались численные данные, приведенные в работе [2]: на рисунке 2.1 изображены графики зависимости первой собственной частоты ω от скоростного параметра α (график 1 – по предложенной методике, график 2 – из статьи [2]).

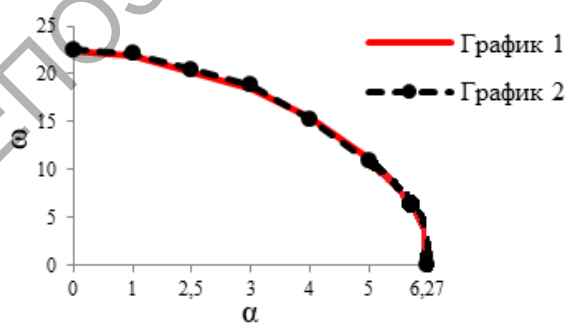


Рисунок 2.1 – Графики зависимостей ω от α

На рисунках 2.2 и 2.3 показаны графики влияния длины (рисунок 2.2, *а*), толщины трубы (рисунок 2.2, *б*) и плотности жидкости внутри трубы при различных %-ных содержаниях волокон в матрице материала трубы (рисунок 2.3, *а*) на первую собственную частоту ω и скоростной параметр α. На рисунке 2.3, *б*, показан график зависимости первой собственной частоты ω от %-го содержания волокон в матрице материала трубы при различных условиях закрепления концов трубы. Приняты следующие характеристики: $L = 1$ м; $\upsilon_0 = 10$ м/с; $R = 0{,}1$ м; $\delta R = 0{,}01$ м; $\rho_2 = 1000$ кг/м^3; $E_a = 200 \cdot 10^9$ Н/м^2; $\nu_a = 0{,}25$; $\rho_a = 5000$ кг/м^3; $E_m = 600 \cdot 10^9$ Н/м^2; $\nu_m = 0{,}23$; $\rho_m = 8000$ кг/м^3. Модуль упругости E, коэффициент Пуассона ν и плотность ρ материала трубы определялись по правилу смесей [1]:

$$E = VE_a + (1-V)E_m,$$

$$\nu = V\nu_a + (1-V)\nu_m,$$

$$\rho_1 = V\rho_a + (1-V)\rho_m,$$

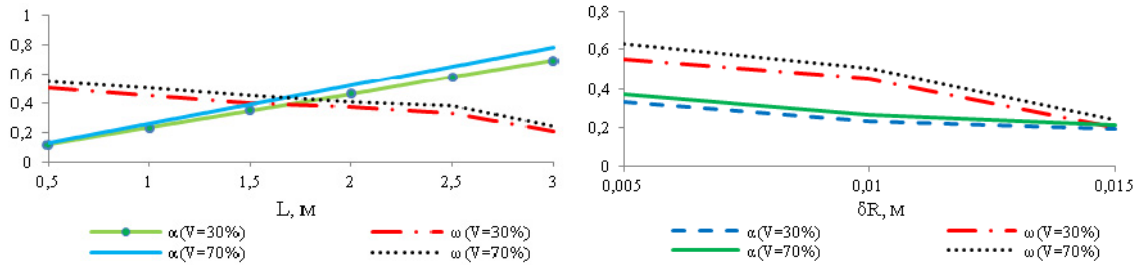
нижние индексы a и m характеризуют волокно и матрицу материала трубы соответственно; V – объемное содержание волокна в матрице композиционного материала.

Следует отметить, что разработанный алгоритм для нахождения собственных частот с различными граничными условиями закрепления можно применить для расчета микротрубок, когда транспортируется жидкость, и функционально-градиентный материал для стенки трубы постоянно изменяется по толщине микротрубки по степенному закону распределения. Так, например, в работе [3] предложен метод решения подобных задач и приводится пример расчета со следующими параметрами для микротрубки с ФГМ: отношение внутреннего диаметра к внешнему диаметру $D_i / D_0 = 0{,}9$, $D_0 = 20$ мкм, длина $L = 17{,}6$ мкм, плотность жидкости $\rho_2 = 1000$ кг/м^3, модули упругости $E_c = 380$ ГПа, $E_m = 70$ ГПа, коэффициенты Пуассона $\nu_c = \nu_m = 0{,}23$, плотности материала трубы $\rho_c = 3800$ кг/м^3, $\rho_m = 2700$ кг/м^3. Проведенные вычисления показали, что как макроуровне, так и на микроуровне [3] критические скорости увеличиваются с увеличением показателя объемной доли s, и собственная частота уменьшается с увеличением параметра масштаба длины.

На рисунках 2.4. *а*, и 2.4, *б*, показаны графики зависимостей ω и α для трубы из функционально-градиентного материала при различных значениях коэффициента степени s и условиях закрепления концов трубы (сосуда). Начальные данные соответствуют [3].

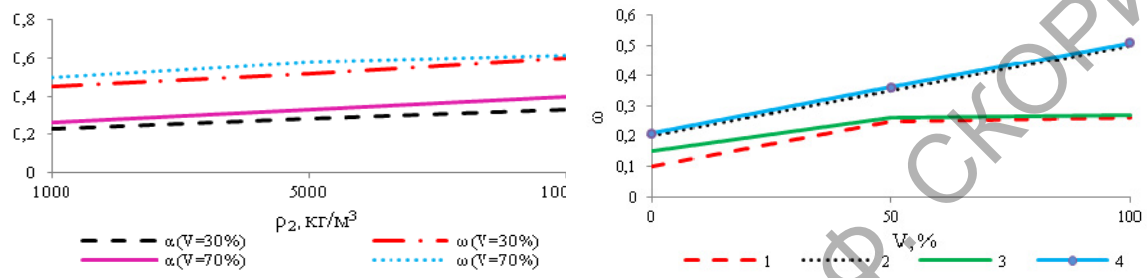
Следует отметить, что способы закрепления концов трубопровода значительно влияют на значения собственных колебаний, что отражено

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ



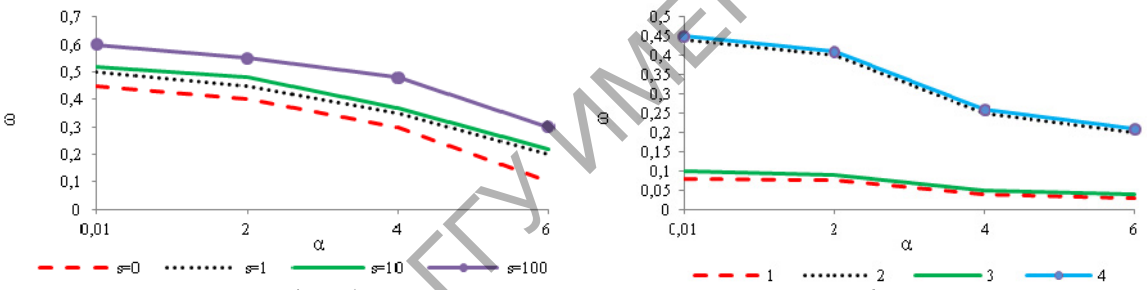
а) *б*)

Рисунок 2.2 – Графики зависимостей ω и α от длины (*а*) и толщины трубы (*б*)



а) *б*)

Рисунок 2.3 – Графики зависимостей ω и α от плотности транспортируемой жидкости (*а*) и условий закрепления концов трубы (*б*)



а) *б*)

Рисунок 2.4 – Графики зависимостей ω от α для трубы из ФГМ при различных коэффициентах степени *s* (*а*), способах закрепления концов трубы (*б*)

на рисунках 2.3, *б*, и 2.4, *б*: значения 1, 2, 3, 4 соответствуют нумерации условий закрепления концов трубы в таблице 1.2. В тоже время можно заметить, что собственные частоты для крепления 2 (жесткое защемление) и 4 (свободные концы) совпадают, как это видно из рисунков 2.3, *б*, и 2.4, *б*, это свойство вытекает из теоремы 2 работы [2] и связи определителей G_2 и G_4. При $\alpha = 0$ собственные колебания ω принимают максимальные значения [2].

Заключение

Разработана методика реализации математической модели расчета собственных колебаний трубопровода (сосуда) из композитов, включая функционально-градиентные материалы. Используя современные достижения по решению подобных задач рассматриваемого типа как на макроуровне, так и на микроуровне [2], [3] построен алгоритм, который обобщает разработанные решения в виде определенного эффективного подхода математической реализации расчета. Особенность представленного алгоритма заключается в применении известной методики решения кубического уравнения и, при необходимости, уточнении корней по методу Ньютона. Как показали проведенные расчеты, собственные частоты исследуемых конструкций труб (сосудов) зависят от условий крепления их концов и физических свойств материалов. Тестирование методики проводилось для первой собственной частоты.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Можаровский*, *В.В.* Прикладная механика слоистых тел из композитов / В.В. Можаровский, В.Е. Старжинский. – Минск: Наука и техника, 1988. – 280 с.

2. *Акуленко*, *Л.Д.* Основные свойства собственных колебаний протяженного участка трубопровода / Л.Д. Акуленко, М.И. Иванов, Л.И. Коровина // Механика твердого тела. – 2013. – № 4. – С. 119–134.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

3. *Talib*, *EH.* Semi-analytic solution for stability and free vibration of functionally graded (FG) material micro-pipe conveying fluid / EH. Elaikh Talib, Nada M. Abed // International journal of energy and environment. – 2018. – Vol. 9, iss. 6. – P. 563–580.

4. *Хакимов*, *А.Г.* Определение скорости движущегося стержня и толщины покрытия по собственным частотам изгибных колебаний / А.Г. Хакимов // Труды института механики имени Р.Р. Мавлютова. – 2016. – Т. 1, № 1. – С. 10–15.

5. *Wein*, *Ron.* High-level filtering for arrangements of conic arcs / Ron Wein // Thesis submitted in partial fulfillment of the requirements for the M.Sc. degree in the School of Computer Science, Tel-Aviv University. – 2002. – 76 p.

6. *Raghavendra*, *Dr.* Unified method for solving general polynomial equations of degree less than five / Dr. Raghavendra, G. Kulkarni // Alabama Journal of Mathematics. – 2006. – P. 1–18.

Поступила в редакцию 08.09.2022.

Информация об авторах

Можаровский Валентин Васильевич – д.т.н., профессор

Киргинцева Светлана Викторовна – ассистент

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ