УДК 517.986

Е. Ю. Кузьменкова

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В статье рассматриваются свойства обобщенных аналитических функций, определенных лишь на открытом подмножестве пространства полухарактеров абелевых полугрупп. Вводятся необходимые понятия и определения: полугруппы, полухарактера, характера, аналитичности комплекснозначной функции, а также функции, аналитической на открытом подмножестве пространства полухарактеров абелевой полугруппы. Доказаны обобщения или аналоги классических теорем Вейерштрасса и Римана для таких функций.

В работах А. Р. Миротина и его учеников (см. [1] и приведенную там библиографию) была развита теория обобщенных аналитических функций на пространствах полухарактеров абелевых полугрупп. Ниже это понятие обобщено на функции, определенные лишь на открытом подмножестве пространства полухарактеров, и установлены обобщения или аналоги классических теорем Вейерштрасса и Римана для таких функций.

Определение 1. *Полугруппой* S будем называть непустое множество с введенной на нем ассоциативной бинарной операцией.

Определение 2. *Полухарактером* полугруппы S называется гомоморфизм ψ полугруппы S в мультипликативную полугруппу $\overline{D}=\{z\in C:|z|\le 1\}$, не являющийся тождественным нулем. *Характерами* называются полухарактеры, равные по модулю единице.

Далее мы будем предполагать, что полугруппа S является подполугруппой абелевой группы, содержит единицу и наделена дискретной топологией.

Множество всех полухарактеров полугруппы S, наделенное топологией поточечной сходимости, будет обозначаться через $\hat{S}$, а его подпространство, состоящее из неотрицательных полухарактеров, – через $\hat{S}_+$. Заметим, что это компактные топологические полугруппы по умножению с единицей 1 (они компактны как замкнутые подмножества компакта $\overline{D}^S$). Компактную группу характеров полугруппы S будем обозначать X .

Определение 3 [1]. Комплекснозначную функцию F на $\hat{S}\setminus X$ будем называть обобщенной аналитической, если для любых полухарактеров ρ, ψ из $\hat{S}\setminus X$, $\rho\ge 0$ отображение $z\mapsto F(\rho^z\psi)$ аналитично в открытой правой полуплоскости $\Pi=\{z\in C:\operatorname{Re} z>0\}$ и непрерывно в $+0$.

Равномерную алгебру всех функций, непрерывных на $\hat{S}$ и обобщенных аналитических в смысле определения 3, обозначим $A(\hat{S})$.

Следующий результат обобщает классическую теорему Вейерштрасса об аналитичности предела последовательности аналитических функций.

Теорема 1. Если последовательность функций $F_n\in A(\hat{S})$ равномерно сходится к функции F на $\hat{S}$, то $F\in A(\hat{S})$.

<u>Доказательство.</u> Возьмем полухарактеры $\rho_0\in\hat{S}_+\setminus\{1\}$, $\psi_0\in\hat{S}\setminus X$ и пусть

$$f_n(z) = F_n(\rho_0^z \psi_0), \quad f(z) = F(\rho_0^z \psi_0).$$

Заметим, что функции $f_n(z)$ аналитичны в Π (следовательно, непрерывны). Кроме того, последовательность f_n равномерно сходится к f на Π, поскольку

$$\sup_{z\in\Pi} | f_n(z) - f(z) | \underset{n\to\infty}{=} \sup_{z\in\Pi} | F_n(\rho_0^z\psi_0) - F(\rho_0^z\psi_0) | \underset{n\to\infty}{\le} \sup_{\psi\in\hat{S}} | F_n(\psi) - F(\psi) | \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Тогда по классической теореме Вейерштрасса f аналитична в Π.

Покажем, что f непрерывна в $+0$. В самом деле, рассуждая, как выше, получим, что последовательность f_n равномерно сходится к f на $\mathbb{R}_+$, а так как все функции f_n непрерывны на $\mathbb{R}_+$, то и f непрерывна на $\mathbb{R}_+$ и, в частности, непрерывна и в $+0$.

Таким образом, все условия определения 3 выполнены, т. е. $F \in A(\hat{S})$. Теорема доказана.

Следствие 1. Сумма равномерно сходящегося ряда, состоящего из функций, принадлежащих $A(\hat{S})$, тоже принадлежит $A(\hat{S})$.

Далее для каждого $\psi \in \hat{S}$ будем обозначать через $S(\psi)$ носитель полухарактера ψ. т. е. множество $\{s \in S : \psi(s) > 0\}$, а через $N(\psi)$ – множество нулей полухарактера ψ.

Лемма 1. Для любых $\psi \in \hat{S}$, $\rho \in \hat{S}_+$ отображение $\alpha : z \mapsto \rho^z \psi : \overline{\Pi} \to \hat{S}$ непрерывно.

Доказательство. Докажем непрерывность α в точке $z = 0$. Для любой последовательности $\{z_n\}$ из $\overline{\Pi}$ такой, что $z_n \ne 0$ и $z_n \to 0$, имеем $\rho(x)^{z_n} \to 1$ при $x \in S(\rho)$. Если же $x \in N(p)$, то $\rho(x)^{z_n} \to 0$. Таким образом, $\rho^{z_n}\psi \to 1_{S(\rho)}\psi = \alpha(0)$. Аналогично доказывается непрерывность α в точке $z \ne 0$, если воспользоваться формулой

$$\alpha(z)(x) := \begin{cases} e^{z\ln\rho(x)}\psi(x), & x \in S(\rho) \\ 0, & x \in N(\rho). \end{cases}$$

Лемма доказана.

Следствие 2. Для любых $\rho_0 \in \hat{S}_+$, $\psi_0 \in \hat{S}$ и любого открытого $U \subset \hat{S}$ множество

$$V_{\rho_0,\psi_0} = \{z \in \Pi : \rho_0^z \psi_0 \in U\}$$

является открытым в Π.

В самом деле, $V_{\rho_0,\psi_0} = \alpha^{-1}(U)$.

Следствие 2 показывает, что корректно следующее определение.

Определение 4. Пусть $U \subset \hat{S}$ – открытое множество. Функция F называется аналитической в U, если каждая функция вида $f(z) = F(\rho_0^z \psi_0)$ является аналитической в V_{ρ_0,ψ_0} для любых $\rho_0 \in \hat{S}_+$ и $\psi_0 \in \hat{S}$ и, кроме того, f непрерывна в $+0$, если $\rho_0^0 \psi_0 \in U$.

Классическая теорема Римана (см., например, [2]) утверждает, что если функция f аналитична в $D \setminus \{a\}$ и ограничена в некоторой проколотой окрестности точки a, то f аналитически продолжается в a (т. е. является аналитической во всем единичном диске). Следующая теорема является аналогом этого результата для обобщенных аналитических функций.

Теорема 2. Пусть $\psi_0 \in \hat{S} \setminus X$, и функция $F \in C(\hat{S})$ аналитична в $\hat{S} \setminus \{\psi_0\}$. Тогда F принадлежит $A(\hat{S})$.

Доказательство. Возьмем $\psi \in \hat{S} \setminus X$, $\rho \in \hat{S}_+ \setminus \{1\}$ и рассмотрим функцию $f(z) = F(\rho^z \psi)$. Возможны следующие случаи:

1) $\forall z \in \Pi \;\; \rho^z \psi \neq \psi_0$. Тогда $\forall z \in \Pi \;\; \rho^z \psi \in \hat{S} \setminus \{\psi_0\}$, а потому $V_{\rho,\psi} = \Pi$.
Значит, функция f аналитична в Π и непрерывна в $+0$ по условию теоремы.

2) $\exists z_0 \in \Pi \;\; \rho^{z_0} \psi = \psi_0$. Тогда ($U = \hat{S} \setminus \{\psi_0\}$)

$$V_{\rho,\psi} = \left\{ z \in \Pi : \rho^z \psi \neq \psi_0 \right\} = \Pi \setminus \left\{ z_k \right\},$$

где $\{z_k\} := \left\{ z \in \Pi : \rho^z \psi = \psi_0 \right\}$,

и, стало быть, f аналитична в $\Pi \setminus \{z_k\}$ и непрерывна в замыкании $\overline{\Pi}$. Но в таком случае функция $f(z) - F(\psi_0)$ также обладает этими свойствами, причем множество ее нулей в Π содержит $\{z_k\}$. А тогда по теореме Радо (см., например, [3], с. 61) эта функция, а вместе с ней и f, аналитична в Π, что и завершает доказательство.

Благодарю профессора А. Р. Миротина, под руководством которого была написана эта работа.

Литература

1. Миротин, А. Р. Интерполяционные множества алгебры обобщенных аналитических функций / А. Р. Миротин, М. А. Романова // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2007. – №3(538). – С. 51–59.
2. Шабат, Б. В. Введение в комплексный анализ / Б. В. Шабат. – М.: Наука, 1969. – 577 с.
3. Гамелин, Т. Равномерные алгебры / Т. Гамелин. – М.: Мир, 1973. – 334 с.

УДК 004.7

А. С. Кулешов, Г. Л. Карасёва

СОЗДАНИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ КОМПЬЮТЕРНОЙ ГРАФИКИ

Статья посвящена описанию разработанного приложения, позволяющего на основе заданных функций строить фазовые портреты, графики и графическое представление этих функций в пиксельном виде. В программе используются возможности среды Borland Delphi 7.0, позволяя создать приятный и удобный