2 Алехина, С. В. Инклюзивный подход в образовании в контексте проектной инициативы «Наша новая школа» / С. В. Алехина, В. К. Зарецкий // Психолого-педагогическое обеспечение национальной образовательной инициативы «Наша новая школа». – М., 2010. – С. 104–116.

3 Ответы Т. П. Хлоповой на вопросы специалистов УО Краснодарского края по инклюзивному образованию. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.mou13 school.narod.ru/inklyuziv_obr.html.

УДК 519.1

А. А. Щербина

АЛГЕБРА СВЯЗНЫХ ГРАФОВ И ТОПОЛОГИЯ НА МНОЖЕСТВЕ СВЯЗНЫХ ГРАФОВ

Статья посвящена конечным неориентированным графам и определённой для них алгебраической структуре. Объектами рассмотрения являются алгебра неориентированных конечных связных графов, алгебраические операции на множестве связных графов, возможность построения топологии на множестве связных графов. Алгебра графов является частью теории графов, которая тесно связана со многими разделами математики, среди которых, теория групп, теория матриц, численный анализ, теория вероятностей, топология и комбинаторный анализ. В статье даётся определение алгебры связных графов, на основании которой строятся примеры топологических пространств связных графов.

Пусть U − множество конечных неориентированных графов. Напомним, что графом $G(V, E)$ называется совокупность непустого множества V (множества вершин) и множества E двухэлементных подмножеств множества V (E − множество ребер). Так же граф G называется конечным, если конечно множество его вершин V. Неориентированным графом называется пара $G = (V, E)$, где V – множество вершин графа, E – множество ребер, состоящее из неупорядоченных пар элементов из V. Граф $G = (V, E)$ называется связным, если любые две вершины этого графа связаны между собой маршрутом. Связный ациклический граф называется деревом. Если ребро $(u, v) \in E$, то вершины u, v называются концами этого ребра. Ребро $e \in E$ называется инцидентным вершине $v \in V$ если эта вершина является концом ребра e. В дальнейшем мы будем называть множество U просто множеством графов.

На множестве графов U, существуют различные подмножества, одним из таких подмножеств является A – множество неориентированных конечных связных графов. В дальнейшем мы будем называть его просто множество связных графов. Операции над графами образуют новые графы из существующих. На множестве A операции, применимые к связным графам, можно разделить на следующие основные категории: одноместные (унарные) и двуместные (бинарные) операции. Одноместная операция создаёт новый граф из старого, а двуместная операция создаёт новый граф из двух исходных графов $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$, где $G_1, G_2 \in U$.

К одноместным (унарным) операциям относят такие операции как введения ребра, введения вершины, удаление вершины, удаления ребра или расщепление вершин, стягивание графа, и т. д. Иногда класс унарных операций называют «операции редактирования» графов. Они создают новый граф из исходного графа путём простых локальных изменений. К двуместным (бинарным) операциям относятся такие операции как, операция взаимно-однозначного соединения, соединения, декартового произведения, объединения или пересечения и т. д. Рассмотрим несколько примеров применения унарных и бинарных операций.

Пример 1. Объединением графов $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$ называется граф $G(V, E) = G_1 \cup G_2$, где $V = V_1 \cup V_2$, $E = E_1 \cup E_2$.

Пример 2. Введения вершины и ребра в граф. Пусть $G = (V, E)$ − некоторый (связный) граф, где одна из вершин «*v*» графа *G* будет связана с веденной нами вершина «*w*», путем ведения связующего ребра (*w, v*), тогда операцию введения ребра и вершины в граф, выразим через операцию объединения графов, следующим образом: $G \cup T^w_{(w,v)}$, где $T^w_{(w,v)} = \{V = \{w\},\ E = (w,v)\}$ − является связным графом-деревом.

Были перечислены наиболее простые и часто применяемые операции, на самом деле множество этих операций, как бинарных так унарных, огромно. К таким операциям относят возведение в степень, минор графа, дополнение графа, лексикографическое произведение графов, тензорное произведение графов, зигзаг-произведение и т. д. Теперь можно дать общее определение алгебры графов.

Определение 1. Пара $GU = (U, \Omega)$ называется универсальной алгеброй графов, где U − множество графов, а сигнатура Ω включает бинарные операции: введения вершины, введения ребра, удаления вершины и удаления ребра, взаимно-однозначного соединения, соединения, декартового произведения, объединение и пересечение графов и т. д. [1].

Из этого определения можно выделить алгебру связных графов.

Определение 2. Пара $H = (A, K)$ называется алгеброй конечных связных неориентированных графов, если A – множество всех конечных связных неориентированных графов, а K – сигнатура алгебры включает операции объединения, пересечения. Иногда можно включить в эту сигнатуру другие операции: взаимно-однозначного соединения, соединения, декартового произведения, введения ребра, введения вершины в ребро, удаления ребра и удаления вершины и т.д.

Так как алгебра связных графов является частью теории графов, то можно говорить о ее практической значимости. Областей применения данной алгебры обширно, но наиболее значимое свое применение данная алгебра нашла в задачах проектирования компьютерной сети и исследованием ее свойств с точки зрения устойчивости к повреждениям линий связи и компьютеров. При этом КС моделируется в виде неориентированного графа, вершины которого соответствуют компьютерам, а ребра − линиям связи между ними [2].

Исходя из определенной выше алгебры связных графов, попробуем построить на множестве связных графов, различные топологические структуры. Проверим, является ли множество связных графов A, с определенной на ней структурой Ω, топологическим пространством. Наиболее простым примером построения топологии на A является, так называемое, антидискретное пространство, где выделенная совокупность τ на множестве связных графов A будет состоять из $\tau = \{\varnothing, A\}$. Следовательно, для антидискретного пространства любое объединение и пересечение подмножеств совокупности τ, будет принадлежать этой же совокупности, что касается условия принадлежности пустого и самого множества, оно очевидно. Поэтому τ является топологической структурой, задающей топологического пространство A.

Выделим на множестве A еще одну совокупность Ω вида

$$\Omega = \left\{ \left(G_i \cup T^w_{(w,v_1^i)\ldots(w,v_n^i)},\ \text{где}\quad i = \overline{1,\infty};\quad G_i \in A \right),\ A,\ \varnothing \right\},$$

где $T^w_{(w,v_1^i)\ldots(w,v_n^i)}$ − связный граф-дерево, у которого «*w*» − единственная вершина и $(w, v_1^i)\ldots(w, v_n^i)$ – связующие ребра для вершины «*w*» и всех вершин $\{v_1, v_2, \ldots v_n\} \in G_i$

некоторого графа $G_i \in A$. Таким образом, элемент $G_i \cup T^{w}_{(w,v_1^i)\ldots(w,v_n^i)}$ является объединением графа $G_i \in A$ с данным графом-деревом. Другими словами, применяется операция введения во все графы множества *A*, некоторой вершины «*w*» и ребер, соединяющих эту вершину со всеми вершинами графа $G_i \in A$. Проверим, выполняются ли для структуры Ω условия топологии.

1. Для выполнения первого условия необходимо, чтобы $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\left(G_i \cup T^{w}_{(w,v_1^i)\ldots(w,v_n^i)}\right) = \overline{G}$, где $i = \overline{1,\infty}$, выполнялось $\overline{G} \in \Omega$. Это будет верно, так как у всех графов, полученных путем ведения вершины, будет хотя бы одна общая «*w*»-вершина, а значит $\overline{G}$ будет связным графом и будет принадлежать Ω. Аналогично и для объединения самого множества связных графов *A* с некоторыми графами вида $\left(G_i \cup T^{w}_{(w,v_1^i)\ldots(w,v_n^i)}\right)$ такие графы всегда будут связные. Следовательно, они будут принадлежать множеству *A*. Тогда, такое объединение будет всегда равным самому множеству *A*, а оно принадлежит нашей совокупности Ω. Очевидно, что для объединения с пустым множеством также указанное свойство будет выполняться. Следовательно, первое проверено.

2. Для выполнения второго условия необходимо, чтобы $\bigcap\limits_{i=1}^{p}\left(G_i \cup T^{w}_{(w,v_1^i)\ldots(w,v_n^i)}\right) = \overline{G}$, где $i = \overline{1,\mathrm{p}}$, было верным $\overline{G} \in \Omega$. Аналогично первому условию, это утверждение будет выполняться, так как у всех графов общая «*w*»-вершина и все такие, отдельные графы, связаны связующими ребрами $(w, v_1^i)\ldots(w, v_n^i)$ с некоторыми графами из *A*, тогда пересечение графов $\left(G_i \cup T^{w}_{(w,v_1^i)\ldots(w,v_n^i)}\right)$ будет либо являться графом с одной только вершинной «*w*», либо графом с данной вершиной и несколькими общими вершинами всех пересекаемых графов $\left(G_i \cup T^{w}_{(w,v_1^i)\ldots(w,v_n^i)}\right)$ и связующими ребрами, так как все вершины отдельных графов вида $\left(G_i \cup T^{w}_{(w,v_1^i)\ldots(w,v_n^i)}\right)$, связаны с вершиной «*w*». Значит их пересечение, $\overline{G}$ всегда будет давать в результате связный граф, который будет принадлежать. Аналогично следует и для пересечения самого множества связных графов *A* с некоторыми графами $\left(G_i \cup T^{w}_{(w,v_1^i)\ldots(w,v_n^i)}\right)$. Так как графы $\left(G_i \cup T^{w}_{(w,v_1^i)\ldots(w,v_n^i)}\right)$ всегда будут связные, то они будут принадлежать множеству *A*. Тогда, такое пересечение будет всегда равным некоторому графу из $\left(G_i \cup T^{w}_{(w,v_1^i)\ldots(w,v_n^i)}\right)$, а любой такой граф принадлежит нашей совокупности Ω. Нетрудно заметить, что для пересечения с пустым множеством также будет выполняться указанное свойство. Следовательно, второе условие верно.

3. Мы знаем, что $\varnothing$, $A \in \Omega$ и третье условие выполняется.

Так как, три условия из определения топологии выполняются, то множество Ω является топологической структурой на множестве связных графов *A*, которое теперь является топологическим пространством.

Мы выделили две топологические структуры. Одна из которых – это антидискретное пространство с топологической структурой $\tau = \{\varnothing,\ A\}$ на множестве *A*, и топологическую структуру

$$\Omega = \left\{\left(G_i \cup T^{w}_{(w,v_1^i)\ldots(w,v_n^i)},\ \text{ где }\ i = \overline{1,\infty};\quad G_i \in A\right),\ A,\ \varnothing\right\}.$$

Построим базу данных топологий пространства *A*. Для антидискретного пространства мы знаем, что минимальная база состоит из всего пространства. Следовательно, в нашем случае минимальная база будет включать все множество связных графов A. Что касается базы топологии Ω, то очевидно, что её базой будет антидискретное пространство, а минимальной базой является, следовательно, все множество связных графов A.

Исходя из рассмотренного, можно сказать, что множество связных графов *A*, является топологическим пространством с определенной на нем, топологической структурой (причем не единственной). Данные структуры можно использовать при изучении как топологических пространств так и графов. Также связные графы активно применяются в моделировании компьютерной сети, и представление множества связных графов в виде топологического пространства во многом может упростить их рассмотрение, позволит применять методы и приёмы топологии при решении конкретных практических задач.

Литература

1 Кривой, С. Л. Алгебра связных графов и проектирование компьютерных сетей / С. Л. Кривой // Теоретические и методологические основы программирования : в 2 ч. / Киевский национальный университет им. Тараса Шевченка. – Киев, 2006. – № 1 (13). – Ч. 2. – С. 5–14.

2 Свами М. Графы, сети и алгоритмы / М. Свами, К. Тхуласираман. – М.: Мир. – 1984. – 454 с.