Имеют место следующие утверждения:

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (3) и у функции* $f(s,x,y)$ *на* $[0,1]\times\mathbb{R}^2$ *существует непрерывная производная* $\dfrac{\partial^2 f(s,x,y)}{\partial y^2}$, *которая является положительной. Пусть для последовательности решений* $x_k(t,s)=p(t,y_k)$, $t_k\leqslant t<T_k$, $k=1,\,2,\,\ldots$, $(T_k<\infty$ *или* $T_k=+\infty)$ *уравнения (1) выполнено условие* $\|x_k(t,s)\|\leqslant R_1$, $t_k\leqslant t<T_k$, $k=1,2,\ldots$. *Тогда*

1) для любого отрезка $[a,b]$, $t_k\leqslant a_k$, $b_k<T_k$, $k\geqslant k_0$ *множество*

$$\{x_k(t,s):a\leqslant t<b,\ k\geqslant k_0\}$$

компактно в C^1_*, *если* $t_k\to-\infty$ *при* $k\to\infty$;

2) множество $\bigl\{x_k(t,s):t_k\leqslant t<T_k,\ k=1,\,2,\,\ldots\bigr\}$ *компактно в* C^1_*, *если* $t_k\geqslant t_0$, $k=1,\,2,\,3,\,\ldots$, *и множество начальных значений* $\{x_k(t,s)=y_k(s)\}$, $k=1,\,2,\,\ldots$, *компактно в* C^1_*.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (3) и у функции* $f(s,x,y)$ *на* $[0,1]\times\mathbb{R}^2$ *существует непрерывная производная* $\dfrac{\partial^2 f(s,x,y)}{\partial y^2}$, *которая является положительной. Пусть последовательность решений* $\{x_k(t)\}$ *уравнения (1) удовлетворяет условиям* $\|x_k(t_k)\|\leqslant\delta_k$, $\|x_k(0)-x_0\|=r_0$ *и* $\delta_k\leqslant\|x_k(t)-x_0\|\leqslant r_0$ *при* $t_k\leqslant t\leqslant 0$, *где* $\delta_k\to 0$ *при* $k\to\infty$. *Тогда множество значений* $\{x_k(t):t_k\leqslant t\leqslant 0,\ k=1,2,\ldots\}$ *решений* $x_k(t)$ *компактно в* C^1_*.

Теорема 3. *Пусть уравнение (1) имеет решение* $x(t,s)=p\bigl(t,y(s)\bigr)$ *такое, что* $\|x(t,s)\|\leqslant R_1$, $t\leqslant 0$. *Тогда множество предельных точек решения* $x(t,s)$ *при* $t\to-\infty$ *является критическими точками функционала (2).*

Теорема 4. *Пусть изолированная критическая точка* x_0 *является локальным минимумом для функционала (1) в* C^1_*. *Тогда стационарное решение* $x(t)=x_0$ *уравнения (1) асимптотически устойчиво по Ляпунову при* $t\to+\infty$ *и наоборот, если критическая точка* x_0 *– асимптотически устойчива по Ляпунову при* $t\to+\infty$, *то она является изолированной критической точкой и точкой локального минимума функционала (2).*

Теорема 5. *Пусть* $G(0)=0$ *и* $x_0=0$ *является единственной критической точкой функционала (2) в шаре* $\|x\|\leqslant R_1$. *Тогда уравнение (1) не имеет ненулевых решений* $x(t)$, *удовлетворяющих условию* $\|x(t)\|\leqslant R_1$, $t\in\mathbb{R}^1$.

Литература

1. Бабаджанов Ш. Ш. *Градиентно подобное отображение основного функционала вариационного исчисления в банаховом пространстве* C^1_* // Интеллектуально-информационные технологии и интеллектуальный бизнес (ИНФОС-2021). Материалы Двенадцатой Международной научно-технической конференции (29–30 июня 2021). Вологда, 2021. С. 188–192.

ДРОБНО-ЛИНЕЙНАЯ ПО ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ ОТРАЖАЮЩАЯ ФУНКЦИЯ

М.С. Белокурский

Рассмотрим дифференциальную систему

$$\dot{x}=X(t,x),\quad t\in\mathbb{R},\quad x=(x_1,\ldots,x_n)^T\in\mathbb{R}^n, \tag{1}$$

с непрерывной по совокупности переменных и непрерывно дифференцируемой по x правой частью. Пусть $\varphi(t;\,\tau,x)$ – общее решение в форме Коши системы (1). Пусть I_x – максимальный симметричный относительно нуля интервал существования решения $\varphi(t;\,0,x)$. Обозначим $D(X) := \bigl\{\bigl(t,\varphi(t;0,x)\bigr) \in \mathbb{R}^{n+1} : t \in I_x,\ \ x \in \mathbb{R}^n\bigr\}$. Из теоремы о непрерывной зависимости решений от начальных данных и определения множества $D(X)$ следует, что $D(X)$ – открытая область в $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, содержащая гиперплоскость $t = 0$. Отражающей функцией Мироненко [1] системы (1) называется вектор-функция $F : D(X) \to \mathbb{R}^n$, действующая по правилу $(t,x) \mapsto \varphi(-t;\,t,x)$. Таким образом, отражающая функция определяется формулой $F(t,x) = \varphi(-t;\,t,x)$.

Вектор-функция $F = F(t,x) : D(X) \to \mathbb{R}^n$ является [2, с. 63] отражающей функцией системы (1), тогда и только тогда, когда она удовлетворяет системе уравнений в частных производных $F_t + F_x X(t,x) + X(-t,F) = 0$ и начальному условию

$$F(0,x) \equiv x. \tag{2}$$

Для отражающей функции системы (1) справедливо [2, с. 63] тождество

$$F(-t,F(t,x)) \overset{t,x}{\equiv} x, \tag{3}$$

из которого следует, что не всякая вектор-функция может быть отражающей функцией. Поэтому актуальной задачей является нахождение функций, удовлетворяющих условию (3), т. е. тех функций, которые могут быть использованы для изучения дифференциальных уравнений методом отражающей функции.

Рассмотрим функцию вида

$$F(t,x) = \frac{f_0(t) + f_1(t)x}{g_0(t) + g_1(t)x}. \tag{4}$$

Коэффициент $g_0(0) \neq 0$, т. к. в противном случае функция (4) не удовлетворяет условию (2). Разделив числитель и знаменатель функции (4) на $g_0(t)$, получаем функцию вида

$$F(t,x) = \frac{a_0(t) + a_1(t)x}{1 + b_1(t)x}, \tag{5}$$

где $a_0(t) = \dfrac{f_0(t)}{g_0(t)},\ a_1(t) = \dfrac{f_1(t)}{g_0(t)},\ b_1(t) = \dfrac{g_1(t)}{g_0(t)}.$

Теорема 1. *Для того чтобы функция (5) была отражающей функцией необходимо и достаточно, чтобы она имела вид*

$$F(t,x) = \frac{\alpha(t)e^{\beta(t)} + e^{2\beta(t)}x}{1 + \gamma(t)e^{\beta(t)}x}, \tag{6}$$

где $\alpha(t)$, $\beta(t)$ и $\gamma(t)$ – нечетные дифференцируемые функции.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = X(t,x), \quad t,x \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Теорема 2. *Пусть правая часть уравнения (7) непрерывна по совокупности переменных и непрерывно дифференцируема по x. Если уравнение (7) имеет отражающую функцию (6), то оператор сдвига вдоль решений уравнения (7) на отрезке $[-\omega;\omega]$ задается формулой*

$$T : x \mapsto \frac{-\alpha(\omega)e^{-\beta(\omega)} + e^{-2\beta(\omega)}x}{1 - \gamma(\omega)e^{-\beta(\omega)}x}.$$

Литература

1. Мироненко В. И. *Классы систем с совпадающими отражающими функциями* // Дифференциальные уравнения. 1984. Т. 20. № 12. С. 2173–2176.

2. Мироненко В. И. *Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем.* Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2004.

3. Белокурский М. С. *Дробно-линейная отражающая функция* // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. 2021. № 6(129). С. 84–87.

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ МНОГОТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА С ПАРАМЕТРОМ

А.Н. Бондарев

Исследуется задача

$$\frac{dX}{dt} = \lambda A(t)XC_1(t) + XB_1(t) + \lambda^2 C_2(t)XB_2(t) + F(t), \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{k} M_i X(t_i, \lambda) = 0, \quad 0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_k = \omega, \tag{2}$$

где $X \in \mathbb{R}^{n\times m}$, A, B_j, C_j, F – непрерывные по $t \in I$ матрицы-функции соответствующих размерностей, M_i – заданные постоянные $(n \times n)$-матрицы; $\lambda \in \mathbb{R}$, $I = [0, \omega]$, $\omega > 0$, $j = 1, 2$.

В предлагаемой работе, являющейся обобщением и развитием [1, 2], по методу [3, гл. I] получены коэффициентные достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1), (2), алгоритм построения решения и дана оценка области его возможного расположения. Исследование задачи (1), (2) выполнено в конечномерной банаховой алгебре $\mathfrak{B}(n)$ непрерывных матриц-функций с нормой $\|X\|_C = \max\limits_{t\in I} \|X(t, \lambda)\|$, где $\|\cdot\|$ – определенная норма матрицы в этой алгебре.

Примем следующие обозначения:

$$\varepsilon = |\lambda|, \quad m_i = \|M_i\|, \quad v_i = \|V_i\|, \quad \gamma = \|\Phi^{-1}\|, \quad \alpha = \max_{t\in I}\|A(t)\|, \quad \beta_2 = \max_{t\in I}\|B_2(t)\|,$$

$$c_j = \max_{t\in I}\|C_j(t)\|, \quad h = \max_{t\in I}\|F(t)\|, \quad \mu_1 = \max_{t\in I}\|V(t)\|, \quad \mu_2 = \max_{t\in I}\|V^{-1}(t)\|,$$

$$q(\varepsilon) = q_1\varepsilon^2 + q_2\varepsilon, \quad N = \gamma\mu_1\mu_2\omega h \sum_{i=1}^{k} m_i v_i,$$

где $q_1 = \gamma\mu_1\mu_2\beta_2 c_2\omega \sum\limits_{i=1}^{k} m_i v_i$, $q_2 = \gamma\mu_1\mu_2\alpha c_1\omega \sum\limits_{i=1}^{k} m_i v_i$, Φ – линейный матричный оператор типа [4], $\Phi Y \equiv \sum\limits_{i=1}^{k} M_i Y V_i$; $V_i = V(t_i)$, $V(t)$ – фундаментальная матрица уравнения $dV/dt = VB_1(t)$.

Теорема. *Пусть оператор* Φ *однозначно обратим, при этом* $q(\varepsilon) < 1$. *Тогда задача (1), (2) однозначно разрешима; ее решение* $X(t, \lambda)$ *представимо как предел равномерно сходящейся последовательности матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением и удовлетворяющих условию (2), при этом справедлива оценка* $\|X\|_C \leqslant N/(1 - q(\varepsilon))$.