ФИЗИКА

УДК 539.12.01 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_4_53_43
EDN: LRXSGO

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ЛОГУНОВА – ТАВХЕЛИДЗЕ С НЕКОТОРЫМИ АНАЛОГАМИ ПОТЕНЦИАЛА ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА В ИМПУЛЬСНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

А.В. Павленко, Ю.А. Гришечкин

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

EXACT SOLUTIONS OF THE TWO-DIMENSIONAL LOGUNOV – TAVKHELIDZE EQUATION WITH SOME ANALOGUES OF THE HARMONIC OSCILLATOR POTENTIAL IN THE MOMENTUM REPRESENTATION

A.V. Paulenko, Yu.A. Grishechkin

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Получены точные решения двумерного уравнения Логунова – Тавхелидзе, описывающего связанные состояния систем двух скалярных частиц одинаковой массы для некоторых вариантов релятивистского обобщения потенциала гармонического осциллятора в импульсном представлении.

Ключевые слова: *двумерное уравнение Логунова – Тавхелидзе*, *парциальная волновая функция*, *связанные состояния*, *гармонический осциллятор*, *двумерное импульсное представление*.

Для цитирования: *Павленко*, *А.В*. Точные решения двумерного уравнения Логунова – Тавхелидзе с некоторыми аналогами потенциала гармонического осциллятора в импульсном представлении / А.В. Павленко, Ю.А. Гришечкин // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 4 (53). – С. 43–45. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_4_53_43. – EDN: LRXSGO

Abstract. The exact solutions of the two-dimensional Logunov-Tavkhelidze equation which describes the bound states of systems of two scalar particles of the equivalent mass for some variants of the relativistic generalization of the harmonic oscillator potential are obtained in the momentum representation.

Keywords: *two-dimensional Logunov – Tavkhelidze equation*, *partial wave function*, *bound states*, *harmonic oscillator*, *two-dimensional momentum representation*.

For citation: *Paulenko*, *A.V*. Exact solutions of the two-dimensional Logunov – Tavkhelidze equation with some analogues of the harmonic oscillator potential in the momentum representation / A.V. Paulenko, Yu.A. Grishechkin // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2022. – № 4 (53). – P. 43–45. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_4_53_43 (in Russian). – EDN: LRXSGO

Введение

Рассмотрим уравнение Логунова – Тавхелидзе для системы двух скалярных частиц одинаковой массы m в двумерном импульсном представлении

$$(E^2 - m^2 - \mathbf{p}^2)\,\psi(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int V(\mathbf{p},\mathbf{k})\psi(\mathbf{k})\frac{m}{E_k}\,d^2\mathbf{k},$$

$$E_k = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}, \qquad (0.1)$$

где $\mathbf{p}$ – двумерный относительный импульс в системе центра масс, $2E$ – энергия двухчастичной системы, $\psi(\mathbf{p})$ – волновая функция, $V(\mathbf{p},\mathbf{k})$ – релятивистский потенциал.

В нерелятивистской квантовой механике потенциал гармонического осциллятора в двумерном координатном представлении имеет вид

$$V(\rho) = \omega^2\rho^2, \qquad (0.2)$$

где ω – константа связи, $\rho \geq 0$ – модуль радиус-вектора. Используя преобразование Фурье, запишем потенциал (0.2) в двумерном импульсном представлении

$$V(\mathbf{p},\mathbf{k}) = -(2\pi)^2\,\omega^2\Delta_p^{(2)}\delta^{(2)}(\mathbf{p}-\mathbf{k}), \qquad (0.3)$$

где $\Delta_p^{(2)}$ – оператор Лапласа на плоскости импульсов, $\delta^{(2)}(\mathbf{p}-\mathbf{k})$ – двумерная дельта-функция.

В следующих разделах мы рассмотрим некоторые аналоги потенциала (0.3) и найдем точные решения уравнения (0.1) с этими потенциалами. Отметим, что в трехмерном случае данная задача была решена в работе [1].

1 Релятивистские аналоги потенциала гармонического осциллятора

Преобразуем выражение (0.3), заменив в нём разность импульсов $\mathbf{p}-\mathbf{k}$ в евклидовом пространстве на разность $\mathbf{p}(-)\mathbf{k}$, заданную в пространстве Лобачевского [2]:

$$\mathbf{p}(-)\mathbf{k} = \mathbf{p} - \frac{\mathbf{k}}{m}\left[E_p - \frac{\mathbf{pk}}{E_k+m}\right],$$
$$E_p = \sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}. \qquad (1.1)$$

В результате получим потенциал следующего вида:

$$V_1(\mathbf{p},\mathbf{k}) = -(2\pi)^2\omega^2\Delta_p^{(2)}\left[\delta^{(2)}\left(\mathbf{p}(-)\mathbf{k}\right)\right] = -(2\pi)^2\omega^2\Delta_p^{(2)}\left[\frac{E_p}{m}\delta^{(2)}(\mathbf{p}-\mathbf{k})\right]. \qquad (1.2)$$

При получении выражения (1.2) была использована формула преобразования дельта-функции аргумента $\mathbf{p}(-)\mathbf{k}$, приведенная в работе [2].

Следуя работе [1], умножим потенциал (0.3) на отношения E_k/E, E_p/E и таким образом получим еще два варианта потенциала:

$$V_2(E,\mathbf{p},\mathbf{k}) = -(2\pi)^2\omega^2\frac{E_k}{E}\Delta_p^{(2)}\delta^{(2)}(\mathbf{p}-\mathbf{k}) \qquad (1.3)$$

и

$$V_3(E,\mathbf{p},\mathbf{k}) = -(2\pi)^2\omega^2\frac{E_p}{E}\Delta_p^{(2)}\delta^{(2)}(\mathbf{p}-\mathbf{k}) \qquad (1.4)$$

соответственно. Нетрудно видеть, что на энергетической поверхности $E_k = E_p = E$ потенциалы (1.3) и (1.4) преобразуются в выражение (0.3). Нахождение нерелятивистского предела (предела при $m\to\infty$) формул (1.2)–(1.4) приводит к потенциалу (0.3). Таким образом, выражения (1.2)–(1.4) можно рассматривать в качестве релятивистских обобщений квантовомеханического потенциала гармонического осциллятора.

2 Точные решения двумерного уравнения Логунова – Тавхелидзе

Подстановка потенциалов (1.2)–(1.4) в уравнение (0.1) и последующее интегрирование с учетом свойств дельта-функции [3] приводит к следующим дифференциальным уравнениям в частных производных:

$$\left(E^2-m^2-p^2\right)\psi_1(\mathbf{p}) = -\omega^2\Delta_p^{(2)}\psi_1(\mathbf{p}), \qquad (2.1)$$

$$\left(E^2-m^2-p^2\right)\psi_2(\mathbf{p}) = -\frac{m}{E}\omega^2\Delta_p^{(2)}\psi_2(\mathbf{p}), \qquad (2.2)$$

$$\left(E^2-m^2-p^2\right)\psi_3(\mathbf{p}) = -\frac{E_p}{E}\omega^2\Delta_p^{(2)}\frac{m}{E_p}\psi_3(\mathbf{p}), \qquad (2.3)$$

где $p=|\mathbf{p}|$, а индекс волновой функции равен индексу соответствующего потенциала. Решение данных уравнений будем искать методом разделения переменных в полярных координатах (p,φ), представив искомые волновые функции в форме $(s=1,\,2,\,3)$ [4]

$$\psi_s(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{p}}\sum_{\mu=-\infty}^{\infty}\psi_{s,\mu}(p)\exp(i\mu\varphi), \qquad (2.4)$$

где $\psi_{s,\mu}(p)$ – парциальные волновые функции. Подстановка ряда (2.4) в уравнения (2.1)–(2.3) и последующее приравнивание коэффициентов при экспонентах с одинаковыми показателями приводит к обыкновенным дифференциальным уравнениям для парциальных волновых функций:

$$\left(\frac{d^2}{dp^2}+\frac{1/4-\mu^2}{p^2}+\frac{1}{\omega^2}\left(E^2-m^2\right)-\frac{1}{\omega^2}p^2\right)\times \times\psi_{1,\mu}(p)=0, \qquad (2.5)$$

$$\left(\frac{d^2}{dp^2}+\frac{1/4-\mu^2}{p^2}+\frac{E}{m\omega^2}\left(E^2-m^2\right)-\frac{E}{m\omega^2}p^2\right)\times \times\psi_{2,\mu}(p)=0, \qquad (2.6)$$

$$\left(\frac{d^2}{dp^2}+\frac{1/4-\mu^2}{p^2}+\frac{E}{m\omega^2}\left(E^2-m^2\right)-\frac{E}{m\omega^2}p^2\right)\times \times\frac{1}{E_p}\psi_{3,\mu}(p)=0. \qquad (2.7)$$

Отметим, что уравнение (2.7) может быть сведено к уравнению (2.6) путем замены $\psi_{3,\mu}(p)=E_p\psi_{2,\mu}(p)$. Регулярные на интервале $p\in[0;\infty)$ решения уравнений (2.5)–(2.7) имеют следующий вид [5]:

$$\psi_{1,\mu}(p) = C_{1,\mu}\,p^{\frac{1}{2}+|\mu|}\times \times\exp\left(-\alpha\frac{p^2}{2}\right){}_1F_1\left(\frac{1}{2}-\frac{\beta}{4}+\frac{|\mu|}{2},|\mu|+1,\alpha p^2\right), \quad \alpha=\frac{1}{\omega}, \qquad (2.8)$$

$$\psi_{2,\mu}(p) = C_{2,\mu}\,p^{\frac{1}{2}+|\mu|}\times \times\exp\left(-\alpha\frac{p^2}{2}\right){}_1F_1\left(\frac{1}{2}-\frac{\beta}{4}+\frac{|\mu|}{2},|\mu|+1,\alpha p^2\right), \quad \alpha=\sqrt{\frac{E}{m\omega^2}},$$

$$\psi_{3,\mu}(p) = C_{3,\mu}E_p\,p^{\frac{1}{2}+|\mu|}\times \times\exp\left(-\alpha\frac{p^2}{2}\right){}_1F_1\left(\frac{1}{2}-\frac{\beta}{4}+\frac{|\mu|}{2},|\mu|+1,\alpha p^2\right), \quad \alpha=\sqrt{\frac{E}{m\omega^2}},$$

где $\beta=\alpha\left(E^2-m^2\right)$, $C_{s,\mu}$ – неизвестные константы, ${}_1F_1(a,b,x)$ – вырожденная гипергеометрическая функция [6].

Для того чтобы волновые функции (2.8) были конечными при любых значениях переменной p, следует потребовать выполнение условия

$$1/2-\beta/4+|\mu|/2=-n,\ n=0,1,2\ldots . \qquad (2.9)$$

Наличие условия (2.9) приводит к тому, что вырожденная гипергеометрическая функция в формулах (2.8) преобразуется в обобщенный полином Лагерра [6]. Таким образом, парциальные волновые функции для фиксированного состояния n могут быть представлены в виде

$$\psi_{1,\mu,n}(p)= = C_{1,\mu,n}\ p^{\frac{1}{2}+|\mu|}\exp\left(-\frac{1}{\omega}\frac{p^2}{2}\right)L_n^{|\mu|}\left(\frac{1}{\omega}p^2\right), \qquad (2.10)$$

$$\psi_{2,\mu,n}(p)= = C_{2,\mu,n}\ p^{\frac{1}{2}+|\mu|}\exp\left(-\sqrt{\frac{E}{m\omega^2}}\frac{p^2}{2}\right)L_n^{|\mu|}\left(\sqrt{\frac{E_n}{m\omega^2}}p^2\right),$$

$$\psi_{3,\mu,n}(p)= = C_{3,\mu,n}\ E_p p^{\frac{1}{2}+|\mu|}\exp\left(-\sqrt{\frac{E}{m\omega^2}}\frac{p^2}{2}\right)L_n^{|\mu|}\left(\sqrt{\frac{E_n}{m\omega^2}}p^2\right).$$

Учитывая обозначения, введенные в (2.8), получим из равенства (2.9) условия квантования энергии системы двух частиц для каждого из трех потенциалов:

– потенциала (1.2)

$$2E_n=2\sqrt{2\omega\left(2n+|\mu|+1\right)+m^2}, \qquad (2.11)$$

– потенциалов (1.3) и (1.4)

$$\sqrt{E_n}\left(E_n^{\,2}-m^2\right)=2\omega\sqrt{m}\left(2n+|\mu|+1\right). \qquad (2.12)$$

Для определения констант $C_{s,\mu,n}$ мы использовали нерелятивистское условие нормировки парциальных волновых функций

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \psi^2_{s,\mu,n}(p)\,dp=1. \qquad (2.13)$$

Подстановка волновых функций (2.10) в равенство (2.13) и последующее вычисление интегралов [7] приводим к следующим значениям констант:

$$C_{1,\mu,n}=\left(\frac{4\pi\omega^{-\mu-1}n!}{\left(|\mu|+n\right)!}\right)^{1/2},$$

$$C_{2,\mu,n}=\left(\frac{4\pi\left[E_n/\left(m\omega^2\right)\right]^{\frac{|\mu|+1}{2}}n!}{\left(|\mu|+n\right)!}\right)^{1/2},$$

$$C_{3,\mu,n}=\left(\frac{4\pi\left[E_n/\left(m\omega^2\right)\right]^{\frac{|\mu|+1}{2}}n!}{\left(\sqrt{m\omega^2/E_n}\left(2n+|\mu|+1\right)+m^2\right)\left(n+|\mu|\right)!}\right)^{1/2}.$$

Отметим, что использование релятивистского условия нормировки волновой функции [8] не дает возможность получить точные выражения для констант $C_{s,\mu,\mathrm{n}}$.

Заключение

Таким образом, в данной работе найдены точные решения двумерного уравнения Логунова – Тавхелидзе с некоторыми аналогами потенциала гармонического осциллятора в импульсном представлении: парциальные волновые функции и условия квантования энергии.

В дальнейшем мы планируем рассмотреть другие варианты релятивисткого обобщения потенциала гармонического осциллятора и получить точные или приближенные решения релятивистких двухчастичных уравнений с этими типами взаимодействий.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Капшай*, *В.Н.* Точные решения квазипотенциальных уравнений для некоторых аналогов потенциалов запирания / В.Н. Капшай, С.П. Кулешов, Н.Б. Скачков // Ядерная физика. – 1983. – Т. 37. – С. 1292–1296.

2. *Кадышевский*, *В.Г.* Трехмерная формулировка релятивистской проблемы двух тел / В.Г. Кадышевский, Р.М. Мир-Касимов, Н.Б. Скачков // ЭЧАЯ. – 1972. – Т. 2, № 3. – С. 635–690.

3. *Владимиров*, *В.С.* Обобщенные функции в математической физике / В.С. Владимиров // Изд. 2-е, испр. и дополн. Серия: «Современные физико-технические проблемы». – Москва: Наука, 1979. – 320 с.

4. *Бабиков*, *В.В.* Метод фазовых функций в квантовой механике / В.В. Бабиков. – Москва: Наука, 1976. – 285с.

5. *Камке*, *Э.* Справочник по дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – Санкт-Петербург: Лань, 2003. – 576 с.

6. *Абрамовиц*, *М.* Справочник по специальным функциям с формулами графиками и математическими таблицами / М. Абрамовиц, И. Стиган. – Москва: Наука, 1979. – 830 с.

7. *Градштейн*, *И.С.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и производных / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик; изд-е 7-е. – СПб.: БХВ-Петербург, 2011. – 1232 с.

8. *Гришечкин*, *Ю.А.* Численные решения задач о связанных состояниях и состояниях рассеяния для потенциалов однобозонного обмена и их суперпозиций: практическое руководство / Ю.А. Гришечкин, В.Н. Капшай; М-во образования Республики Беларусь, Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2018. – 38 с.

Поступила в редакцию 02.11.2022.

Информация об авторах

Гришечкин Юрий Алексеевич – к.ф.-м.н., доцент

Павленко Андрей Васильевич – аспирант