

После уменьшения размерности данных полученные образцы можно сравнивать между собой с использованием евклидова расстояния. При распознавании очередного изображения текущее изображение сравнивается с уже распознанными изображениями. Если существует уже распознанное изображение на расстоянии меньше заданной константы, то считается, что на обоих изображениях находится одно и то же лицо.

С целью апробации описанного подхода к задаче распознавания людей по изображениям лиц, была взята выборка лиц GeorgiaTechfacedatabase, к которой поэтапно был применён описанный метод. Сначала из фотографий были извлечены области, содержащие лица. Всего было извлечено 500 областей. Затем области с лицами были уменьшены до размера 20 на 20 пикселей, после чего число признаков было уменьшено до 20 с использованием метода главных компонент. И затем полученные объекты сравнивались между собой. Описанный алгоритм распознавал изображённых людей по лицам верно в 71 % случаев.

Литература

- 1 Leinhardt, R. An Extended Set of Haar-like Features for Rapid Object Detection [изображение] / Rainer Lienhardt and Jochen Maydt // ICIP02 – 2002. P. 900–903.
- 2 Georgia Tech face database [Electronic resource] – URL: http://www.anefian.com/research/face_reco.htm. – Date of access: 30.04.2017.
- 3 Turk, M. Face recognition using eigenfaces / M. A. Turk, A. P. Pentland // Computer Vision and Pattern Recognition. – 1991. – P. 586–591.

УДК 534.231+537.87

А. И. Толкачёв

ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ НЕЙМАНА

Статья посвящена решению в ограниченных областях уравнения Гельмгольца с граничными условиями Неймана в цилиндрических координатах. Методом разделения переменных найдены нормированные решения и соответствующие им собственные значения. Полученные общие решения применены к следующим областям: цилиндр, клин, полуцилиндр, цилиндр с тонкой перегородкой. Проведен анализ полученных решений.

1. Многие задачи акустики и электродинамики, в которых рассматриваются поля в ограниченных областях, сводятся к уравнению Гельмгольца [1, 2]:

$$\{\Delta + k^2\} \Psi(\vec{x}) = 0; \quad \vec{x} \in G. \quad (1)$$

При этом на поверхности Σ , ограничивающей область G , выполняются определенные граничные условия. В данной работе рассмотрим для уравнения (1) краевые задачи с граничными условиями (ГУ) Неймана:

$$(ГУ)_2 \quad \partial U(\vec{x}) / \partial \vec{n} \Big|_{\vec{x} \in \Sigma} = 0, \quad (2)$$

где \vec{n} – внешняя нормаль к поверхности Σ .

Такие задачи имеют решения только при некоторых значениях параметра k^2 (k_n^2), и тем самым являются задачами на собственные значения (СЗ). Сконцентрируем внимание на областях, которые удобно рассматривать в цилиндрических координатах.

Для решения уравнения Гельмгольца воспользуемся методом разделения переменных. Для функции $\Psi(\vec{x})$ и оператора Лапласа имеем

$$\Psi(\vec{x}) = \Psi(\rho, \varphi, z) = R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z); \quad \Delta = \Delta_\rho + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (3)$$

где $\Delta_\rho = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}$.

Подставляя (3) в (1) и разделяя переменные нетрудно получить три обыкновенных дифференциальных уравнения относительно каждой из искомым функций:

$$Z''(z) = -\kappa^2 Z(z), \quad (4)$$

$$\Phi''(\varphi) = -\nu^2 \Phi(\varphi), \quad (5)$$

$$\{\rho^2 \Delta_\rho - \nu^2 + \gamma^2 \rho^2\} R(\rho) = 0, \quad (6)$$

где $\gamma^2 = k^2 - \kappa^2$, а κ^2 и ν^2 – константы разделения переменных.

Общими решениями уравнений (4)–(6) являются функции

$$Z(z) = A_\kappa \cos \kappa z + B_\kappa \sin \kappa z, \quad (7)$$

$$\Phi(\varphi) = A_\nu \cos \nu \varphi + B_\nu \sin \nu \varphi, \quad (8)$$

$$R(\rho) = C_\nu J_\nu(\gamma \rho) + D_\nu N_\nu(\gamma \rho), \quad (9)$$

где $J_\nu(z)$, $(N_\nu(z))$ – функции Бесселя (Неймана) [3].

Таким образом, решения уравнения Гельмгольца в цилиндрических координатах имеют вид

$$\Psi(\vec{x}) = [C_\nu J_\nu(\gamma \rho) + D_\nu N_\nu(\gamma \rho)] [A_\nu \cos \nu \varphi + B_\nu \sin \nu \varphi] [A_\kappa \cos \kappa z + B_\kappa \sin \kappa z]. \quad (10)$$

Далее найдем функции $\Psi(\vec{x})$, нормированные на единицу условием

$$\int_G |\Psi(\vec{x})|^2 dx = 1, \quad (11)$$

и соответствующие им собственные значения для конкретных областей.

1. Сначала рассмотрим цилиндрическую область (рисунок 1). В цилиндрических координатах она задается как

$$G = \{0 \leq \rho \leq \rho_0; 0 \leq \varphi \leq 2\pi; 0 \leq z \leq z_0\}. \quad (12)$$

Из ГУ Неймана для функций $Z(z)$; $R(\rho)$ и условий периодичности для $\Phi(\varphi)$ имеем условия

$$dZ(z)/dz|_{z=0} = 0; \quad dZ(z)/dz|_{z=z_0} = 0, \quad (13)$$

$$\Phi(2\pi) = \Phi(0); \quad \Phi'(2\pi) = \Phi'(0), \quad (14)$$

$$|R(\rho)| < \infty; \quad dR(\rho)/d\rho|_{\rho=\rho_0} = 0. \quad (15)$$

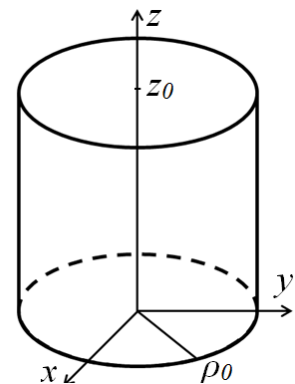


Рисунок 1 – Цилиндр

Для функций $Z(z)$ с учетом ГУ имеем

$$\kappa = \kappa_l = l\pi/z_0; \quad B_l = 0; \quad Z_l(z) = \begin{cases} \sqrt{1/z_0}; & l=0; \\ \sqrt{2/z_0} \cos(l\pi z/z_0); & l=1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (16)$$

Для функций $\Phi(\varphi)$ имеем $\nu = \nu_m = m$, $m=0, 1, 2, 3, \dots$ и две возможности (при $\nu = \nu_0 = 0$ только одну, – решение с вращательной симметрией $\Phi_0(\varphi) = \sqrt{1/2\pi}$):

$$\Phi_m^{(c)}(\varphi) = \sqrt{1/\pi} \cos m\varphi; \quad \Phi_m^{(s)}(\varphi) = \sqrt{1/\pi} \sin m\varphi. \quad (17)$$

Функции (16), (17) в целях удобства нормированы условиями

$$\int_0^{z_0} |Z_l(z)|^2 dz = 1; \quad \int_0^{2\pi} |\Phi_{\nu_m}^{(c,s)}(\varphi)|^2 d\varphi = 1. \quad (18)$$

Для радиальной составляющей в качестве решения подходят только функции Бесселя первого рода (при $\nu = m$): $R(\rho) = C_m J_m(\gamma\rho)$, которые остаются конечными при $\rho = 0$, причём должно выполняться условие Неймана на боковой поверхности цилиндра

$$dR(\rho)/d\rho|_{\rho=\rho_0} = C_m J'_m(\gamma\rho)|_{\rho=\rho_0} = 0. \quad (19)$$

Это условие выполняется при значениях параметра

$$\gamma = \gamma_n^{(m)} = \xi_n^{(m)}/\rho_0, \quad n=0, 1, 2, 3, \dots, \quad (20)$$

где $\xi_n^{(m)}$ – корни первой производной функций Бесселя индекса m , приближенные значения которых можно найти в таблице ниже, а также в специальной литературе [1].

Таблица 1 – Значения корней первой производной функции Бесселя первого рода индекса m

m	$\xi_0^{(m)}$	$\xi_1^{(m)}$	$\xi_2^{(m)}$	$\xi_3^{(m)}$	$\xi_4^{(m)}$
0	3,382	7,016	10,173	13,324	16,471
$\frac{1}{2}$	$\pi/2$	$3\pi/2$	$5\pi/2$	$7\pi/2$	$9\pi/2$
1	1,841	5,331	8,536	11,706	14,864
2	3,054	6,706	9,969	13,170	16,348
3	4,201	8,015	11,346	14,568	17,789
4	5,317	9,282	12,682	15,964	19,196

Константы C_m определяются из условия нормировки, вытекающего из (11), (18):

$$\int_0^{\rho_0} |R(\rho)|^2 \rho d\rho = 1. \quad (21)$$

$$C_n^{(m)} \rho_0 = \left[\int_0^1 J_m^2(\xi_n^{(m)} x) x dx \right]^{-1/2}. \quad (22)$$

Несколько первых значений константы $C_n^{(m)}$ можно взять из таблицы 2.

Таблица 2 – Значения нормировочных констант $C_n^{(m)}$

m	$C_0^{(m)} \rho_0$	$C_1^{(m)} \rho_0$	$C_2^{(m)} \rho_0$	$C_3^{(m)} \rho_0$	$C_4^{(m)} \rho_0$
0	3,511	4,712	5,664	6,477	7,198
$\frac{1}{2}$	2,221	3,848	4,967	5,877	6,664
1	2,895	4,16	5,21	6,084	6,847
2	3,846	4,726	5,667	6,478	7,199
3	4,651	5,238	6,091	6,85	7,535
4	5,371	5,712	6,491	7,205	7,857

Таким образом, функции $\Psi(\vec{x})$ для полей внутри цилиндрического ящика, имеют вид

$$\Psi_{nml}^{(c,s)}(\rho, \varphi, z) = C_n^{(m)} J_m(\xi_n^{(m)} \rho / \rho_0) \Phi_m^{(c,s)}(\varphi) Z_l(z). \quad (23)$$

Соответствующие собственные значения таковы:

$$k_{nml}^2 = (l\pi/z_0)^2 + (\xi_n^{(m)} / \rho_0)^2. \quad (24)$$

2. Рассмотрим теперь область G в виде клина (рисунок 2):

$$G = \{0 \leq \rho \leq \rho_0; 0 \leq \varphi \leq \varphi_0; 0 \leq z \leq z_0\}. \quad (25)$$

Для такой области из ГУ Неймана имеем

$$dZ(z)/dz|_{z=0} = 0; \quad dZ(z)/dz|_{z=z_0} = 0, \quad (26)$$

$$d\Phi(\varphi)/d\varphi|_{\varphi=0} = 0; \quad d\Phi(\varphi)/d\varphi|_{\varphi=\varphi_0} = 0, \quad (27)$$

$$|R(\rho)| < \infty; \quad dR(\rho)/d\rho|_{\rho=\rho_0} = 0. \quad (28)$$

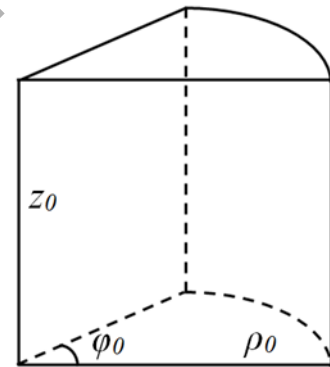


Рисунок 2 – Клин

Функции $Z(z)$ будут иметь тот же вид $Z_l(z)$ (16). Для описывающих азимутальную зависимость функций $\Phi(\varphi)$ имеем $\nu = \nu_m = m\pi/\varphi_0$, $m = 0, 1, 2, \dots$ и одну возможность:

$$\Phi_{\nu_m}^{(c)}(\varphi) = \begin{cases} \sqrt{1/\varphi_0}; & m = 0; \\ \sqrt{2/\varphi_0} \cos(m\pi\varphi/\varphi_0); & m = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (29)$$

Радиальная зависимость теперь будет описываться функциями Бесселя индексов ν_m , корни первой производной которых $\xi_n^{(\nu_m)}$:

$$\gamma = \gamma_n^{(\nu_m)} = \xi_n^{(\nu_m)} / \rho_0, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (30)$$

При этом функции $\Psi(\vec{x})$ и СЗ имеют вид

$$\Psi_{nml}^{(c)}(\rho, \varphi, z) = C_n^{(\nu_m)} J_{\nu_m}(\xi_n^{(\nu_m)} \rho / \rho_0) \Phi_{\nu_m}^{(c)}(\varphi) Z_l(z), \quad (31)$$

$$k_{nml}^2 = (l\pi/z_0)^2 + (\xi_n^{(\nu_m)} / \rho_0)^2. \quad (32)$$

4. Рассмотрим частные случаи. При $\varphi_0 = \pi$ область G имеет вид полуцилиндра (рисунок 3). Для азимутальных функций имеем

$$\nu = \nu_m = m\pi/\pi = m, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (33)$$

$$\Phi_{\nu_m}^{(c)}(\varphi) = \begin{cases} \sqrt{1/\pi}; & m = 0; \\ \sqrt{2/\pi} \cos(m\varphi); & m = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (34)$$

Собственные функции и СЗ имеют вид:

$$\Psi_{nml}^{(c)}(\rho, \varphi, z) = C_n^{(m)} J_m(\xi_n^{(m)} \rho / \rho_0) \Phi_{\nu_m}^{(c)}(\varphi) Z_l(z), \quad (35)$$

$$k_{nml}^2 = (l\pi/z_0)^2 + (\xi_n^{(m)} / \rho_0)^2. \quad (36)$$

Отметим, что собственные значения в цилиндре и полуцилиндре одинаковы.

Для цилиндра с перегородкой, координата которой $\varphi = 0$, имеем область G в виде (рисунок 4):

$$G = \{0 \leq \rho \leq \rho_0; 0 < \varphi < 2\pi; 0 \leq z \leq z_0\}. \quad (37)$$

Поскольку $\varphi_0 = 2\pi$, то $\nu = \nu_m = m/2$, $m = 0, 1, 2, \dots$, азимутальные функции

$$\Phi_{m/2}^{(c)}(\varphi) = \begin{cases} \sqrt{1/2\pi}; & m = 0; \\ \sqrt{1/\pi} \cos(m\varphi/2); & m = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (38)$$

Функции $\Psi(\vec{x})$ и СЗ энергии таковы:

$$\Psi_{nml}^{(c)}(\rho, \varphi, z) = C_n^{(m/2)} J_{m/2}(\xi_n^{(m/2)} \rho / \rho_0) \Phi_{m/2}^{(c)}(\varphi) Z_l(z), \quad (39)$$

$$k_{nml}^2 = (l\pi/z_0)^2 + (\xi_n^{(m/2)} / \rho_0)^2, \quad (40)$$

где $\xi_n^{(m/2)}$ – корни первой производной функций Бесселя полуцелых индексов.

Отметим, что при четных значениях параметра m , собственные значения аналогичны целому цилиндру. Также отметим, что при значении параметра $m = 1$, корни уравнения (19) (вторая строка численных значений таблицы 1), а следовательно и СЗ (40) являются точными.

Литература

- 1 Риле, Ф. Стандарты частоты. Принципы и приложения / Ф. Риле. / пер. с англ. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2009. – С. 95–100.
- 2 Городецкий, М. Л. Оптические микрорезонаторы с гигантской добротностью / М. Л. Городецкий. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2011. – С. 81–100.
- 3 Владимиров, В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. – М. : Наука, 1988. – С. 332–365.

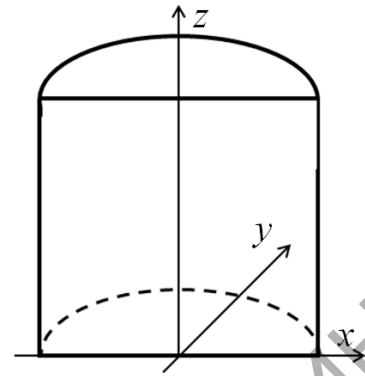


Рисунок 3 – Полуцилиндр

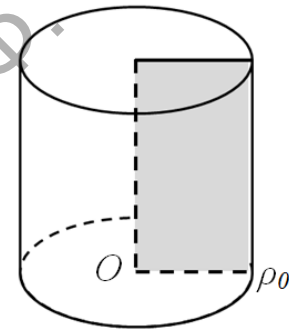


Рисунок 4 – Цилиндр с перегородкой